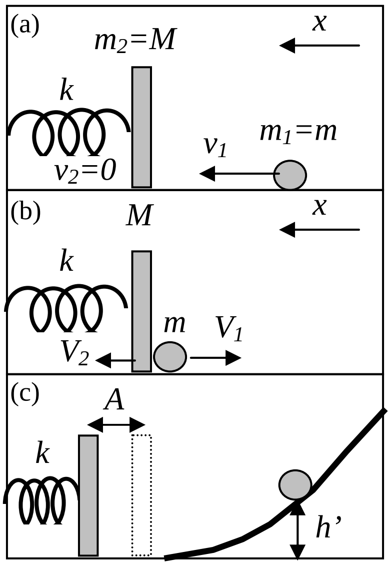
FISICA

A.A. 2007-2008
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 8° prova

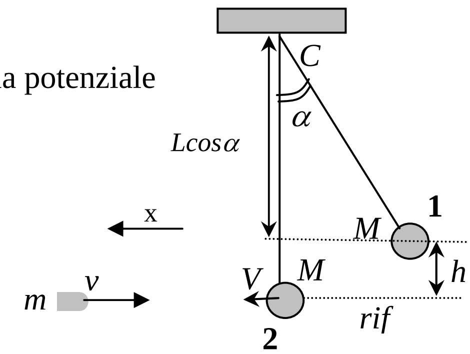
.



1. La pallina (corpo n.1) scende senza attrito lungo il piano inclinato, trasformando la sua energia potenziale $U=m_1gh$ interamente in energia cinetica $T=m_1v_1^2/2$. La velocità prima dell'impatto con il piattello è quindi $v_1=\sqrt{2gh}$ diretta lungo l'asse delle x come in figura (a). Dopo l'urto elastico con il piattello fermo ($v_2=0$), le velocità dei due corpi V_1 e V_2 si calcolano imponendo la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica del sistema. Dal sistema si ottengono le espressioni

$$\begin{cases} V_1=\left(\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)v_1+\left(\dfrac{2m_2}{m_1+m_2}\right)v_2=\left(\dfrac{m-M}{m+M}\right)\sqrt{2gh} \\ V_2=\left(\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_1+\left(\dfrac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)v_2=\left(\dfrac{2m}{m+M}\right)\sqrt{2gh} \end{cases} \quad \text{ove } m=m_1 \text{ e } M=m_2$$

La pallina quindi inverte la sua velocità ($V_1<0$) e risale il piano inclinato sino all'altezza h'. Questa altezza si ricava imponendo la conservazione dell'energia meccanica della pallina nell'istante immediatamente dopo l'urto $E_m=T=mV_1^2/2=mgh((M-m)/(M+m))^2$ (fig b), e nel punto di massima altezza $E_m=U=mgh'$ (fig c), da cui $h'=h((M-m)/(M+m))^2=0.383m$. Durante l'urto la pallina cede al piattello un impulso, lungo l'asse x, di valore $J_x=\int F_x dt=p_x^{dopo}-p_x^{prima}=MV_2=\sqrt{2gh}\,2mM/(M+m)=1.17Ns$ che mette in oscillazione il piattello ad $\omega=2\pi/T_{osc}$. Dalla conservazione dell'energia meccanica per il piattello, tra l'istante immediatamente dopo l'urto $E_m=T=MV_2^2/2$ e la posizione di massima elongazione $E_m=U^{el}=kA^2/2$ siottiene l'elongazione massima $A=V_2/\sqrt{k/M}=V_2T_{osc}/2\pi=0.125mm$



2 Il sacco lasciato cadere dalla posizione (1) ha inizialmente solo energia potenziale

$$E_{m1}=Mgh=MgL(1-\cos\alpha)$$

Quando raggiunge la posizione di minima quota (2) avrà trasformato energia potenziale interamente in energia cinetica

$$E_{m2}=MV^2/2$$

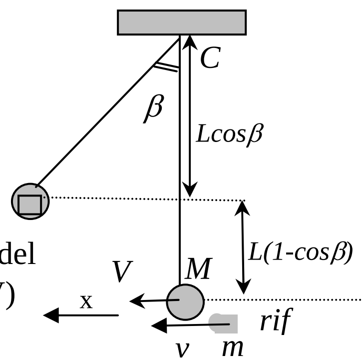
Dalla conservazione dell'energia meccanica si ricava la velocità $V=\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}$

La quantità di moto (lungo x) del sistema proiettile+sacco prima dell'urto è $p_x=MV-mv$

Il sistema dopo l'urto rimane in quiete. La quantità di moto è quindi $p_x=0$.

Dalla conservazione della quantità di moto si ottiene la velocità del proiettile

$$v=\frac{M}{m}\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}=\mathbf{171.9\ m/s}$$

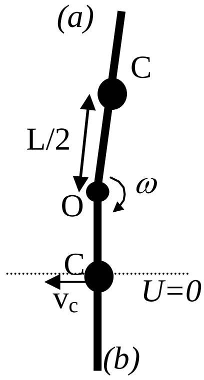


Facoltativo: se il proiettile è diretto in senso opposto la quantità di moto del sistema prima dell'urto è $p_x=MV+mv=2MV$ (tenuto conto che $mv=MV$)

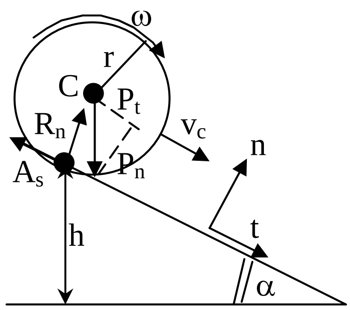
Questa quantità si conserva dopo l'urto $p_x = (M+m)V_c$
Imponendo l'uguaglianza dei termini si ottiene la velocità del c.d.m.

$V_c = V\left(\frac{2M}{M+m}\right)$ che è legata al massimo angolo β dalla $V_c = \sqrt{2gL(1-\cos\beta)}$

Combinando le equazioni si ottiene $\cos\beta = 1 - \left(\frac{2M}{M+m}\right)^2 (1-\cos\alpha)$ da cui **β=61°53'**

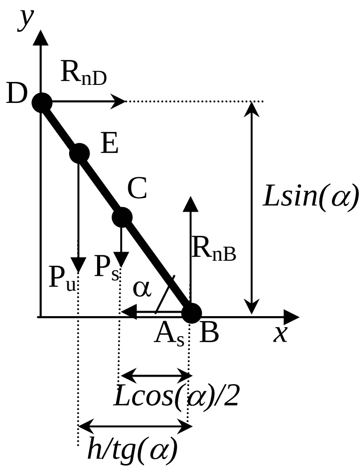


3. L'urto è anche in questo caso perfettamente anelastico. Ma il moto della barretta dopo l'urto è questa volta di pura rotazione intorno all'asse per il cardine *O*. Considerando il sistema complessivo, nell'urto si sviluppano solo forze interne e forze sul cardine *O*. Il momento di queste forze calcolato sull'asse per O è quindi nullo per cui si conserva il momento della quantità di moto del sistema. Prima dell'urto $b_O = mv_O L/2$ mentre dopo l'urto $b_O = I_O\omega$ dove $I_O = m(L/2)^2 + ML^2/3$ =0.033kgm^2. Dalla conservazione di b_o si ottiene la velocità angolare iniziale $\omega_O = mv_O L/2I_O = 6v_O m/(3m+4M)L = 134.8\ rad/s$. Appena dopo l'urto la barra si sposta dalla posizione di equilibrio instabile *(a)* e si rovescia oscillando intorno alla posizione di equilibrio stabile *(b)*. Durante la rotazione l'energia meccanica totale si conserva per cui $U_a+T_a=U_b+T_b$. Fissando come riferimento dell'energia potenziale quello dello stato *(b)*, si ha ovviamente $U_b=0$ mentre $U_a=(m+M)gL$ (dopo l'urto nel centro di massa si concentra la massa complessiva *m+M)*. L'espressione dell'energia cinetica di pura rotazione intorno ad *O* è invece $T = I_O\omega^2/2$. Imponendo la conservazione dell'energia meccanica si ha quindi $I_O\omega_O^2/2 + (m+M)gL = I_O\omega_b^2/2$ da cui la velocità angolare in (b) vale $\omega_b = \sqrt{\omega_O^2 + 2(m+M)gL/I_O}$ =*135.5 rad/s.*



4. Le forze agenti sul corpo sono: la forza peso *P=mg* applicata nel baricentro *C*, che può pensarsi scomposta nelle due componenti lungo i due assi normale e tangenziale $P_t=P\sin\alpha$ e $P_n=P\cos\alpha$, la reazione normale R_n applicata sul punto di contatto e diretta lungo *n*, e la forza di attrito statico A_s applicata sul punto di contatto e contraria al moto lungo *t*. (si ricorda che l'attrito è statico perché nel puro rotolamento il punto di contatto è fermo!). La 1[a] equazione cardinale proiettata lungo gli assi *n*,*t* si scrive $\begin{matrix}\hat{t} \\ \hat{n}\end{matrix}\begin{cases} P_t - A_s = ma_c \\ R_n - P_n = 0 \end{cases}$ da cui ricaviamo la reazione normale $R_n = P_n = mg\cos\alpha$. Per ricavare l'accelerazione del centro di massa a_c è però indispensabile applicare la 2[a] equazione cardinale proiettata sull'asse orizzontale per il centro di massa *C*; l'unico momento non nullo è il momento della forza di attrito che mette in rotazione il corpo $M_C = A_s r = I_c\, d\omega/dt$ (si noti che per semplicità è stata adottata la convenzione per cui ω è positivo per rotazioni orarie) essendo I_c il momento di inerzia rispetto al centro di massa. La condizione di rotolamento impone che $v_c(t) = \omega(t)\cdot r$ che vale anche derivando nel tempo ambo i membri per cui $a_c(t) = \frac{d\omega}{dt}\cdot r$ da cui l'attrito vale $A_s = a_c\left(I_c/r^2\right)$. Sostituendo questa espressione nella 1[a] equazione cardinale si ottiene $ma_c = mg\sin\alpha - a_c\left(I_c/r^2\right)$ da cui l'accelerazione del centro di massa è costante $a_c = g\sin\alpha/\left(1+I_c/mr^2\right)$. Il moto è quindi uniformemente accelerato con $v_c(t) = a_c t$ e spazio percorso $s(t) = a_c t^2/2$. Il tempo *t** per percorrere lo spazio fino alla base del piano $L=h/sin\alpha$ è quindi $t^* = \sqrt{2L/a_C} = \sqrt{2h/\left(gsin^2\alpha\left(1+I_c/mr^2\right)\right)} = \begin{cases} t_{cilindro} = 1.11s \\ t_{sfera} = 1.07s \end{cases}$ mentre le velocità finali sono $v_C = \sqrt{2gh\Big/\left(1+\dfrac{I_c}{mr^2}\right)} = \begin{cases} v_{cilindro} = 3.61m/s \\ v_{sfera} = 3.74m/s \end{cases}$. La sfera arriva prima perché ha un momento d'inerzia minore e l'energia cinetica della sfera viene ripartita più efficientemente nell'energia traslazionale del centro di massa più che nell'energia rotazionale intorno al centro di massa.

5. Le forze agenti sul sistema sono le seguenti: il peso della scala P_s applicato nel baricentro C (a metà della lunghezza della scala), il peso dell'uomo P_u applicato sulla scala nel punto E (ad altezza h dal suolo), la reazione del pavimento applicata nel punto di contatto B che si compone di una reazione normale R_{nB} e di una forza di attrito statico orizzontale A_s, ed infine la reazione della parete verticale R_{nD} applicata nel punto di contatto D. In condizioni statiche la somma vettoriale di tutte le forze deve annullarsi (1[a] equazione cardinale) come anche la somma di tutti i momenti delle forze deve annullarsi (2[a] equazione cardinale). Scomponiamo la 1[a] equazione cardinale lungo x, y: $\begin{matrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{matrix}\begin{cases} R_{nD} - A_s = 0 \\ R_{nB} - (P_u + P_s) = 0 \end{cases}$ da cui ricaviamo il valore di $R_{nB}=P_u+P_s$ ed una



condizione sull'attrito statico $A_s=R_{nD}$ insufficiente però per determinarlo (1 equazione in 2 incognite!). L'attrito A_s viene infatti determinato grazie alla 2[a] equazione cardinale applicata per semplicità ad un asse orizzontale per B. In questo caso contribuiranno solo i momenti della reazione della parete verticale R_{nD} con braccio $Lsin\alpha$ da B, del peso della scala P_s con braccio $L/2\ cos\alpha$ da B, ed infine del peso dell'uomo P_u con braccio $hcotg\alpha$ da B (gli altri 2 momenti, di braccio nullo, sono nulli). La condizione statica impone che $M_B = P_u h \cot g\alpha + P_s L\cos\alpha/2 - R_{nD}Lsin\alpha = 0$ (si noti che il momento di R_{nD} è negativo perché tenderebbe a far ruotare la scala in senso orario) da cui si ricava $A_s = R_{nD} = P_u h/\left(Lsin\alpha \cdot tg\alpha\right) + P_s/2tg\alpha$. L'attrito trovato è quello richiesto dalla condizione di staticità. Esso può essere fornito solo se è inferiore al valore massimo $A_s \le A_{max} = \mu_s R_{nB} = \mu_s\left(P_u + P_s\right)$. Il caso limite $A_s = A_{max}$ corrisponde all'altezza h_{max} da cui si ricava $h_{max} = L\dfrac{sin^2\alpha}{\cos\alpha}\left[\mu_s + \dfrac{P_s}{P_u}\left(\mu_s - \dfrac{1}{2tg\alpha}\right)\right] = 3\dfrac{3/4}{1/2}\left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{10}{70}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)\right] = 2.386\ m$