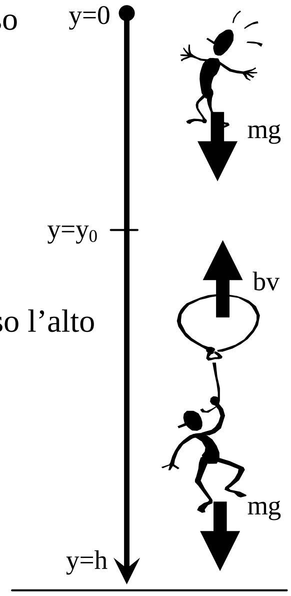
FISICA

A.A. 2007-2008
Ingegneria Gestionale
Soluzioni 5° prova



1. Inizialmente il paracadutista si muove di moto uniformemente accelerato verso il basso con accelerazione di caduta g. Le grandezze cinematiche sono quindi

$$\begin{cases} y(t) = gt^2/2 \\ v_y(t) = gt \\ a_y = g \end{cases} \quad \text{dopo un tempo } t_o\text{=12 s quindi} \quad \begin{cases} y_o = y(t_o) = 705m \\ v_o = v(t_o) = 117\, m/s \\ a_y = g \end{cases}$$

Nella seconda fase, aperto il paracadute, nasce una reazione frenante diretta verso l'alto

$$ma_y = mg - bv_y \quad \text{da cui si ricava l'eq.diff.} \quad \frac{dv_y}{v_y - \left(\frac{mg}{b}\right)} = -\left(\frac{b}{m}\right)dt \quad \text{per } t>t_o$$

con soluzione $$v_y(t) = \left(\frac{mg}{b}\right) + \left(v_o - \frac{mg}{b}\right)\exp\left[-\left(\frac{b}{m}\right)(t - t_o)\right]$$

mentre lo spaio percorso si ottiene dalla $v(t) = \dfrac{dy}{dt}$ da cui $y(t) = y_o + \displaystyle\int_{to}^{t} v(t)dt$

Dopo alcuni passaggi si ottiene $$y(t) = y_o + \left(\frac{mg}{b}\right)(t - t_o) + \left(v_o - \frac{mg}{b}\right)\frac{m}{b}\left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{b}{m}\right)(t - t_o)\right]\right\}$$

Al tempo $t=t_o+5s=17s$ si ottiene **y(t)=983.5 m**.
E' possibile infine stimare il tempo di volo **t*=42.5 s** al quale **y(t*)=1500m** ricorrendo ad alcune tecniche dell'analisi matematica o più semplicemente provando ad approssimare sempre meglio t* fornendo delle stime per eccesso e per difetto. La velocità di atterraggio è **v(t*)=19.6 m/s**

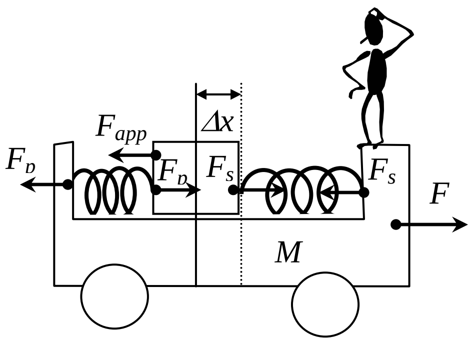
2. L'esercizio varia dal precedente solo nella seconda parte del moto in cui

$$ma_y = mg - cv_y^2 \quad \text{da cui l'eq.diff.} \quad \frac{dv_y}{v_y^2 - \left(\frac{mg}{c}\right)} = \frac{dv_y}{2\sqrt{\frac{mg}{c}}}\left(\frac{1}{v_y - \sqrt{\frac{mg}{c}}} - \frac{1}{v_y + \sqrt{\frac{mg}{c}}}\right) = -\left(\frac{c}{m}\right)dt \quad t>t_o$$

con soluzione $$v_y(t) = \sqrt{\frac{mg}{c}}\,\frac{1 - A\exp\left[-2\sqrt{\frac{gc}{m}}(t - t_o)\right]}{1 + A\exp\left[-2\sqrt{\frac{gc}{m}}(t - t_o)\right]} \quad \text{ove} \quad A = \frac{v_o - \sqrt{\frac{mg}{c}}}{v_o + \sqrt{\frac{mg}{c}}}$$

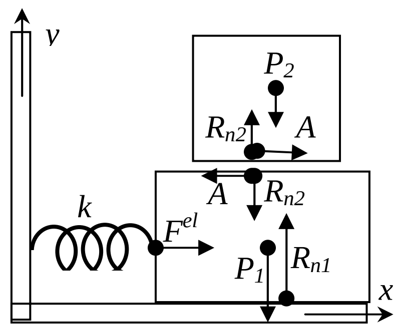
Con metodi analoghi a quanto descritto nel primo problema si trova per **t=17s** **y(t)=774.7 m**
Il paracadutista tocca terra al tempo **t*=59.3 s** con velocità **v(t*)=17.1 m/s**

3. Le due molle in parallelo sulla sinistra sono equivalenti ad una unica molla di costante elastica k_p=k+3k=4k=8N/m, mentre le due molle in serie sulla destra sono equivalenti ad una unica molla k_s=(4k*4k)/(4k+4k)=2k=4N/m. La forza esterna F causa una accelerazione a_t del carrello. La massa interna si trova quindi in un sistema non inerziale. Un osservatore in tale riferimento vede la massa spostarsi indietro di una quantità Δx rispetto alla posizione di equilibrio. Per spiegarsi tale spostamento l'osservatore deve applicare il II principio



aggiungendo alle forze reali una forza apparente $\vec{F}_{app} = -m\vec{a}_t$ contraria al moto. Le forze agenti sulla massa m sono: sulla verticale la reazione normale R_n che equilibra la forza peso P; sull'orizzontale le due forze elastiche entrambe dirette nel verso del moto e di valore $F_{p/s} = k_{p/s}\Delta x$ dipendente della costante elastica $k_{p/s}$, la forza apparente $F_{app} = ma_t$ contraria al moto. Queste forze si equilibrano e la massa m rimane in quiete. La condizione $F_p + F_s = F_{app}$ si scrive $\left(k_p + k_s\right)\Delta x = ma_t$ dalla quale non è però possibile ricavare Δx senza conoscere a_t. Si applichi ora il II principio al carrello. Lungo l'asse orizzontale c'è la forza F e le forze elastiche delle due molle agenti sulle pareti del carrello, questa volta entrambe contrarie al moto. Il II principio si scrive $F - F_p - F_s = Ma_t$. Riassumendo le due equazioni della massa e del carrello sono $\begin{cases} \left(k_p + k_s\right)\Delta x = ma_t \\ F - \left(k_p + k_s\right)\Delta x = Ma_t \end{cases}$ da cui si ricava $a_t = F/\left(m+M\right)$, e $\Delta x = Fm/\left[\left(k_p + k_s\right)\left(m+M\right)\right]$=2 cm

4. Lo studio dinamico verrà inizialmente applicato al sistema formato dalle due masse, la n.1 in basso e la n.2 in alto. Elenchiamo ora le forze esterne al sistema: le forze peso $P_1=Mg$ e $P_2=mg$ di entrambe le masse (applicate nei rispettivi baricentri), la forza elastica $F_{el}=k\Delta l$ fornita dalla molla alla massa n.1, la reazione normale R_{n1} che sostiene la massa n.1. Tutte le altre forze di attrito A e di reazione normale R_{n2} fra le due masse, sono forze interne del sistema. La loro peculiarità è che agiscono in un verso sulla massa n.1 e nel verso opposto sulla n.2. La somma vettoriale per il principio di azione e reazione è quindi nulla e non influisce sul moto del centro di massa che dipende dalle sole forze esterne P_1, P_2, F_{el} ed R_{n1}.



L'accelerazione del sistema vale $a_C = k\Delta l/\left(M+m\right)$

(come si può ricavare dalla prima equazione cardinale proiettata lungo x $F_{el} = k\Delta l = (M+m)a_C$)

Proiettando le forze agenti sul corpo n.2 lungo x si ottiene $A = ma_2 \le A_{\max} = \mu_s R_{n2} = \mu_s mg$

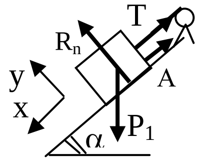
Da cui l'**accelerazione del corpo n.2 vale al massimo** $a_2 \le \mu_s g$

Imponendo che le accelerazioni siano uguali per impedire movimenti relativi $a_c = a_2 \Rightarrow k\Delta l/\left(M+m\right) \le \mu_s g$ da cui $m \ge \dfrac{k\Delta l}{\mu_s g} - M = \mathbf{2.38\ kg}$

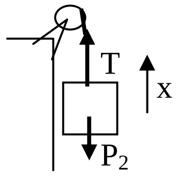
Il periodo delle oscillazioni libere è $T = 2\pi\sqrt{\left(m+M\right)/k} = \mathbf{1.59\ s}$

1. Analisi delle forze

$\begin{cases} x) \quad P_1 \sin\alpha - T - A = m_1 a \\ y) \quad R_n - P_1 \cos\alpha = 0 \end{cases}$



$\{x) \quad T - P_2 = m_2 a$



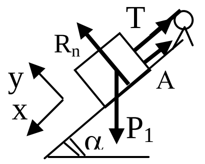
combinando le equazioni lungo gli assi del moto si ottiene per l'accelerazione e la tensione

$$\begin{cases} a = g\dfrac{m_1(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2} = 0.602\, m/s^2 \\ T = m_2(g + a) = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g(1 + \sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) = 20.8N \end{cases}$$

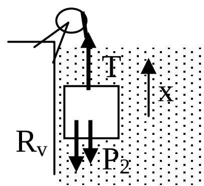
Il moto è uniformemente accelerato, e la velocità vale al tempo t* : $v(t^*) = at^* = \mathbf{3.1\ m/s}$

Facoltativo: Aggiungiamo la forza di resistenza passiva $\vec{R}_v = -b\vec{v}$ che agisce sul secondo blocco

$$\begin{cases} x) \quad P_1\sin\alpha - T - A = m_1 a \\ y) \quad R_n - P_1\cos\alpha = 0 \end{cases}$$



$$\{x) \quad T - P_2 - R_v = m_2 a$$

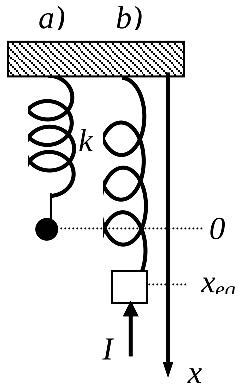


Combinando le equazioni

$$a = -\frac{b}{m_1 + m_2} v + g\frac{m_1(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2}$$

$$v(t) = v_{\lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad \text{dove } v_{\lim} = g\frac{m_1(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) - m_2}{b} = \mathbf{0.602\ m/s}, \quad \tau = \frac{m_1 + m_2}{b} = \mathbf{1\ s}$$

$$v(t^*) = v_{\lim}\left(1 - e^{-t^*/\tau}\right) = v_{\lim}\left(1 - e^{-5}\right) = \mathbf{0.598\ m/s}$$



5. L'asse *x* è orientato lungo la verticale facendo coincidere *x=0* con la posizione a riposo dell'estremo libero della molla (a). Quando viene applicata la massa *m* il sistema subisce un allungamento statico raggiungendo una nuova posizione di equilibrio $x_{eq}=L=mg/k$. Quando si applica un impulso verso l'alto (negativo) questo porta ad oscillazioni del tipo

$$\begin{cases} x(t) = x_{eq} - A\sin(\omega t) \\ v(t) = -A\omega\cos(\omega t) \end{cases}$$

dove si è scelto la funzione seno perché nulla al tempo t=0, con verso negativo perché la velocità iniziale data dall'impulso sarà contraria all'asse x. Infatti l'impulso produrrà una variazione di quantità di moto $I_x = mv_x(0) = -mA\omega$

da cui si ricava $A = \dfrac{-I}{m\omega} = \dfrac{-I}{\sqrt{mk}} =$ **7.1 cm,** mentre il periodo $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ =**4.44 s**

In regime di oscillazioni forzate, esaurito il transitorio la molla oscillerà con una ampiezza $A(\omega) = \dfrac{F}{\sqrt{m^2(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$. Il valore dell'ampiezza varia con il periodo forzante: A(2s) =6.4 cm , **A(4s) =107 cm**, **A(4.5 s) =982 cm**, **A(5s) =118cm**, A(10s) =31 cm. Si noti come nelle vicinanze della frequenza di risonanza le oscillazioni si rafforzano incredibilmente al punto da prevedere teoricamente oscillazioni irrealistiche dell'ordine del metro!