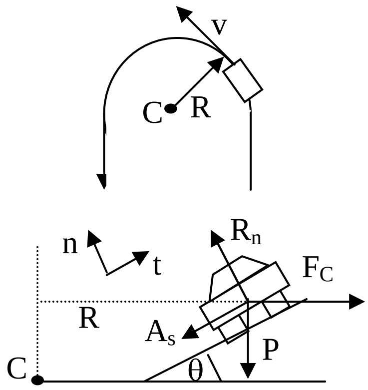
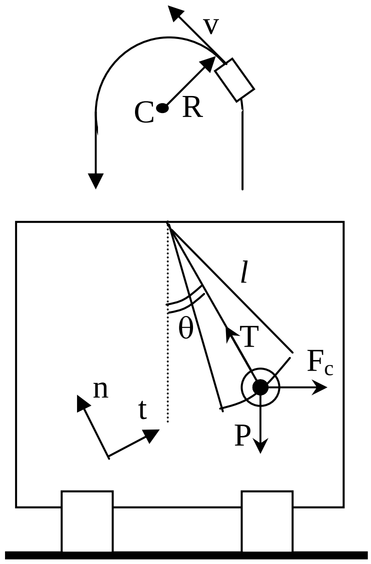
FISICA

A.A. 2007-2008
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 6°prova



1. Nel sistema di riferimento non inerziale solidale al guidatore, la macchina è soggetta a *4* forze: la forza peso $P=mg$ diretta lungo la verticale, la reazione normale R_n lungo la normale n, la forza centrifuga $F_c=mv^2/R$ lungo la radiale, la forza di attrito statico A_s lungo l'asse tangenziale t. Nel sistema solidale al guidatore l'auto è ferma e le 4 forze si equilibrano $\vec{P}+\vec{F}_c+\vec{R}_n+\vec{A}_s=0$. Proiettando l'equazione lungo gli assi n,t otteniamo: imponendo l'equilibrio lungo n si ottiene il valore di $R_n = P\cos\theta + F_c sin\theta$, mentre lungo t si ottiene l'attrito richiesto $A_s = F_c\cos\theta - P sin\theta$. A posteriori imponiamo che l'attrito richiesto sia inferiore a quello massimo $A_s \le A_{max} = \mu_s R_n$ da cui

$\mu_s \ge A_s/R_n = (F_c\cos\theta - P sin\theta)/(F_c sin\theta + P\cos\theta) = \left(v^2/R - gtg\theta\right)/\left(v^2 tg\theta/R + g\right)$ ossia $\mu_s \ge 0.8$ valore molto elevato! Se la curva fosse stata inclinata di 30° il valore sarebbe stato $\mu_s \ge 0.336$



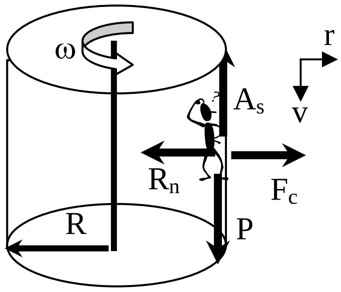
2. Nel sistema di riferimento non inerziale solidale al treno, il pendolo è soggetto a 3 forze: la forza peso $P=mg$ diretta lungo la verticale, la tensione del filo T lungo la normale n, la forza centrifuga $F_c=mv^2/R$ lungo l'orizzontale. Queste forze si equilibrano $\vec{P}+\vec{F}_c+\vec{T}=0$ per un determinato angolo θ_{eq}. Il valore di θ_{eq} si ricava proiettando le forze lungo l'asse tangenziale t ($F_c\cos\theta - P sin\theta = ma_t$) ed imponendo per la statica $a_t=0$ da cui $tg\theta_{eq} = F_c/P = v^2/gR$. Nel caso dinamico invece $a_t = l\cdot d^2\theta/dt^2$ e l'equazione per la dinamica può scriversi come segue

$$P\left(\frac{F_c}{P}\cos\theta - sin\theta\right) = P\left(\frac{sin\theta_{eq}}{\cos\theta_{eq}}\cos\theta - sin\theta\right) = -\frac{mg}{\cos\theta_{eq}} sin\left(\theta-\theta_{eq}\right) = ml\, d^2\theta/dt^2$$

Introducendo l'angolo differenza $\tilde{\theta} = \theta - \theta_{eq}$, per cui $d^2\tilde{\theta}/dt^2 = d^2\theta/dt^2$, possiamo ritrovare l'equazione differenziale del pendolo in $\tilde{\theta}$ che per piccole oscillazioni $sin\tilde{\theta} \cong \tilde{\theta}$, si riscrive $d^2\tilde{\theta}/dt^2 + \left(\frac{g}{l\cos\theta_{eq}}\right)\tilde{\theta}$, che dà luogo ad oscillazioni con periodo

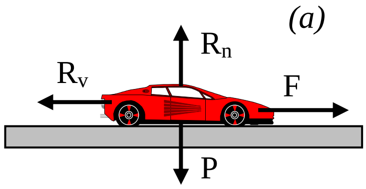
$\tilde{T} = 2\pi\sqrt{l\cos\theta_{eq}/g} = T_o\sqrt{\cos\theta_{eq}} = T_o\Big/\sqrt[4]{1+tg^2\theta_{eq}}$ dove sono dati $T_o=1s$ e $\tilde{T}=0.992s$ ossia i periodi rispettivamente senza e con forza centrifuga. Invertendo l'ultima relazione si ottiene $tg\theta_{eq} = \sqrt{\left(T/\tilde{T}\right)^4 - 1}$ da cui si ottiene il valore del raggio di curvatura

$$R = v^2\Big/\left(g\cdot tg\theta_{eq}\right) = v^2\Big/\left(g\cdot\sqrt{\left(T/\tilde{T}\right)^4-1}\right) = 724 \text{ m.}$$

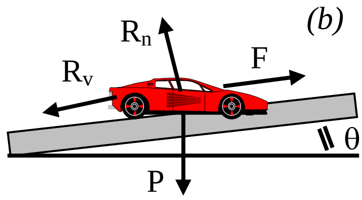


3. Quando il dispositivo *Rotor* è posto in rotazione a velocità angolare ω, il sistema solidale all'uomo appoggiato alla parete è non inerziale. Le forze che agiscono sull'uomo sono le seguenti: lungo l'asse radiale r la forza centrifuga $F_c=m\omega^2R$ che tende a schiacciare l'uomo sulla parete e la reazione della parete R_n a controbilanciare; lungo la verticale v la forza peso

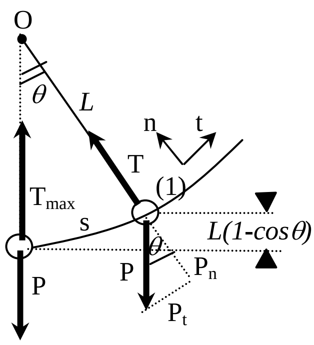
P diretta verso il basso, l'attrito statico A_s fornito dalla parete a contrastare il peso e la reazione del pavimento che però viene tolta dopo breve tempo. L'uomo si trova in equilibrio se $\begin{matrix} \hat{r} \\ \hat{v} \end{matrix}\begin{cases} F_c - R_n = 0 \\ P - A_s = 0 \end{cases}$ da cui si ricava il valore $R_n=F_c= m\omega^2 R$. Dalla seconda si ricava invece l'attrito richiesto per impedire il moto $A_s = P = mg$ che deve essere inferiore o al limite uguale a quello massimo consentito $A_s = P = mg \le A_{\max} = \mu_s R_n = \mu_s m\omega^2 R$. Da questa disequazione si ricava facilmente $\omega \ge \sqrt{g/\mu_s R}$ =2.47 rad/s.



4. Nel caso *(a)* del moto in piano la forza motrice sviluppa una potenza $W=F\,v$. Il valore della forza motrice è quindi $F=W/v$. Ad essa si oppone una forza resistente $R_v=b\,v$. A regime, quando la velocità tende ad assumere un valore costante, queste due forze diventano uguali e contrarie da cui si ricava il valore della velocità limite $v = \sqrt{W/b} = 35.4 m/s$ (si noti come peso e reazione normale non intervengano nel problema). Quando invece l'auto si muove sul piano inclinato *(b)*, sull'asse del moto oltre alla forza motrice $F=W/v$ ed alla forza resistente $R_v=b\,v$, interviene anche la componente tangenziale della forza peso $Mg\,sin\theta$ che ne ostacola il moto. A regime le tre forze si equilibrano per cui $W/v=bv+Mgsin\theta$. Si trova così una equazione di secondo grado $v^2 + (Mgsin\theta/b)v - W/b = 0$ che ha una sola soluzione accettabile $v = \sqrt{W/b + (Mgsin\theta/2b)^2} - (Mgsin\theta/2b)$. Sostituendo il valore di $\theta = arc\tan(0.1) = 5°43'$ si ottiene il valore ridotto di velocità $v=22.14$ *m/s.*



5. La massa appesa al filo subisce due forze: la sua forza peso $P=mg$ lungo la verticale, e la tensione T diretta lungo il filo. Applicando il II principio alla massa nella generica posizione (1), dopo la consueta scomposizione secondo gli assi n,t si ottiene il sistema $\begin{matrix} \hat{n} \\ \hat{t} \end{matrix}\begin{cases} T - P_n = ma_n \\ -P_t = ma_t \end{cases}$ dove $P_n=mgcos\theta$, $P_t=mgsin\theta$, l'accelerazione tangenziale vale $a_t = d^2s/dt^2$, quella normale vale $a_n = v^2/L$. La tensione del filo si ricava dalla prima equazione da cui



$T(\theta) = mg\cos\theta + mv^2/L$. Il valore della velocità si ottiene con considerazioni di tipo energetico:
Nel punto (1) il pendolo si trova ad una quota h=L(1-cosθ) rispetto al livello di riferimento. Conseguentemente l'energia potenziale vale $U_1 = mgL(1-\cos\theta)$, in quel punto il pendolo ha anche energia cinetica $T_1 = mv^2/2$. L'energia meccanica del pendolo è quindi $E_{m1} = mgL(1-\cos\theta) + mv^2/2$
Tale energia rimane costante durante tutta l'oscillazione e può essere determinata nel punto di massima oscillazione θ_{max} quando il pendolo si ferma per invertire il suo moto $E_m = mgL(1-\cos\theta_{\max})$. Eguagliando i termini si trova la velocità nel punto generico (1) $v(\theta) = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_{\max})}$ e da questa la tensione del filo $T(\theta) = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_{\max})$. La tensione minima si otterrà quando il pendolo si ferma $T(\theta_{\max}) = 3.35$ N , mentre la tensione massima si otterrà quando il pendolo passa per la verticale $T(0) = 22.7$ N. Un filo più sottile potrebbe spezzarsi prima. Imponendo $T(\theta) = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_{\max}) = T_{rottura}$ si ottiene $\theta_{rot} = \arccos(T_{rot}/3mg + 2\cos\theta_{\max}/3) =$ 24°44' mentre $v(\theta_{rot}) =$ **1.82m/s.**