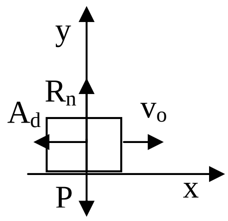
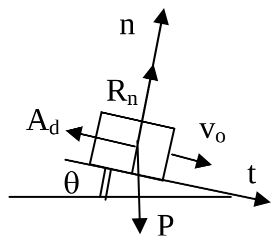
FISICA

A.A. 2007-2008
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 4° prova

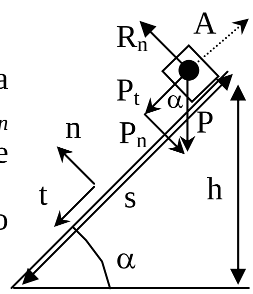
1. Studio della dinamica: sul pattinatore agiscono 3 forze, la forza peso P la reazione normale R_n e l'attrito dinamico A_d. Il peso e la reazione normale si equilibrano lungo l'asse y ($R_n=P=mg$). Lungo l'asse x rimane solo l'attrito dinamico $ma_x = -A_d = -\mu_d R_n = -\mu_d mg$, che è responsabile di una decelerazione costante $a_x=-\mu_d g$ (moto uniformemente ritardato). **Studio della cinematica**: integrando l'accelerazione si ottiene la velocità $v(t) = v_o - \mu_d gt$ (dove v_o è la velocità iniziale).



Integrando ulteriormente si ottiene lo spazio percorso $x(t) = v_o t - \mu_d gt^2/2$. L'istante di arresto si ottiene annullando la velocità $v(t^*)=v_o-\mu_d gt^*=0$ da cui $t^* = v_o/\mu_d g$; a quell'istante il pattinatore ha percorso lo spazio $s = x(t^*) = v_o^2/(2\mu_d g)$. Il valore di μ_d si ottiene invertendo l'espressione trovata $\mu_d = v_o^2/2gs = 0.043$. Nel caso di piano ghiacciato inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale le 3 forze vanno proiettate lungo gli assi normale (n) e tangenziale (t). Le equazioni sono quindi $\begin{matrix}\hat{n} \\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_n - mg\cos\theta = 0 \\ mg\sin\theta - A_d = ma_t \end{cases}$ dove la forza peso P è stata decomposta in P_t=mgsin(θ) e P_n=mgcos(θ). Dalla prima equazione ricaviamo $R_n = mg\cos\theta$, dalla seconda ricaviamo invece l'accelerazione di discesa



$a_t = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) = -0.2456$ che per θ=1° rimane ancora negativa (moto uniformemente ritardato). Il nuovo spazio percorso fino all'arresto diviene $s = v_o^2/2|a_t|$ =203.6 m. Inclinando ulteriormente il piano si può ottenere anche a_t=0 (moto rett. uniforme) per $\theta = \arctan(\mu_d) = 2°\ 26'$.



2. **Studio della dinamica**: in assenza di attrito le forze agenti sul blocco sono 2: la forza peso $P=mg$ diretta verticalmente e la reazione normale del piano inclinato R_n diretta lungo la normale n. Applicando il II principio e proiettando le forze sui due assi t ed n si ottiene $\begin{matrix}\hat{n} \\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_n - P_n = ma_n = 0 \\ P_t = ma_t \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} R_n = P_n = mg\cos\alpha \\ a_t = gsin\alpha \end{matrix}$ dove la forza peso è stata decomposta secondo le sue proiezioni lungo gli assi t ($P_t=Psin\alpha$) ed n ($P_n=Pcos\alpha$). **Studio della cinematica**: l'accelerazione di caduta è $a_t = gsin\alpha$ =*4.14 m/s*^{2} (moto unif. accelerato). Integrando la velocità vale $v(t) = a_t t$ (velocità iniziale nulla). Integrando lo spazio percorso è $s(t) = a_t t^2/2$. L'istante t^* al quale il blocco raggiunge la base del piano inclinato si ottiene imponendo $s(t^*)=a_t t^{*2}/2=s$ da cui $t^* = \sqrt{2s/a_t}$; allora il blocco raggiunge la velocità $v_{fin} = v(t^*) = a_t t^* = \sqrt{2sa_t} = \sqrt{2sgsin\alpha} = \sqrt{2gh}$ =*4.98 m/s* (h è l'altezza iniziale del blocco). La presenza dell'attrito modifica il sistema delle equazioni in $\begin{matrix}\hat{n} \\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_n - P_n = 0 \\ P_t - A = ma_t \end{cases}$. Dalla prima si ricava $R_n=P_n=mgcos\alpha$, mentre dalla seconda si chiarisce la natura dell'attrito (statico o dinamico). **Ipotesi statica**: Supponiamo che il corpo sia in quiete ($a_t=0$). Il valore dell'attrito necessario per garantire questo stato è $A_s=P_t=mgsin\alpha$. L'ipotesi è corretta se l'attrito richiesto risulta inferiore a quello massimo disponibile $A=P_t=mgsin\alpha\leq\mu_s R_n=\mu_s mgcos\alpha$ da cui $tg(\alpha) \leq \mu_s$ che porta all'assurdo $tg(25°) = 0.466 \leq 0.25$. L'ipotesi statica non è soddisfatta. Il corpo si muove con una accelerazione

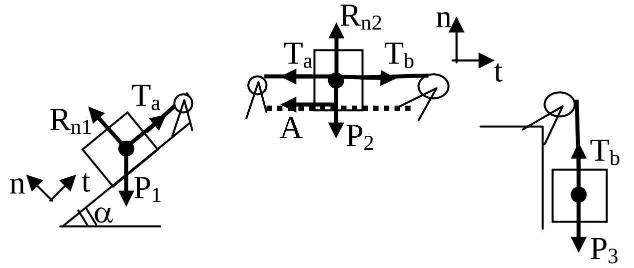
$a_t = (P_t - A_d)/m$ dove l'attrito dinamico vale $A_d = \mu_d R_n = \mu_d mg\cos\alpha$. Combinando le due espressioni si ottiene una accelerazione costante di valore $a_t = g(sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)$=*2.37 m/s²* (moto uniformemente accelerato). Le espressioni della velocità generica $v(t) = a_t t$, dello spazio percorso $s(t) = a_t t^2/2$, dell'istante t^* di fine corsa $t^* = \sqrt{2s/a_t}$ e della velocità finale $v_{fin} = v(t^*) = a_t t^* = \sqrt{2sa_t}$ sono analoghe al caso senza attrito. L'unica differenza è nel valore inferiore di a_t che porta alla velocità finale $v_{fin} = \sqrt{2sg(sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)} = 3.77$ *m/s.*

3. Il sistema rimane in equilibrio se la massa m_3 viene scelta nell'intervallo $M_{\min} \le m_3 \le M_{\max}$ Nel caso $m_3 > M_{\max}$ il sistema prende a muoversi verso destra. Nel caso $m_3 < M_{\min}$ il sistema prende a muoversi verso sinistra. I valori estremi M_{min}, M_{max} vengono calcolati imponendo l'equilibrio delle forze su ciascuna massa singolarmente. Nel caso in cui $P_3 > P_1\sin\alpha$ abbiamo

massa m_1 ; $\begin{cases} t) \quad T_a = P_1\sin\alpha \\ n) \quad R_{n1} = P_1\cos\alpha \end{cases}$

massa m_2 ; $\begin{cases} t) \quad T_b - T_a - A = 0 \\ n) \quad\quad R_{n2} = P_2 \end{cases}$

massa m_3 ; $T_b = P_3$

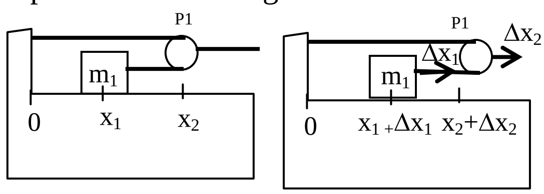


Si noti come in figura sia stato scelto un verso per la forza di attrito A corrispondente al caso $P_3 > P_1\sin\alpha$. Il verso di A è ovviamente opposto quando invece $P_3 < P_1\sin\alpha$. Combinando le equazioni si ottiene per la forza di attrito sul secondo blocco:

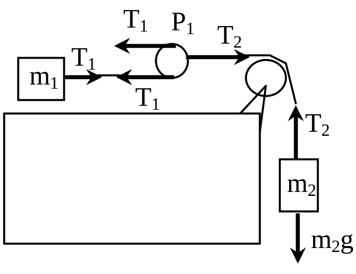
$$|A| = |T_b - T_a| = |P_3 - P_1\sin\alpha| \le A_{\max} = \mu_s R_{n2} = \mu_s P_2 \quad \text{che ha soluzione}$$

$$m_1\sin\alpha - \mu_s m_2 \le m_3 \le m_1\sin\alpha + \mu_s m_2 \quad \text{e quindi} \quad 1Kg \le m_3 \le 5Kg\ .$$

4. Ad uno spostamento Δx_2 della massa m_2 corrisponde un ugual spostamento della puleggia P_1 ed uno spostamento doppio $\Delta x_1 = 2\Delta x_2$ della massa m_1 . A questa conclusione si arriva imponendo che la lunghezza della fune che avvolge P_1 sia costante. Prima dello spostamento la lunghezza dei due tratti di fune è $x_2 + (x_2 - x_1) = 2x_2 - x_1 = L$



Dopo lo spostamento deve essere $2(x_2 + \Delta x_2) - (x_1 + \Delta x_1) = L$
Eguagliando la lunghezza della fune prima e dopo si ottengono le relazioni fra le grandezza cinematiche:
$\mathbf{\Delta x_1 = 2\Delta x_2}$, derivando $\mathbf{v_1 = 2v_2}$, e derivando ancora $\mathbf{a_1 = 2a_2}$

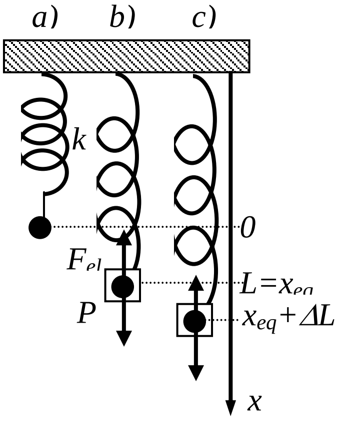


I valori delle tensioni delle funi si ottengono applicando il 2° principio
sulla massa m_2: $m_2 g - T_2 = m_2 a_2$
sulla massa m_1: $T_1 = m_1 a_1$
ed equilibrando le forze sulla puleggia: $T_2 = 2T_1$

da cui si derivano le accelerazioni: $a_2 = g\dfrac{m_2}{m_2 + 4m_1} = \mathbf{0.684\ m/s^2}$ $\quad a_1 = \mathbf{1.367\ m/s^2}$

ed i valori delle tensioni delle funi: $T_2 = \mathbf{27.3\ N}$, $\quad T_1 = \mathbf{13.7\ N}$

5. Si orienti l'asse x lungo la verticale facendo coincidere $x=0$ con la posizione a riposo dell'estremo libero della molla (a). Quando viene applicata la massa m il sistema subisce un allungamento statico raggiungendo una nuova posizione di equilibrio x_{eq} (b). Tale posizione si determina imponendo che la forza peso $P=mg$ e la forza di richiamo elastica $F_{el}=kx_{eq}$ si equilibrino da cui $x_{eq}=L=mg/k$. Dall'allungamento statico L si può quindi ricavare la costante elastica della molla $k=mg/L$. Se allunghiamo ulteriormente la massa di una quantità ΔL dalla nuova posizione di equilibrio (c), il sistema è fuori equilibrio, ed applicando il II principio si ha $ma_x = mg - kx$ da cui si arriva all'eq. diff. $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = g$ la cui soluzione è data dalla sovrapposizione dell'integrale generale dell'omogenea associata $x_{omo}(t) = A\cos(\omega_o t + \varphi)$ e dall'integrale particolare che



cerchiamo indipendente dal tempo $x_p = mg/k = L$ (si noti come l'integrale particolare coincida fortuitamente con l'allungamento statico). Nel nostro caso essendo la massa inizialmente ferma nella posizione $x(t=0)=L+\Delta L$ è facile ricavare i valori $A=\Delta L$ e $\phi=0$ per cui $x(t) = L + \Delta L\cos(\omega_o t)$ con $\omega_o = \sqrt{k/m} = \sqrt{mg/mL} = \sqrt{g/L}$. Il valore della frequenza delle oscillazioni vale quindi $f = 2\pi/\omega_o = 2\pi\sqrt{L/g} = 0.11Hz$. Per il calcolo dell'accelerazione basta derivare nel tempo due volte la funzione x(t) ottenendo $a(t) = -\Delta L\omega_o^2\cos(\omega_o t)$ che ha valore massimo $a_{\max} = \Delta L\omega_o^2 = g\,\Delta L/L = 1.63\text{m/s}^2$