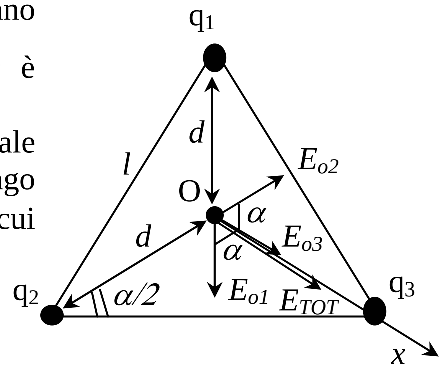
FISICA

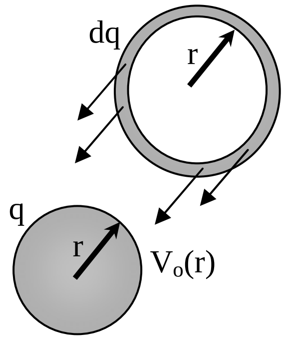
A.A. 2004-2005
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 9^a^ prova

1. Il campo elettrico totale nel punto O è dato dalla somma vettoriale dei tre campi elettrici generati da $q_1=q$, $q_2=q$, $q_3=-q$. Tutti e tre i vettori hanno la stessa intensità $E_{o1}=E_{o2}=E_{o3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o d^2}$ perché il punto O è equidistante dalle tre cariche. Per la simmetria del sistema il campo totale E_{TOT} ha la direzione dell'asse x, e si ottiene proiettando i tre vettori lungo l'asse x: da ciò $E_{TOT}=E_{o1}\cos\alpha+E_{o2}\cos\alpha+E_{o3}$ dove $\alpha=\pi/3$ e per cui $\cos\alpha=1/2$ e $d=l/\sqrt{3}$. Da cui $E_{TOT}=\frac{2q}{4\pi\varepsilon_o d^2}=\frac{6q}{4\pi\varepsilon_o l^2}=$



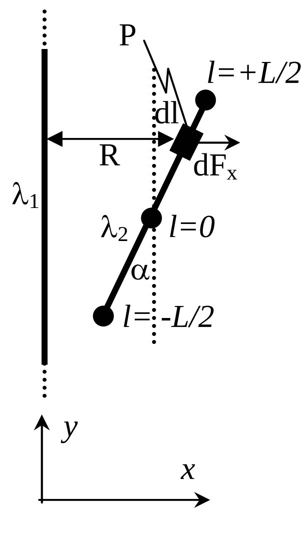
$=\frac{6\cdot10^{-6}}{5^2\cdot10^{-4}}9\cdot10^9\,V/m=2.16\cdot10^7\,V/m$. Il potenziale totale si ottiene dalla somma algebrica dei tre potenziali $V(O)=\frac{q+q-q}{4\pi\varepsilon_o d}=\frac{q\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_o l}=\frac{9\cdot10^9\cdot10^{-6}\sqrt{3}}{5\cdot10^{-2}}V=3{,}12\cdot10^5V$. Per l'energia configurazionale $U=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_o l}+\frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_o l}+\frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_o l}=\frac{q^2-q^2-q^2}{4\pi\varepsilon_o l}=-\frac{9\cdot10^9\cdot10^{-12}}{5\cdot10^{-2}}=-0.18J$

2. Per calcolare l'energia configurazionale del sistema immaginiamo di costruire una sfera uniformemente carica con un raggio r via via crescente. Il lavoro dL^{ext} che dobbiamo compiere contro le forze del campo per accrescere il raggio da r a $r+dr$ si calcola pensando di portare dall'infinito un guscio sferico di carica $dq=\rho dV=\rho\left(4\pi r^2dr\right)$ e di depositarlo sulla superficie della sfera che già si trova al potenziale $V_o(r)=q\Big/4\pi\varepsilon_o r=\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\Big/4\pi\varepsilon_o r=\rho r^2/3\varepsilon_0$ dove q è la carica interna a tale sfera. Tale lavoro esterno contrario al lavoro elettrostatico andrà ad accrescere l'energia configurazionale del sistema della quantità $dU=dL^{ext}=-dL^{el}=dqV_o(r)=\rho\left(4\pi r^2dr\right)\rho r^2/3\varepsilon_0=4\pi\rho^2r^4dr/3\varepsilon_o$.



Integrando tutti questi contributi energetici accrescendo il raggio della sfera da $r=0$ fino a raggiungere $r=R$ (le dimensioni finali della sfera) si ottiene il valore finale dell'energia configurazionale $U=\int_0^R 4\pi\rho^2r^4dr/3\varepsilon_o=\frac{4\pi\rho^2R^5}{15\varepsilon_o}$ o equivalentemente in termini della carica totale $Q_{tot}=\rho\frac{4}{3}\pi R^3$, si ottiene $U_o=\frac{3}{5}\cdot\frac{Q_{tot}^2}{4\pi\varepsilon_o R}$.

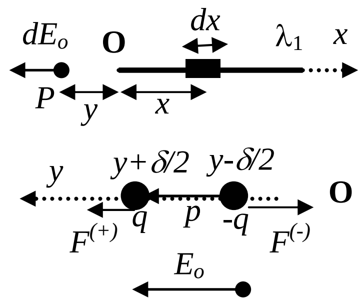
3. Il campo elettrico generato dal filo infinitamente lungo può essere facilmente determinato applicando la legge di Gauss. Nel punto generico P (sulla barretta), a distanza R dal filo, il campo vale $E_o(x=R)=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_o R}$ con direzione lungo l'asse delle x. La forza elettrica cui è sottoposto l'elemento dl della barretta, sul quale è presente una carica $dq=\lambda_2 dl$, vale quindi $dF_x=E_o dq=E_o\lambda_2 dl=\frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o R}dl$ con



direzione lungo l'asse *x*. La forza totale, dovuta al filo, e agente sulla barretta si ottiene integrando i contributi infinitesimi dF_x su tutta la barretta. Si noti come *R* non sia costante ma vari con legge $R(l) = d + lsin(\alpha)$ dove *l* è l'ascissa introdotta sulla barretta che varia da $-L/2$ ad $L/2$. La forza totale risulta quindi

$$F_x = \int dF_x = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dl}{d + lsin(\alpha)} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o sin(\alpha)}\ln\left(\frac{d + Lsin(\alpha)/2}{d - Lsin(\alpha)/2}\right) = 4.5\times10^{-6}\,N$$

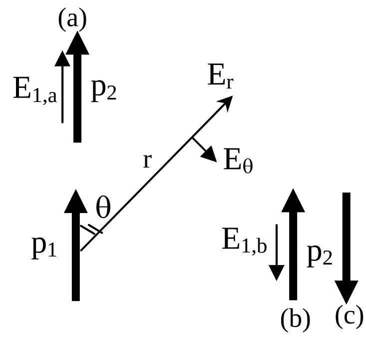
4. Alla distanza generica *x* dall'origine *O* si trova la carica $dq=\lambda_1 dx$ che genera il contributo di campo elettrico $dE_O = \lambda_1 dx\big/4\pi\varepsilon_O(x+y)^2$ nel punto *P* a distanza *y* dall'origine. Tale contributo diretto lungo l'asse *y* (contrario all'asse x) quando integrato lungo tutto il semiasse positivo delle *x* fornisce un valore complessivo di campo elettrico pari a $E_O = \int dE_O = \frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_O}\int_0^\infty dx\big/(x+y)^2 = \frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_O y}$. La forza cui è sottoposto un dipolo *p* a distanza *y* dall'origine O si può determinare a partire dall'energia configurazionale del dipolo $U = -\vec{p}\cdot\vec{E}_O = -\frac{\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_O y}$, calcolandone il gradiente rispetto alla coordinata *y* libera del dipolo: $F_y = -grad_y U = \frac{d}{dy}\frac{\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_o y} = -\frac{\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_o y^2} = -\frac{9\cdot10^9\cdot10^{-6}10^{-9}}{\left(10^{-1}\right)^2} = -9\cdot10^4\,N$



La forza è quindi contraria all'asse y risultando quindi attrattiva diretta verso il filo uniformemente carico. Alternativamente tale forza può essere determinata come risultante della forza agente sulla carica positiva del dipolo $F^{(+)}$ posizionata in $y+\delta/2$ e della forza agente sulla carica negativa del dipolo $F^{(-)}$ posizionata in $y+\delta/2$. La risultante delle due forze vale quindi $F_y = F^{(+)} + F^{(-)} =$

$$= q\frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o(y+\delta/2)} - q\frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o(y-\delta/2)} = \frac{-q\lambda_1\delta}{4\pi\varepsilon_o\left(y^2-(\delta/2)^2\right)} \cong \frac{-\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_o y^2}$$

5. Il campo elettrico E_1 generato dal dipolo p_1 a grande distanza *r* si scompone nelle due componenti radiale e tangenziale $\begin{cases} E_r = 2p_1\cos\theta\big/4\pi\varepsilon r^3 \\ E_\theta = p_1\sin\theta\big/4\pi\varepsilon r^3 \end{cases}$ in particolare nella posizione in verticale (a) (θ=0) il campo è solamente radiale e vale $E_{1,a} = p_1\big/2\pi\varepsilon r^3$, mentre il campo nella posizione in orizzontale (b) è solamente tangenziale (θ=π/2) e vale $E_{1,b} = p_1\big/4\pi\varepsilon r^3$. L'energia di interazione che nasce quando un secondo dipolo p_2 è immerso nel campo generato dal primo dipolo vale in generale $U_{12} = -\vec{p}_2\cdot\vec{E}_1$. Nella posizione (a) $E_{1,a}$ è equiverso con p_2 cosicché



l'energia di interazione risulta minima $U_a = -p_1 p_2\big/2\pi\varepsilon r^3$ (configurazione di minima energia, i dipoli si attraggono). Nella posizione (b) il campo $E_{1,b}$ è controverso con p_2 e l'energia di interazione risulta massima $U_b = p_1 p_2\big/4\pi\varepsilon r^3$ (configurazione di massima energia, i dipoli si respingono). In questo secondo caso possiamo invertire il dipolo p_2 ottenendo (configurazione c) una energia di interazione $U_c = -p_1 p_2\big/4\pi\varepsilon r^3$ negativa (attrazione) ma non minima possibile. Concludiamo quindi che la configurazione (a) è quella energeticamente più vantaggiosa per il sistema.