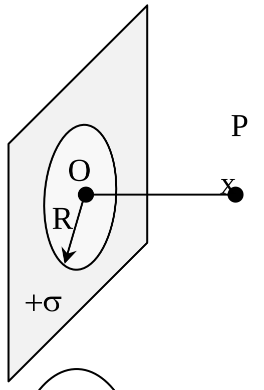
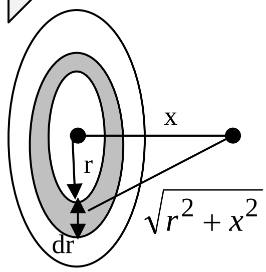
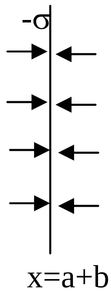
FISICA II

A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 2[a] prova





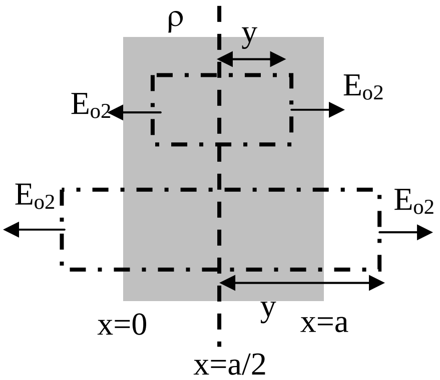
1. La distribuzione di carica indicata in figura può vedersi come la sovrapposizione di due distribuzioni di carica: quella di una lastra piana indefinita carica con densità superficiale σ, e quella di un disco conduttore di raggio R uniformemente carico con densità superficiale $-\sigma$. Conseguentemente la funzione potenziale potrà vedersi come somma dei due potenziali $V_1(x)$ e $V_2(x)$ prodotti dalle due distribuzioni. In particolare il potenziale di uno strato piano vale per x>0, $V_1(x) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}x$, mentre il potenziale del disco si può calcolare sommando nel generico punto P tutti i contributi dV_2 di anelli sottili di spessore dr (come in figura) sui quali c'è la carica negativa $dq = -2\pi r\sigma dr$.
Il contributo elementare vale $dV_2 = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{r^2+x^2}} = \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_o}\dfrac{rdr}{\sqrt{r^2+x^2}}$, da cui
$$V_2(x) = \int dV_2 = \int_0^R \frac{-\sigma}{2\varepsilon_o}\frac{rdr}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_o}\left|\sqrt{r^2+x^2}\right|_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(x-\sqrt{R^2+x^2}\right).$$
Il potenziale somma vale quindi $V(x) = V_1(x)+V_2(x) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\sqrt{R^2+x^2}$.
Il lavoro che il campo elettrico compie per spostare la carica dal punto P al punto O vale $L_{PO} = q(V_2(x)-V_2(0)) = -\dfrac{q\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\sqrt{R^2+3R^2}-\sqrt{R^2}\right) = -\dfrac{q\sigma}{2\varepsilon_o}R$. Esso è negativo e corrisponde ad una azione non spontanea. Il lavoro compiuto esternamente deve essere quindi opposto pari a $L_{est} = \dfrac{q\sigma}{2\varepsilon_o}R = 2.26$ J.



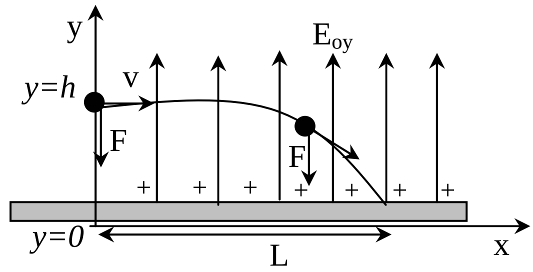
2. Il problema può essere risolto applicando il principio di sovrapposizione degli effetti alle due distribuzioni di carica. Lo strato piano carico negativamente dà luogo ad un campo elettrico E_{o1} simmetrico rispetto al piano x=a+b che proiettato lungo l'asse x vale $\begin{cases} x < a+b & E_{o1} = \sigma/\varepsilon_o \\ x > a+b & E_{o1} = -\sigma/\varepsilon_o \end{cases}$

La carica positiva distribuita nel volume dà anch'essa un campo elettrico E_{o2} simmetrico rispetto alla mediana in x=a/2. Il valore dell'intensità viene calcolato applicando la legge di Gauss alla superficie laterale di un parallelepipedo, simmetrico rispetto alla mediana, di sezione S ed altezza 2y. Il flusso di campo elettrico uscente vale sempre $\Phi(E_{o2}) = 2SE_{o2}$. Ovviamente quando y<a/2 la carica interna è $Q_{\text{int}} = 2yS\rho$, mentre quando y>a/2 la carica interna è $Q_{\text{int}} = aS\rho$. Si ottiene il campo elettrico interno ed esterno $\begin{cases} \text{int} & |E_{o2}| = \rho|x-a/2|/\varepsilon_o \\ ext & |E_{o2}| = a\rho/2\varepsilon_o \end{cases}$ Sovrapponendo i campi E_{o1} ed E_{o2}, il campo complessivo per x<0 e per x>a+b si annulla solo quando $\sigma = a\rho$. Il campo elettrico complessivo ed il potenziale nelle varie regioni

$$\begin{cases} x<0 & E_o=0 \\ 0<x<a/2 & E_o=\sigma x/a\varepsilon_o \\ a/2<x<a & E_o=\sigma x/a\varepsilon_o \\ a<x<a+b & E_o=\sigma/\varepsilon_o \\ x>a+b & E_o=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x<0 & V_o=0 \\ 0<x<a/2 & V_o=-\sigma x^2/2a\varepsilon_o \\ a/2<x<a & V_o=-\sigma x^2/2a\varepsilon_o \\ a<x<a+b & V_o=\sigma(a-2x)/2\varepsilon_o \\ x>a+b & V_o=-\sigma(b+a/2)/\varepsilon_o \end{cases}$$

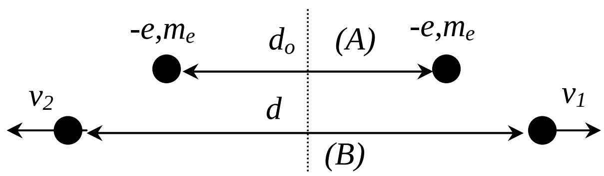


3. Il campo elettrico generato dallo strato piano è $E_o=\sigma/2\varepsilon_o$ uniforme, diretto lungo l'asse delle *y*. La forza elettrica subita dalla carica negativa –*q* vale $F_y=ma_y=-qE_{oy}=-q\sigma/2\varepsilon_o$ ed è diretta nel verso opposto dell'asse *y*. Tale forza elettrica essendo l'unica forza presente (la forza peso è trascurata) causa il moto parabolico della carica nel piano *xy*. Calcolando l'accelerazione secondo *x* ed *y* si ottiene

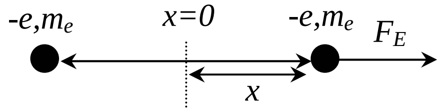


$\begin{cases} a_y=-q\sigma/2m\varepsilon_o \\ a_x=0 \end{cases}$ che corrisponde ad un moto rettilineo lungo l'asse *x*, e ad uno uniformemente accelerato lungo y. Integrando si ottiene $\begin{cases} v_y=-(q\sigma/2m\varepsilon_o)\cdot t \\ v_x=v_o \end{cases}$ e $\begin{cases} y(t)=h-(q\sigma/4m\varepsilon_o)\cdot t^2 \\ x(t)=v_o t \end{cases}$. Il tempo di volo della carica si ricava imponendo $y(t^*)=0$ da cui $t=\sqrt{4hm\varepsilon_o/q\sigma}=2.66m\sec$, la posizione dell'impatto $L=x(t^*)=v_o t=26.6\mu m$, e la velocità $v_y=-\sqrt{\dfrac{q\sigma h}{m\varepsilon_o}}=-15.04m/s$, per cui la velocità complessiva $v=\sqrt{v_o^2+\dfrac{q\sigma h}{m\varepsilon_o}}\cong 15{,}04m/s$ (la velocità di impatto è praticamente verticale)

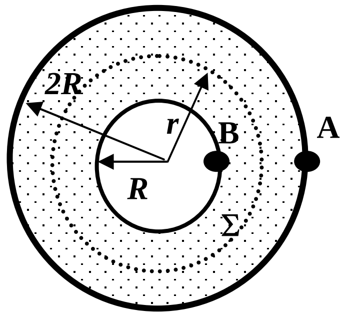
4 Quando i due elettroni sono inizialmente fermi a distanza *d_o=2cm* (stato *A*) l'energia potenziale elettrostatica del sistema (energia configurazionale) vale $U_A^{el}=\dfrac{(-e)(-e)}{4\pi\varepsilon_o d_o}$. Quando cominciano ad allontanarsi l'energia elettrostatica diminuisce al



valore finale (stato *B*) $U_B^{el}=\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_o d}$ (ciò corrisponde ad una azione spontanea tra le due cariche). Le due cariche hanno trasformato l'energia potenziale mancante nell'energia cinetica del sistema $T_B=\frac{1}{2}m_e v_1^2+\frac{1}{2}m_e v_2^2=m_e v_1^2$ visto che per ragioni di simmetria le velocità di fuga sono esattamente opposte. Dalla conservazione dell'energia meccanica $U_A^{el}=U_B^{el}+T_B$ si può ricavare l'energia cinetica $T_B=U_A^{el}-U_B^{el}=\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_o}\left(\dfrac{1}{d_o}-\dfrac{1}{d}\right)=\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{d-d_o}{dd_o}$, e la velocità di fuga $v_1 = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_o m_e}\dfrac{d-d_o}{dd_o}}$ *=101 m/s.* Questa velocità cresce mano mano che le due cariche si allontanando sino a raggiungere il valore limite $v_{\lim} = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_o m_e d_o}}$ *=113 m/s* quando $d \to \infty$.



Allo stesso risultato si deve pervenire con lo studio delle forze. Durante il moto quando le due cariche sono distanti *2x* (il centro di massa rimane in *x=0*) la forza di repulsione coulombiana vale $F_E = \dfrac{(-e)(-e)}{4\pi\varepsilon_o(2x)^2} = ma_x = m\dfrac{dv_x}{dt}$. La velocità di fuga $v_x(t)$ può pensarsi funzione del tempo per il tramite della posizione $v_x[x(t)]$. Allora il secondo membro dell'equazione si scrive come $m\dfrac{dv_x}{dt} = m\dfrac{dv_x}{dx}\dfrac{dx}{dt} = m\dfrac{dv_x}{dx}v_x$ e l'equazione differenziale può essere separata nelle due variabili x, v_x, così da poter scrivere $\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_o(2x)^2}dx = mv_x dv_x$, che integrata membro a membro $\displaystyle\int_{d_o/2}^{d/2}\frac{e^2}{16\pi\varepsilon_o x^2}dx = \int_0^{v_1} mv_x dv_x$ dà luogo all'espressione $\dfrac{e^2}{16\pi\varepsilon_o}\left(\dfrac{2}{d_o} - \dfrac{2}{d}\right) = \dfrac{1}{2}mv_1^2$ con cui si ritrovano i valori precedenti.



5. Il campo elettrico $E_o(r)$ viene calcolato applicando la legge di Gauss ad alla superficie cilindrica Σ di raggio r e di altezza L. Il flusso uscente dalla superficie laterale è $\Phi_\Sigma = \int_\Sigma \vec{E}_o \cdot \hat{n}dS = 2\pi rLE_o(r) = Q_{int}/\varepsilon_o$

dove Q_{int} assume le diverse espressioni

$$\begin{cases} r<R & Q_{\text{int}} = 0 \\ R<r<2R & Q_{\text{int}} = \int \rho dV = \rho\pi\left(r^2 - R^2\right)L \\ r>2R & Q_{\text{int}} = \int \rho dV = \rho\pi\left(4R^2 - R^2\right)L \end{cases}$$

da cui si desumono campo elettrico e potenziale

$$E_o(r)\ \begin{cases} r<R & E_o = 0 \\ R<r<2R & E_o = \rho\left(r - R^2/r\right)/2\varepsilon_o \\ r>2R & E_o = 3\rho R^2/2\varepsilon_o r \end{cases},\quad \begin{cases} r<R & V_o(r) = V_o(R) = \dfrac{\rho R^2}{4\varepsilon_o}\left[3 - 2\ln(2)\right] \\ R<r<2R & V_o = \displaystyle\int_r^{2R} E_o dr = \frac{\rho}{2\varepsilon_o}\left[\frac{4R^2 - r^2}{2} + R^2\ln\left(\frac{r}{2R}\right)\right] \\ r>2R & V_o = \displaystyle\int_r^{2R} E_o dr = -\frac{3\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln\left(\frac{r}{2R}\right) \end{cases}$$

ove si è assunto nullo il potenziale sulla superficie cilindrica esterna (r=2R). Dalla conservazione dell'energia meccanica nei punti A, B quindi $qV_A + T_A = qV_B + T_B$. In questo caso la velocità iniziale minima w_A corrisponde al caso ideale di una velocità finale nulla w_B=0, e quindi T_B=0. Da questa condizione $w_A = \sqrt{2q\Delta V_{BA}/m} = \sqrt{2q\left[V(R) - V(2R)\right]/m} = \sqrt{q\rho R^2\left[3 - 2\ln 2\right]/2m\varepsilon_o}$