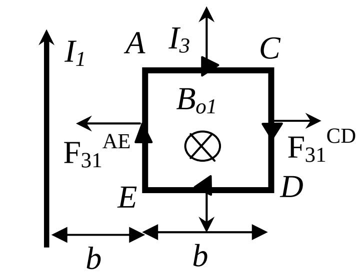
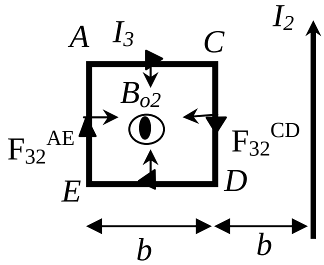
FISICA II

A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 7ª prova

1. La spira rettangolare ACDE è sottoposta a forze magnetiche interne ed esterne. Le forze magnetiche interne dovute al campo magnetico da essa stessa generato hanno risultante nulla e quindi nel caso di una spira rigida non danno alcun effetto. Le forze magnetiche esterne sono quelle dovute ai campi magnetici B_{o1} generato dalla corrente I_1 e B_{o2} dalla I_2. Tali forze esterne sono descritte in generale dalla 2ª formula di Laplace $\vec{F} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = I_3 \int d\vec{l}_3 \times \vec{B}_{o1} + I_3 \int d\vec{l} \times \vec{B}_{o2}$. Calcoliamo prima la forza $\vec{F}_{31}$ che può pensarsi come somma la risultante delle 4 forze agenti sui 4 lati della spira rettangolar. Le 2 forze sui due lati AC ed ED sono uguali ed opposte e non danno alcun effetto, mentre sul lato AE c'è una forza attrattiva di valore $F_{31}^{AE} = B_{o1} I_3 a = \frac{\mu_o}{2\pi b} I_1 I_3 a$ maggiore della forza repulsiva sul lato CD che vale $F_{31}^{CD} = B_{o1} I_3 a = \frac{\mu_o}{4\pi b} I_1 I_3 a = \frac{F_{31}^{AE}}{2}$. La risultante $F_{31} = \frac{\mu_o I_1 I_3 a}{4\pi b}$ è quindi attrattiva verso il primo filo. Ragionamento analogo deve essere fatto per trovare la forza risultante $\vec{F}_{32}$, dove le forze che non compensate sono sul lato CD $F_{32}^{CD} = B_{o2} I_3 a = \frac{\mu_o}{2\pi b} I_2 I_3 a$ repulsiva e doppia rispetto a quella attrattiva sul lato AE $F_{32}^{AE} = B_{o2} I_3 a = \frac{\mu_o}{4\pi b} I_2 I_3 a$. La risultante $F_{32} = \frac{\mu_o I_2 I_3 a}{4\pi b}$ è quindi repulsiva ed ha ho stesso verso della F_{31}. La risulatnte totale è quindi diretta verso il primo filo con intensità $F_3 = \frac{\mu_o a}{4\pi b}\left(I_1 I_3 + I_2 I_3\right)$

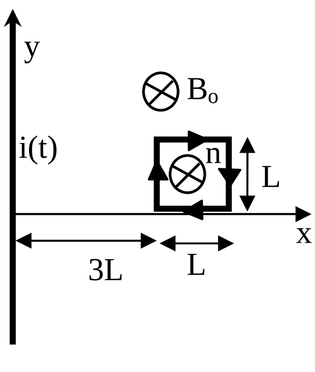




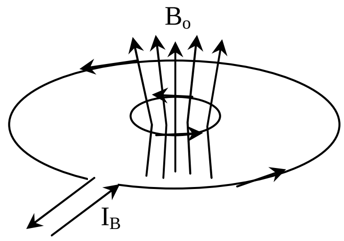
2. Il campo magnetico nonuniforme generato dal filo rettilineo vale, per la legge di Biot e Savart, $B_o(x,t) = \frac{\mu_o i(t)}{2\pi x}$ con direzione e verso indicati in figura. Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira quadrata in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$, procediamo al calcolo del flusso concatenato con la spira Φ_c:

$$\Phi_c = \int \vec{B}_o \cdot \hat{n} dS = \int B_o dS = \frac{\mu_o i(t)}{2\pi} \int_o^L dy \int_{3L}^{4L} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o i(t) L}{2\pi} \ln(4/3)$$

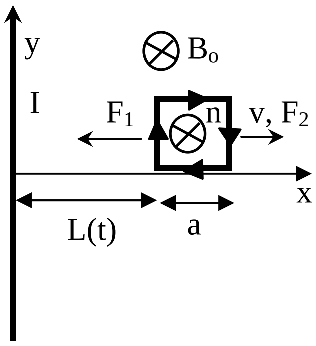
. Applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz possiamo calcolare la forza elettromotrice indotta nella spira con l'equazione $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{\mu_o L}{2\pi} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \frac{d}{dt} i(t) = \frac{\mu_o L i_{\max} \omega}{2\pi} \ln\left(\frac{4}{3}\right) sin(\omega t)$. Infine l'intensità di corrente indotta nel circuito si ottiene $i_2(t) = f_i / R$. Tale corrente è alternata ed ha valore massimo



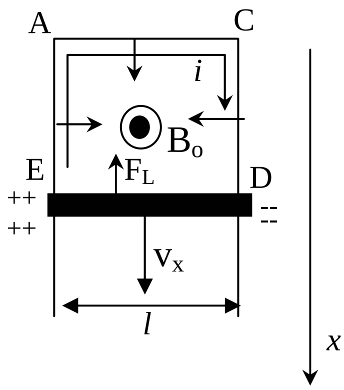
$$i_{2,\max} = \frac{\mu_o L i_{\max} \omega}{2\pi R} \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4\pi 10^{-7} 10^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 314}{2\pi \cdot 1} \; 0.288 = 3.61 \text{nA}.$$



3. La spira esterna genera un vettore induzione magnetica che nella regione dove è posta la spira interna può essere considerato praticamente uniforme di intensità $B_o = \dfrac{\mu_o I_B}{2b}$ (campo al centro della spira). Il flusso concatenato è quindi $\Phi_c(t) = \int B_o dS = B_o \pi a^2 = \dfrac{\mu_o \pi a^2}{2b} I_B(t)$. La corrente indotta nella spira interna si calcola con la legge di Faraday-Neumann-Lenz $I_A(t) = -\dfrac{1}{R}\dfrac{d\Phi_c}{dt} = \left(\dfrac{\mu_o \pi^2 a^2 i_{b\max} f}{R \cdot b}\right)\sin(2\pi f t)$ ed ha valore massimo $i_{A\max} = \left(\dfrac{\mu_o \pi^2 a^2 i_{b\max} f}{R \cdot b}\right) = 2.48\ 10^{-11}$ A.



4. Il campo magnetico nonuniforme generato dal filo rettilineo vale, per la legge di Biot e Savart, $B_o(x) = \dfrac{\mu_o I}{2\pi x}$ con direzione e verso indicati in figura. Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira quadrata in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$, procediamo al calcolo del flusso concatenato con la spira Φ_c:
$\Phi_c(t) = \int \vec{B}_o \cdot \hat{n} dS = \int B_o dS = \dfrac{\mu_o I}{2\pi}\int_o^L dy \int_L^{L+a}\dfrac{dx}{x} = \dfrac{\mu_o I a}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{a}{L(t)}\right)$. Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz possiamo calcolare la corrente indotta nella spira $i = -\dfrac{1}{R}\dfrac{d\Phi_c}{dt} = \dfrac{\mu_o I a^2}{2\pi R}\dfrac{v}{L(L+a)}$. Infine applicando la 2 formula di Laplace si ottengono le forze $F_1 = aiB_{o1} = \dfrac{\mu_o^2 I^2 a^3}{(2\pi)^2 R}\dfrac{v}{L^2(L+a)}$ e $F_2 = aiB_{o2} = \dfrac{\mu_o^2 I^2 a^3}{(2\pi)^2 R}\dfrac{v}{L\,(L+a)^2}$. La risultante è quindi attrattiva $F_1 - F_2 = \dfrac{\mu_o^2 I^2 a^4}{(2\pi)^2 R}\dfrac{v}{L^2(L+a)^2}$ e tende a rallentare il movimento della spira. Per mantenere la spira a velocità uniforme è quindi necessario applicare una forza esterna uguale e contraria alla risultante.



5. Il movimento della barretta *DE* causa una variazione di flusso di B_o nel circuito *ACDE* generando una forza elettromotrice indotta $f_i = B_o l v_x$ in accordo alla legge di Faraday-Neumann-Lenz, dove l è la lunghezza della barretta e v la sua velocità di caduta. La corrente circola nel verso indicato in figura con valore $i = f_i / R = B_o l v_x / R$. In accordo alla seconda formula di Laplace, sui 4 lati del circuito si generano forze attrattive. In particolare sull'unico lato mobile *DE* si genera una forza $F_L = ilB_o = B_o^2 l^2 v_x / R$ proporzionale alla velocità di caduta e contraria al moto (asse x) ed alla forza peso $P=mg$. Proiettando il II principio sull'asse di caduta x, si ottiene $ma_x = mg - F_L$ che rappresenta un moto verticale in cui la velocità, inizialmente nulla, cresce tendendo ad un valore limite asintotico v_{lim}. Tale valore si ottiene equilibrando le forze $P = F_L$ da cui si ottiene $v_{\lim} = mgR/\left(B_o^2 l^2\right)$. Se esprimiamo la massa della barretta in funzione della sua densità $m = \delta(Sl)$ e la resistenza elettrica in funzione della resistività $R = \rho(l/S)$ si ottiene l'espressione finale $v_{\lim} = g\left(\delta\rho / B_o^2\right)$.