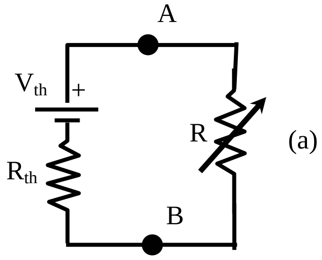
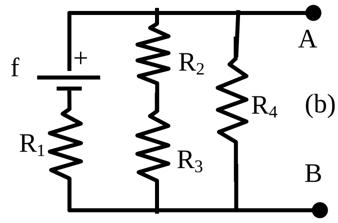
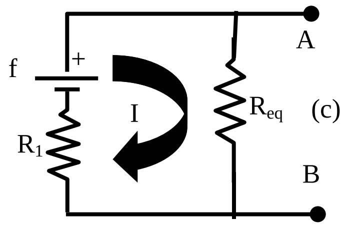
FISICA II

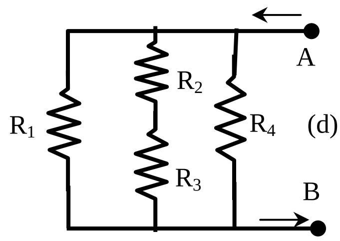
A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 5^a prova

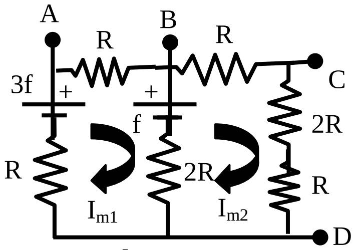


1. Il teorema di Thevenin viene applicato ai capi del resistore R sul quale si vuole calcolare la potenza dissipata. La rete a monte del resistore viene quindi ridotta ad un generatore equivalente di Thevenin V_{th} con in serie una resistenza di Thevenin R_{th} (figura a). Il calcolo della tensione equivalente di Thevenin si ottiene dalla differenza V_A-V_B a vuoto quando cioè A e B sono scollegati come in figura b. Le resistenze R_4 ed R_2+R_3 sono in parallelo ed equivalgono alla resistenza complessiva $\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_2+R_3}+\frac{1}{R_4}$ da cui R_{eq}=4 kΩ. La corrente di questo circuito (figura c) costituito da una sola maglia è quindi $I=\frac{f}{R_1+R_{eq}}$ da cui si ricava la tensione di Thevenin $V_{th}=V_A-V_B=IR_{eq}=6.67$ V. Il calcolo della resistenza equivalente di Thevenin si ottiene invece cortocircuitando il generatore di tensione ed inviando una corrente di prova al capo A per vedere come attraversa il circuito uscendo infine da B (figura d). Si può notare come i tre rami di resistenze R_1, R_2+R_3, R_4 sono attraversati in parallelo da cui $\frac{1}{R_{th}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2+R_3}+\frac{1}{R_4}$ e cioè R_{th}=1.33 kΩ. Dopo aver trovato i valori di V_{th} ed R_{th} ricolleghiamo tra A e B il resistore variabile R come in figura a. La corrente che attraversa il resistore è $I(R)=\frac{V_{th}}{R_{th}+R}$ che come è evidente è funzione di R. Conseguentemente anche la potenza dissipata sul resistore è funzione di R e vale $P(R)=I^2R=V_{th}^2\frac{R}{(R_{th}+R)^2}$. Dallo studio d funzione si ricava che la potenza è massima quando R=R_{th}=1.33 kΩ. Per questo valore la potenza vale $P=V_{th}^2/4R_{th}=8.34$mW.

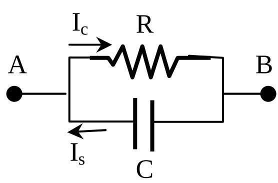




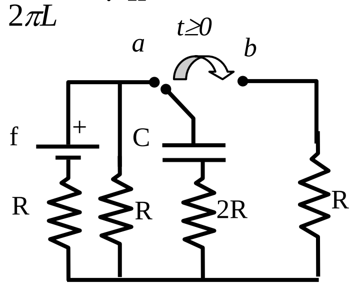




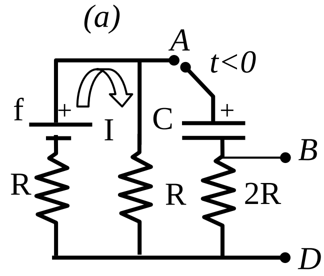
2. Il circuito è da lungo tempo nella configurazione in figura. Il processo di carica dei condensatori è da ritenersi completato; i condensatori possono essere assimilati a circuiti aperti dove non scorre corrente. Il circuito due maglie può essere risolto con il metodo delle correnti di maglia $\begin{pmatrix}4R & -2R\\ -2R & 6R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{m1}\\ I_{m2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2f\\ f\end{pmatrix}$ da cui $I_{m1}=\frac{7}{10}\frac{f}{R}$, $I_{m2}=\frac{4}{10}\frac{f}{R}$. Le differenze di potenziale ai capi dei condensatori si ottengono calcolando la caduta ohmica sui resistori che si trovano in parallelo ad essi e valgono rispettivamente $V_A-V_B=I_{m1}R=0.7f=3.5V$ ai capi di C_1, mentre $V_C-V_D=I_{m2}3R=1.2f=6V$ ai capi di C_2. Il rapporto di carica $\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{(V_A-V_B)C_1}{(V_C-V_D)C_2}=\frac{3.5\cdot 3}{6\cdot 5}=0.35.$



3. All'interno del condensatore considerato sono presenti due correnti: la corrente di conduzione ohmica a causa della resistività finita del dielettrico, e la corrente di spostamento che si avrebbe anche in un condensatore ideale. Il condensatore è quindi schematizzabile con un condensatore ideale con in parallelo un resistore a rappresentare le perdite ohmiche. Il circuito RC si scarica conun tempo caratteristico τ=RC dove per un condensatore cilindrico di lunghezza L e raggi delle armature R_1 (interno) ed R_2 (esterno) la capacità vale $C = \varepsilon \dfrac{2\pi L}{\ln(R_2/R_1)}$, la resistenza $R = \rho \int_{R_1}^{R_2} \dfrac{dr}{S} = \rho \int_{R_1}^{R_2} \dfrac{dr}{2\pi r L} = \rho \dfrac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi L}$. Il tempo caratteristico $\tau=\rho\varepsilon$ è quindi indipendente dai parametri geometrici.

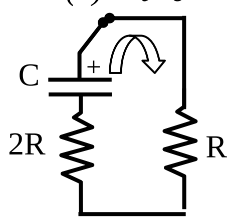


(a)



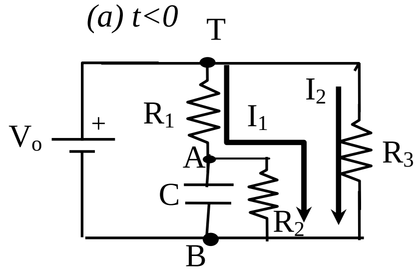
(b)

t>0

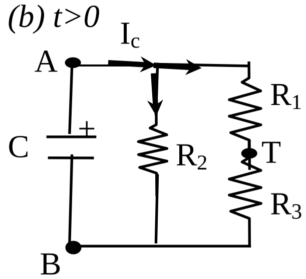


4. Per lungo tempo, prima di *t=0*, la topologia del circuito è quella della configurazione (*a*). Il processo di carica nel condensatore procede con una corrente di carica che diminuisce gradualmente fino ad annullarsi dopo lungo tempo. Quindi poco prima di *t=0* non scorre corrente né nel condensatore né sulla resistenza *2R*. La corrente circola quindi solo nella prima maglia dove $I = f/(R+R)$. Tale corrente crea sul resistore del ramo centrale una caduta di tensione ohmica $V_A - V_D = RI = f/2$. D'altra parte sul terzo ramo l'assenza di corrente fa sì che siano uguali i due potenziali $V_B=V_D$. Conseguentemente la tensione ai capi del condensatore vale $\Delta V_c = V_A - V_B = V_A - V_D = f/2$ cui corrisponde il valore di energia immagazzinata $U = (\Delta V_c)^2 C/2 = f^2 C/8$. Quando per *t=0* la topologia del circuito diviene quella della configurazione (*b*) il condensatore subisce un processo di scarica che parte dal valore di energia immagazzinata del caso precedente $U_{in} = f^2C/8$=50µJ e lo porta progressivamente a zero $U_{fin} = 0$ per $t \to \infty$. La dinamica del processo di scarica avviene con un tempo caratteristico $\tau = 3RC$ e con una legge di decadimento esponenziale della tensione sul condensatore $\Delta V_c(t) = (f/2)\cdot e^{-t/\tau}$ che partendo dal valore *f/2* tende progressivamente ad annullarsi. Al tempo t_o l'energia immagazzinata si dimezza divenendo $U(t_o) = f^2C/16$ cui corrisponde la tensione $\Delta V_c(t_o) = f/\sqrt{8}$. Il tempo tempo t_o si ricava come segue: $\Delta V_c(t_o) = (f/2)\cdot e^{-t_o/\tau} = f/\sqrt{8}$, da cui $e^{-t_o/\tau} = 1/\sqrt{2}$, e quindi $t_o = \tau \ln\sqrt{2} = 3RC\ln\sqrt{2} = 1.04\text{ms}$.

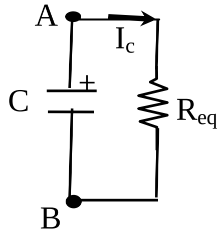
(a) t<0



(b) t>0



(schema equivalente)



5. Prima dell'apertura dell'interruttore per *t<0* (figura *a*) il circuito è in condizione stazionaria, il condensatore è carico e si comporta come un circuito aperto. La batteria, posizionata fra i punti *T* e *B*, alimenta le due correnti $I_1 = V_o/(R_1+R_2)$ =*1mA* ed $I_2 = V_o/R_3 = 2\text{mA}$. La differenza di potenziale ai capi del condensatore $\Delta V_c = V_A - V_B$ coincide con la caduta di potenziale ohmica ai capi della resistenza R_2 da cui $\Delta V_c = V_A - V_B = I_1R_2 = V_o(R_2/(R_1+R_2)) = 3V_o/4 = 6V$ che rappresenta la tensione ai capi del condensatore all'apertura ΔV_o (*t=0*). Dopo l'apertura dell'interruttore la batteria V_o viene scollegata ed il condensatore si scarica sulle 3 resistenze (vedi figura *b*) che vengono viste dal condensatore come una resistenza equivalente $R_{eq} = (R_1+R_3)//R_2 = \dfrac{(R_1+R_3)R_2}{R_1+R_2+R_3} = 3k\Omega$ (Infatti la corrente del condensatore I_c si ripartisce in una corrente che attraversa R_2 ed un'altra che attraversa in serie R_1 ed R_3). La tensione ai capi del condensatore per t>0 segue la legge $\Delta V_c(t) = \Delta V_o \exp[-t/\tau]$ dove il tempo di scarica $\tau = R_{eq}C = 3ms$ ed il tempo *t** si trova dalla relazione $t^* = \tau\ln(\Delta V_o/\Delta V^*) = \tau\ln(4) = 4.16\text{ ms}$.