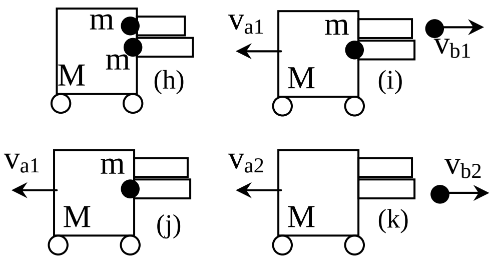
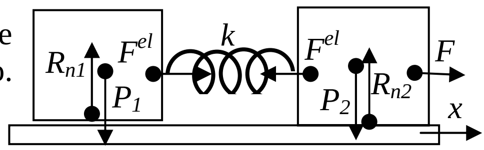
FISICA

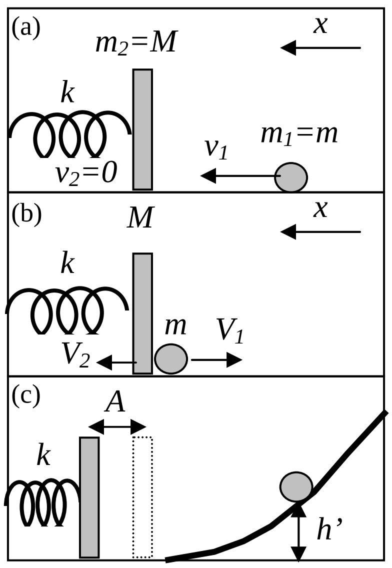
A.A. 2004-2005
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 6° prova



1. La quantità di moto del sistema si conserva tra l'istante *h* e l'istante *i* (prima e dopo la prima esplosione); infatti le forze esplosive sono forze interne e non danno contributo alla prima equazione cardinale. Si scrive quindi $\vec{p}_i = \vec{p}_h = 0$ perché il sistema inizialmente è in quiete. L'espressione diventa quindi $(M+m)\vec{v}_{a1} + m\vec{v}_{b1} = 0$. Il problema però non fornisce il valore della velocità assoluta del proiettile $\vec{v}_{b1}$ ma la sua velocità di uscita $\vec{v}_u$ relativa alla canna che non è ferma! Applicando le relazioni dei moti relativi si ha $\vec{v}_{b1} = \vec{v}_u + \vec{v}_{a1}$ che introdotta nell'altra equazione consente di trovare $\vec{v}_{a1} = -\vec{v}_u\left(\dfrac{m}{M+2m}\right)$. Dopo poco tempo si verifica una seconda esplosione dove si conserva ancora la quantità di moto tra gli istanti j e k. Possiamo pertanto scrivere $M\vec{v}_{a2} + m\vec{v}_{b2} = (M+m)\vec{v}_{a1}$ dove al solito $\vec{v}_{b2} = \vec{v}_u + \vec{v}_{a2}$.
Combinando le espressioni si ottiene $\vec{v}_{a2} = -\vec{v}_u\left(\dfrac{m(2M+3m)}{(M+m)(M+2m)}\right)$ con valore $v_{a2} = -2.64 m/s$.



2. Decidiamo di considerare solo le forze agenti lungo l'asse *x*. Le forze lungo *y* infatti si equilibrano banalmente senza effetti sul moto. Applicando il II principio sia per la massa n.1 che per la n.2 si ottiene
$\begin{cases} F - F_{el} = m_2 a_2 \\ F_{el} = m_1 a_1 \end{cases}$ che sommando membro a membro dà luogo alla prima equazione cardinale del sistema $F = m_1 a_1 + m_2 a_2 = (m_1+m_2)a_c$. Nel sistema le due masse viaggiano alla stessa velocità ed accelerazione per cui $a_1 = a_2 = a_c = F/(m_1+m_2)$. Questa condizione riportata nell'equazione della forza elastica porta a $F_{el} = k\Delta l = m_1 a_1 = F(m_1/(m_1+m_2))$ da cui $\Delta l = F/k\,(m_1/(m_1+m_2)) = 1.5mm$.

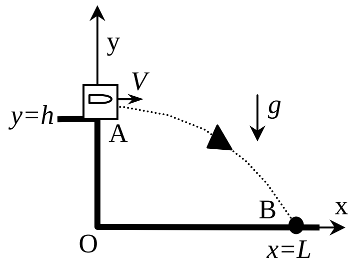


3. La pallina (corpo n.1) scende senza attrito lungo il piano inclinato, trasformando la sua energia potenziale $U=m_1gh$ interamente in energia cinetica $T=m_1v_1^2/2$. La velocità prima dell'impatto con il piattello è quindi $v_1 = \sqrt{2gh}$ diretta lungo l'asse delle *x* come in figura (a). Dopo l'urto elastico con il piattello fermo ($v_2=0$), le velocità dei due corpi V_1 e V_2 si calcolano imponendo la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica del sistema. Dal sistema si ottengono le espressioni

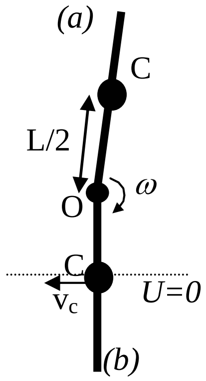
$$\begin{cases} V_1 = \left(\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)v_1 + \left(\dfrac{2m_2}{m_1+m_2}\right)v_2 = \left(\dfrac{m-M}{m+M}\right)\sqrt{2gh} \\ V_2 = \left(\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_1 + \left(\dfrac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)v_2 = \left(\dfrac{2m}{m+M}\right)\sqrt{2gh} \end{cases}$$ ove $m=m_1$ e $M=m_2$

La pallina quindi inverte la sua velocità ($V_1<0$) e risale il piano inclinato sino all'altezza *h'*. Questa altezza si ricava imponendo la conservazione dell'energia meccanica della pallina nell'istante immediatamente dopo l'urto

$E_m = T = mV_1^2/2 = mgh\left((M-m)/(M+m)\right)^2$ (fig b), e nel punto di massima altezza $E_m = U = mgh'$ (fig c), da cui $h' = h\left((M-m)/(M+m)\right)^2 = 0.383m$. Durante l'urto la pallina cede al piattello un impulso, lungo l'asse x, di valore $J_x = \int F_x dt = p_x^{dopo} - p_x^{prima} = MV_2 = \sqrt{2gh}\, 2mM/(M+m) = 1.17Ns$ che mette in oscillazione il piattello ad $\omega = 2\pi/T_{osc}$. Dalla conservazione dell'energia meccanica per il piattello, tra l'istante immediatamente dopo l'urto $E_m = T = MV_2^2/2$ e la posizione di massima elongazione $E_m = U^{el} = kA^2/2$ siottiene l'elongazione massima $A = V_2/\sqrt{k/M} = V_2 T_{osc}/2\pi = 0.125mm$



4. Nell'esercizio si succedono due processi: un urto perfettamente anelastico della pallottola con il blocco, ed una successiva caduta per gravità dell'insieme blocco-pallottola. 1^a *parte*: nell'urto perfettamente anelastico della pallottola con il blocco la quantità di moto iniziale prima dell'urto $\vec{p}_i = m\vec{v}_o$ si conserva dopo l'urto quando i due corpi procedono insieme a velocità V con quantità di moto finale $\vec{p}_f = (m+M)\vec{V}$. Imponendo $\vec{p}_i = \vec{p}_f$ si ricava facilmente $v_o = V(1 + M/m)$. 2^a *parte*: dopo l'urto il blocco, ora di massa $M+m$, cade dal tavolo descrivendo un moto parabolico per effetto di g (vedi figura). Scomponiamo ora le equazioni del moto lungo x ed y: lungo l'asse x non c'é accelerazione ed il moto risultante è rettilineo uniforme $x(t) = V \cdot t$, dove V è la velocità appena dopo l'urto. Lungo l'asse y il moto è uniformemente accelerato per gravità; $a_y = -g$, $v(t) = -g \cdot t$, $y(t) = h - gt^2/2$. Da quest'ultima imponendo $y(t^*)=0$ ricaviamo il tempo di volo $t^* = \sqrt{2h/g}$. La distanza del punto di caduta B dal tavolo si ottiene dall'espressione $x(t^*) = L = V\sqrt{2h/g}$ che invertita si riscrive $V = L\sqrt{g/2h}$. Combinando le espressioni finali delle due fasi del problema si ottiene $v_o = (1 + M/m) \cdot L \cdot \sqrt{g/2h} = 838\ m/s$. L'energia cinetica iniziale del proiettile era $T_1 = mv_o^2/2 = m(1+M/m)^2 gL^2/4h = 5.27\ kJ$, l'energia cinetica con cui il blocco cade dal punto A è invece $T_2 = (m+M)V^2/2 = (m+M)gL^2/4h = 19.7\ J$, per cui durante l'urto si è trasformata in calore la differenza $Q = T_1 - T_2 = M(1+M/m)gL^2/4h = 5.25\ kJ$. Infine imponendo la conservazione dell'energia meccanica durante la caduta da A a B si ottiene l'energia cinetica in B che vale $T_3 = T_2 + U_2 = (m+M)gL^2/4h + (m+M)gh = (m+M)g\left(L^2 + 4h^2\right)/4h = 39\ J$.



5. L'urto è anche in questo caso perfettamente anelastico. Ma il moto della barretta dopo l'urto è questa volta di pura rotazione intorno all'asse per il cardine O. Considerando il sistema complessivo, nell'urto si sviluppano solo forze interne e forze sul cardine O. Il momento di queste forze calcolato sull'asse per O è quindi nullo per cui si conserva il momento della quantità di moto del sistema. Prima dell'urto $b_o = mv_o L/2$ mentre dopo l'urto $b_o = I_o\omega$ dove $I_o = m(L/2)^2 + ML^2/3$ =0.033kgm^2. Dalla conservazione di b_o si ottiene la velocità angolare iniziale $\omega_o = mv_o L/2I_o = 6v_o m/(3m+4M)L = 134.8\ rad/s$. Appena dopo l'urto la barra si sposta dalla posizione di equilibrio instabile *(a)* e si rovescia oscillando intorno alla posizione di equilibrio stabile *(b)*. Durante la rotazione l'energia meccanica totale si conserva per cui $U_a + T_a = U_b + T_b$. Fissando come riferimento dell'energia potenziale quello dello stato *(b)*, si ha ovviamente $U_b = 0$ mentre $U_a = (m+M)gL$ (dopo l'urto nel centro di massa si concentra la massa complessiva $m+M$). L'espressione dell'energia cinetica di pura rotazione intorno ad O è invece $T = I_o\omega^2/2$.

Imponendo la conservazione dell'energia meccanica si ha quindi $I_o\omega_o^2/2+(m+M)gL = I_o\omega_b^2/2$ da cui la velocità angolare in (b) vale $\omega_b = \sqrt{\omega_o^2 + 2(m+M)gL/I_o}$ *=135.5 rad/s.*