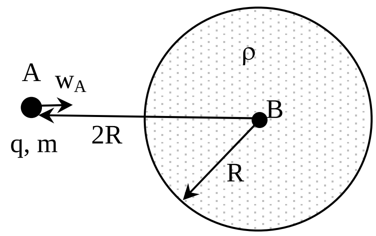
FISICA II

A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale
Soluzioni 3° prova

1. Applicando la legge di Gauss, il flusso del campo elettrico uscente da una superficie sferica centrata in B e di raggio generico *r* assume l'espressione $\Phi\left(\vec{E}_o\right)=\int_\Sigma \vec{E}_o \cdot \hat{n}_{ext} dS = 4\pi r^2 E_o = Q_{\text{int}}/\varepsilon_o$

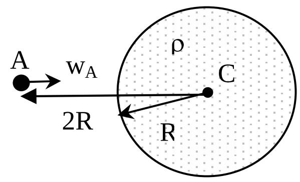
dove $Q_{\text{int}}= \begin{cases} r < R & = \rho\left(4\pi r^3/3\right) \\ r > R & = \rho\left(4\pi R^3/3\right) \end{cases}$ da cui si ottiene il campo elettrico $\begin{cases} r < R & E_o = \rho\, r/3\varepsilon_o \\ r > R & E_o = \rho\, R^3/3\varepsilon_o r^2 \end{cases}$

e, dopo integrazione, il potenziale $\begin{cases} r < R & V_o(r) = \int_r^R E_o dr + V_o(R) = \dfrac{\rho}{6\varepsilon_o}\left(3R^2 - r^2\right) \\ r > R & V_o(r) = \int_r^\infty E_o dr = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r} \end{cases}$ ove si è assunto nullo il potenziale all'infinito. La differenza di potenziale fra i punti B ed A assume quindi il valore $\Delta V_{BA} = V_o(0) - V_o(2R) = \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_o} > 0$ valore che conferma la necessità di lanciare q alla velocità w_A



Dalla conservazione dell'energia meccanica nei punti A,B quindi $qV_A + T_A = qV_B + T_B$. In questo caso la velocità iniziale minima w_A corrisponde al caso ideale di una velocità finale nulla w_B=0, e quindi T_B=0.

Da questa condizione $w_A = \sqrt{2\, q\Delta V_{BA}/m} = \sqrt{2\, q\rho R^2/3m\varepsilon_o}$ =27.5 m/s.

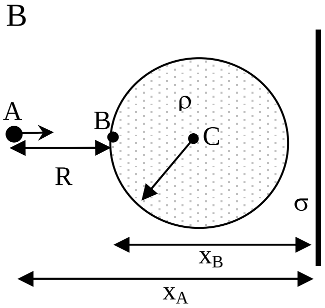


2. La prima parte del problema si imposta, come nel problema precedente, imponendo la conservazione dell'energia durante il tragitto da A verso C

$$T_A + qV_A^{sfera} = qV_C^{sfera}$$

dove T_A è l'energia cinetica della particella nel punto A, mentre V^{sfera} è il potenziale elettrostatico generato dalla distribuzione sferica. Nella seconda parte del problema compare una seconda distribuzione di carica (strato piano) che genera un potenziale elettrostatico V^{piano} da aggiungere al precedente. Imponendo la conservazione dell'energia durante il tragitto da A verso B

$$T_A + qV_A^{sfera} + qV_A^{piano} = qV_B^{sfera} + qV_B^{piano}$$



Combinando le espressioni ed eliminando i termini comuni T_A, V_A^{sfera} si ottiene

$V_B^{piano} - V_A^{piano} = V_C^{sfera} - V_B^{sfera}$ ossia $\int_{x_B}^{x_A} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o} dx = \int_0^R \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o} r dr$

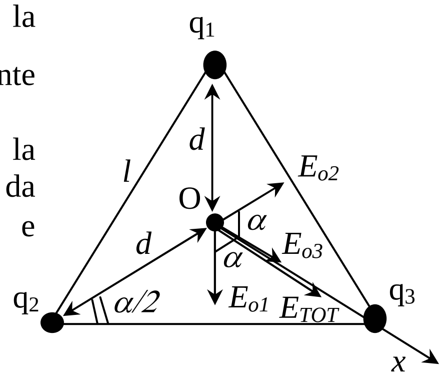
da cui $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o} R = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o}\dfrac{R^2}{2}$ e quindi $\sigma = \rho R/3$ = **10μC/m²**

3. Applicando la legge di Gauss, il flusso del campo elettrico uscente da una superficie sferica di raggio generico *r* assume l'espressione $\Phi\left(\vec{E}_o\right) = 4\pi r^2 E_o$. Il campo elettrico $E_o(r)$ ed il potenziale $V_o(r)$ assumono le espressioni

$$\begin{cases} r < R_1 & E_o = 0 \\ R_1 < r < R_2 & E_o = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(r - \dfrac{R_1^3}{r^2}\right) \\ r > R_2 & E_o = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\dfrac{R_2^3 - R_1^3}{r^2}\right) \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} r < R_1 & V_o(r) = V_o(R_1) = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right) \\ R_1 < r < R_2 & V_o(r) = \displaystyle\int_r^{R_2} E_o dr + V_o(R_2) = \dfrac{\rho}{6\varepsilon_o}\left[3R_2^2 - r^2 - \dfrac{2R_1^3}{r}\right] \\ r > R_2 & V_o(r) = \displaystyle\int_r^{\infty} E_o dr = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\dfrac{R_2^2 - R_1^2}{r}\right) \end{cases}$$

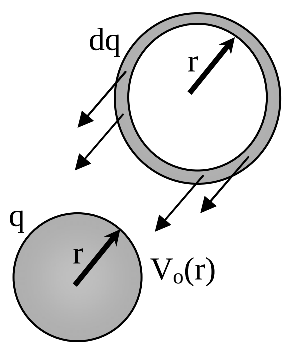
Il lavoro esterno per spostare la carica q nel centro vale $L_{ext} = q[V_o(0) - V_o(\infty)] = \dfrac{q\rho}{2\varepsilon_o}\left(R_2^2 - R_1^2\right) = 0.42$ J

4. Il campo elettrico totale nel punto O è dato dalla somma vettoriale dei tre campi elettrici generati da $q_1=q$, $q_2=q$, $q_3=-q$. Tutti e tre i vettori hanno la stessa intensità $E_{o1} = E_{o2} = E_{o3} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o d^2}$ perché il punto O è equidistante dalle tre cariche. Per la simmetria del sistema il campo totale E_{TOT} ha la direzione dell'asse x, e si ottiene proiettando i tre vettori lungo l'asse x: da ciò $E_{TOT} = E_{o1}\cos\alpha + E_{o2}\cos\alpha + E_{o3}$ dove $\alpha=\pi/3$ e per cui $\cos\alpha=1/2$ e $d = l/\sqrt{3}$. Da cui $E_{TOT} = \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_o d^2} = \dfrac{6q}{4\pi\varepsilon_o l^2} =$



$= \dfrac{6 \cdot 10^{-6}}{5^2 \cdot 10^{-4}} 9 \cdot 10^9 \, V/m = 2.16 \cdot 10^7 \, V/m$. Il potenziale totale si ottiene dalla somma algebrica dei tre potenziali $V(O) = \dfrac{q + q - q}{4\pi\varepsilon_o d} = \dfrac{q\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_o l} = \dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}\sqrt{3}}{5 \cdot 10^{-2}} V = 3{,}12 \cdot 10^5 V$. Per l'energia configurazionale $U = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o l} + \dfrac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_o l} + \dfrac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_o l} = \dfrac{q^2 - q^2 - q^2}{4\pi\varepsilon_o l} = -\dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-12}}{5 \cdot 10^{-2}} = -0.18 J$

5. Per calcolare l'energia configurazionale del sistema immaginiamo di costruire una sfera uniformemente carica con un raggio r via via crescente. Il lavoro dL^{ext} che dobbiamo compiere contro le forze del campo per accrescere il raggio da r a $r+dr$ si calcola pensando di portare dall'infinito un guscio sferico di carica $dq = \rho dV = \rho\left(4\pi r^2 dr\right)$ e di depositarlo sulla superficie della sfera che già si trova al potenziale $V_o(r) = q\Big/4\pi\varepsilon_o r = \rho\left(\dfrac{4}{3}\pi r^3\right)\Big/4\pi\varepsilon_o r = \rho r^2/3\varepsilon_0$ dove q è la carica interna a tale sfera. Tale lavoro esterno contrario al lavoro elettrostatico andrà ad accrescere l'energia configurazionale del sistema della quantità $dU=dL^{ext}=-dL^{el}$ $=dqV_o(r)= \rho\left(4\pi r^2 dr\right)\rho r^2/3\varepsilon_0 = 4\pi\rho^2 r^4 dr/3\varepsilon_o$.



Integrando tutti questi contributi energetici accrescendo il raggio della sfera da $r=0$ fino a raggiungere $r=R$ (le dimensioni finali della sfera) si ottiene il valore finale dell'energia configurazionale $U = \displaystyle\int_0^R 4\pi\rho^2 r^4 dr/3\varepsilon_o = \dfrac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_o}$ o equivalentemente in termini della carica totale $Q_{tot} = \rho\dfrac{4}{3}\pi R^3$, si ottiene $U_o = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{Q_{tot}^2}{4\pi\varepsilon_o R}$.