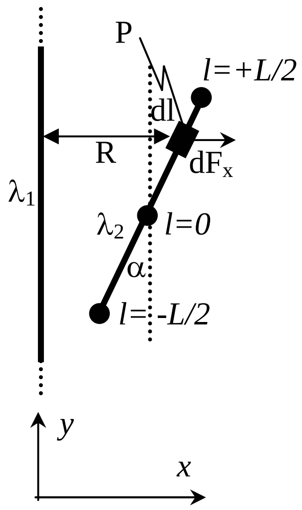
FISICA II

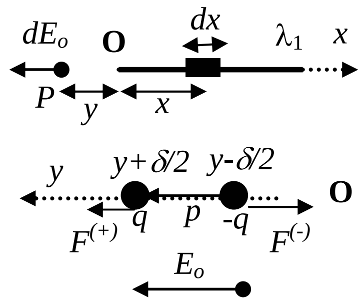
A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 4ª prova



1. Il campo elettrico generato dal filo infinitamente lungo può essere facilmente determinato applicando la legge di Gauss. Nel punto generico *P* (sulla barretta), a distanza *R* dal filo, il campo vale $E_o(x=R)=\dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_o R}$ con direzione lungo l'asse delle *x*. La forza elettrica cui è sottoposto l'elemento *dl* della barretta, sul quale è presente una carica $dq=\lambda_2 dl$, vale quindi $dF_x = E_o dq = E_o\lambda_2 dl = \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o R}dl$ con direzione lungo l'asse *x*. La forza totale, dovuta al filo, e agente sulla barretta si ottiene integrando i contributi infinitesimi dF_x su tutta la barretta. Si noti come *R* non sia costante ma vari con legge $R(l)=d+l\sin(\alpha)$ dove *l* è l'ascissa introdotta sulla barretta che varia da *–L/2* ad *L/2*. La forza totale risulta quindi

$$F_x = \int dF_x = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dl}{d+l\sin(\alpha)} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o \sin(\alpha)}\ln\left(\frac{d+L\sin(\alpha)/2}{d-L\sin(\alpha)/2}\right)=$$

$$=\frac{10^{-8}\times 10^{-7}}{2\pi\dfrac{10^{-9}}{36\pi}\times\dfrac{1}{2}}\ln\left(\frac{20+1.25}{20-1.25}\right)=36\times 10^{-6}\times 0.125 = 4.5\times 10^{-6}\,N$$

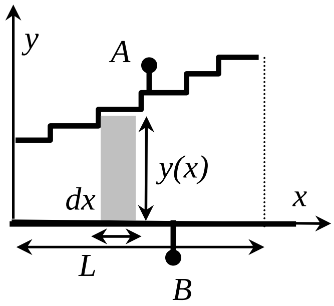


2. Alla distanza generica *x* dall'origine *O* si trova la carica $dq=\lambda_1 dx$ che genera il contributo di campo elettrico $dE_O = \lambda_1 dx\big/4\pi\varepsilon_O(x+y)^2$ nel punto *P* a distanza *y* dall'origine. Tale contributo diretto lungo l'asse *y* (contrario all'asse x) quando integrato lungo tutto il semiasse positivo delle *x* fornisce un valore complessivo di campo elettrico pari a $E_O=\int dE_O = \dfrac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_O}\int_0^{\infty} dx\big/(x+y)^2 = \dfrac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_O y}$. La forza cui è sottoposto un dipolo *p* a distanza *y* dall'origine O si può determinare a partire dall'energia configurazionale del dipolo $U=-\vec{p}\cdot\vec{E}_O = -\dfrac{\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_O y}$, calcolandone il gradiente rispetto alla coordinata *y* libera del dipolo: $F_y = -grad_y U = \dfrac{d}{dy}\dfrac{\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_o y} = -\dfrac{\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_o y^2} = -\dfrac{9\cdot 10^9\cdot 10^{-6}10^{-9}}{\left(10^{-1}\right)^2} = -9\cdot 10^4 N$

. La forza è quindi contraria all'asse y risultando quindi attrattiva diretta verso il filo uniformemente carico. Alternativamente tale forza può essere determinata come risultante della forza agente sulla carica positiva del dipolo $F^{(+)}$ posizionata in $y+\delta/2$ e della forza agente sulla carica negativa del dipolo $F^{(-)}$ posizionata in $y+\delta/2$. La risultante delle due forze vale quindi $F_y = F^{(+)}+F^{(-)} =$

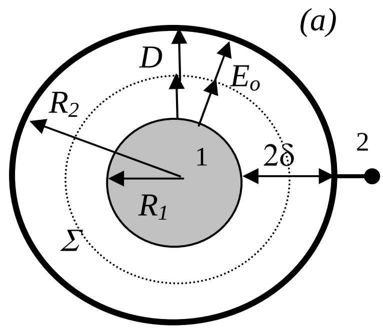
$$= q\frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o(y+\delta/2)} - q\frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o(y-\delta/2)} = \frac{-q\lambda_1\delta}{4\pi\varepsilon_o\left(y^2-(\delta/2)^2\right)} \cong \frac{-\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_o y^2}$$

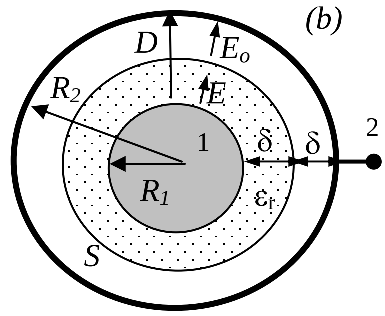
3. L'armatura obliqua superiore A può pensarsi scomponibile in una serie infinita di gradini di lunghezza dx ed altezza dy. Ciascun gradino forma con l'armatura inferiore B un condensatore piano (regione grigia) di sezione adx, e capacità $dC = \varepsilon_O\, adx/y$, dove la distanza fra le armature è variabile $y(x) = d + x \cdot tg\beta$. La capacità dell'intera struttura è data dalla somma di tutte le capacità dC di tutti gli infiniti condensatori piani in parallelo, da cui si ottiene



$$C = \int dC = \int_0^L \varepsilon_O \frac{a}{y} dx = \varepsilon_O a \int_0^{a\cos\beta} \frac{dx}{d + x \cdot tg\beta} = \frac{\varepsilon_O a}{tg\beta}\left[\ln\left|d + x \cdot tg\beta\right|\right]_0^{a\cos\beta} = \frac{\varepsilon_O a}{tg\beta}\ln\left(1 + \frac{a\sin\beta}{d}\right)$$

4. In un condensatore sferico in presenza o meno del dielettrico (casi *a,b*) le linee di forza del campo elettrico E *e* dello spostamento elettrico D sono sempre radiali dirette dalla carica positiva $+Q_{lib}$ verso la carica negativa $-Q_{lib}$. Di particolare interesse è il vettore spostamento elettrico D. Il suo flusso uscente dalla superficie sferica Σ di raggio $R_1<r<R_2$ dipende dalla sola carica libere interna $+Q_{lib}$ Quindi $\Phi_\Sigma(\vec{D}) = \int_\Sigma \vec{D} \bullet \hat{n}_{ext} dS = D(4\pi r^2) = Q_{lib}$, da cui si ricava l'espressione del vettore spostamento elettrico $D(r) = Q_{lib}/4\pi r^2$ valida per tutti i punti interni del condensatore ($R_1<r<R_2$). Si noti come l'espressione non risenta della presenza del dielettrico e sia valida in entrambi i casi *a,b*. Il campo elettrico invece ha due valori diversi: nel vuoto vale $E_o(r) = D(r)/\varepsilon_o = Q_{lib}/4\pi\varepsilon_o r^2$ mentre in presenza di dielettrico si abbassa al valore $E(r) = D(r)/\varepsilon_o\varepsilon_r = Q_{lib}/4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r r^2$. In generale la differenza di potenziale fra i due conduttori si ottiene integrando il campo elettrico lungo un percorso radiale da R_1 ad R_2; nel caso *(a)* in assenza di dielettrico si ottiene $V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E_o dr = \frac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o}\frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2}$ dove è stato integrato il campo elettrico nel vuoto E_o. Nel caso *(b)* invece il valore di E nel dielettrico si abbassa riducendo complessivamente la differenza di potenziale



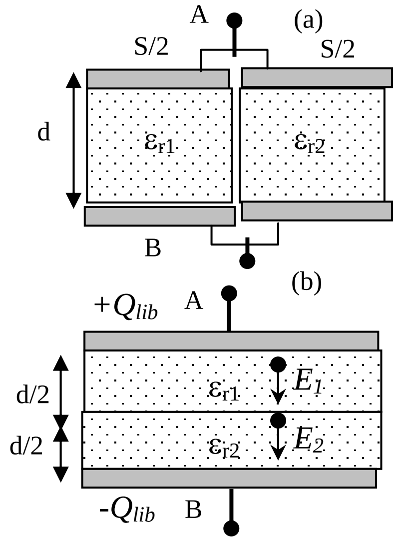


$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_1+\delta} E dr + \int_{R_1+\delta}^{R_2} E_0 dr = \frac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o}\left(\int_{R_1}^{R_1+\delta}\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{dr}{r^2} + \int_{R_1+\delta}^{R_2}\frac{dr}{r^2}\right) = \frac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\delta}{R_1\cdot(R_1+\delta)} + \frac{R_2 - R_1 - \delta}{(R_1+\delta)\cdot R_2}\right).$$

Imponendo che il rapporto fra le due differenze di potenziale (caso *b*/caso *a*) debba valere 0.8 si ricava il valore di ε_r: $\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\delta}{R_1\cdot(R_1+\delta)} + \frac{\delta}{(R_1+\delta)\cdot R_2} = 0.8\frac{2\delta}{R_1 \cdot R_2}$ da cui semplificando per δ,

$$\frac{1}{\varepsilon_r} = R_1\cdot(R_1+\delta)\left[\frac{1.6}{R_1\cdot R_2} - \frac{1}{(R_1+\delta)\cdot R_2}\right] = R_1\cdot(R_1+\delta)\left[\frac{0.6R_1 + 1.6\delta}{(R_1+\delta)\cdot R_2 \cdot R_1}\right] = 0.6\frac{R_1}{R_2} + 1.6\frac{\delta}{R_2} = 0.7$$

da cui si ricava $\varepsilon_r = 1.43$. La carica libera si ricava dal valore di $\Delta V_o = 360\pi$ nel caso *(a)* da cui $Q_{lib} = 4\pi\varepsilon_o\Delta V_o\frac{R_1R_2}{2\delta} = 5.02\ 10^{-10}\ C$. Per determinare la carica di polarizzazione bisogna prima ricavare l'espressione del vettore intensità di polarizzazione nel dielettrico $P = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}D = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{Q_{lib}}{4\pi r^2}$. La carica di polarizzazione Q_{pol} sulla superficie S esterna del dielettrico si ottiene integrando su S la densità $\sigma_{pol} = \vec{P} \bullet \hat{n}_{ext} = \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} D$ ossia calcolando il flusso di P uscente da S che vale $Q_{pol} = \int_S \vec{P} \bullet \hat{n}_{ext} dS = \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \int_S \vec{D} \bullet \hat{n}_{ext} dS = \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} Q_{lib} = 0.3 Q_{lib} = 1.67 \quad 10^{-10}$ C. Ovviamente sulla superficie interna del dielettrico sarà posizionata una carica uguale e opposta $-Q_{pol}$ che rende complessivamente neutro il dielettrico



5. Un condensatore a facce piane e parallele ha nel vuoto capacità $C_o = \varepsilon_o S/d$ dove S è la sua sezione e d la distanza fra le armature. Quando viene riempito con due dielettrici di costanti dielettriche relative ε_{r1} ε_{r2} come in figura *a*, la capacità complessiva può pensarsi come il parallelo delle due capacità che competono ai due condensatori di metà superficie *S/2*:

$$C_a = C_1 + C_2 = \varepsilon_o \varepsilon_{r1} \frac{S/2}{d} + \varepsilon_o \varepsilon_{r2} \frac{S/2}{d} = \varepsilon_o \frac{S}{d}\left(\frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2}\right) = C_o\left(\frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2}\right) =$$

$=1.5\ C_o = 15\mu F$. Nel caso (*b*), posta sul conduttore A la carica Q_{lib}, i campi elettrici nei due dielettrici sono rispettivamente a $E_1 = \sigma_{lib}/\varepsilon_o \varepsilon_{r1} = Q_{lib}/S\varepsilon_o \varepsilon_{r1}$ e $E_2 = Q_{lib}/S\varepsilon_o \varepsilon_{r2}$ (campi uniformi). La differenza di potenziale che si instaura fra le due armature è $V_A - V_B = \int_A^B E dl = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} = \frac{Q_{lib} d}{2S\varepsilon_o} \frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}$ e quindi la capacità si calcola dal rapporto $C_b = \dfrac{Q_{lib}}{V_A - V_B} = \varepsilon_o \dfrac{S}{d}\left(\dfrac{2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}\right) = C_o\left(\dfrac{2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}\right)$. E' facile dimostrare che vale sempre $C_a > C_b$. Infatti ciò corrisponde a $\left(\dfrac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2}\right) > \left(\dfrac{2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}\right)$ che semplificata porta a $\varepsilon_{r1}^2 - 2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r2}^2 > 0$ e quindi $(\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})^2 > 0$ che è sempre vera se $\varepsilon_{r1} \neq \varepsilon_{r2}$.