FISICA

A.A. 2007-2008
Ingegneria Gestionale
Soluzioni 2°prova

1. La macchina A si muove di moto circolare uniforme alla velocità angolare costante $\omega_A = v_A/R = 1.85\ 10^{-3}$ rad/s, da cui si ottiene per la legge oraria $\varphi_A(t) = \omega_A t + \pi/2$ (rispetto all'asse x). La macchina B si muove inizialmente con accelerazione angolare $\alpha = a_t/R = 6.67 \cdot 10^{-5}$ rad/s^2, velocità angolare $\omega_B(t) = \alpha t$ e legge oraria $\varphi_B(t) = \alpha t^2/2$. Il termine della prima fase della rincorsa avviene quando la macchina B ha percorso la distanza di 1Km che corrisponde all'angolo $\varphi_1 = 6.67 \cdot 10^{-2}$rad. Imponendo $\varphi_B(t_1) = \alpha t^2/2 = \varphi_1$ si calcola il tempo al quale termina la prima fase $t_1 = \sqrt{2\varphi_1/\alpha} = 44.72$ s, la velocità angolare raggiunta $\omega_1 = \omega_B(t_1) = \alpha t_1 = \sqrt{2\alpha\varphi_1} = 2.98\ 10^{-3}$ rad/s, la quale risulta maggiore della velocità angolare della macchina A. Nella seconda fase, che ha inizio al tempo t_1, la macchina B procede alla velocità angolare acquisita ω_1 di moto circolare uniforme con legge oraria $\varphi_B(t) = \omega_1(t - t_1) + \varphi_1$. Per determinare il tempo t_{fin} al quale B raggiunge A basta imporre $\varphi_B(t_{fin}) = \varphi_A(t_{fin})$ e cioè $\omega_1 t_{fin} - \omega_1 t_1 + \varphi_1 = \omega_A t_{fin} + \pi/2$ da cui si ricava $t_{fin} = \dfrac{\omega_1 t_1 - \varphi_1 + \pi/2}{\omega_1 - \omega_A} = \dfrac{2\varphi_1 - \varphi_1 + \pi/2}{\sqrt{2\alpha\varphi_1} - \omega_A} = \dfrac{0.0667 + 1.571}{(2.98 - 1.85)\cdot 10^{-3}} = 1452$ s. A quell'istante le accelerazioni normali valgono rispettivamente $a_{nA} = \omega_A^2 R = 0.051$ m/s^2 e $a_{nB} = \omega_B^2 R = 0.133$ m/s^2

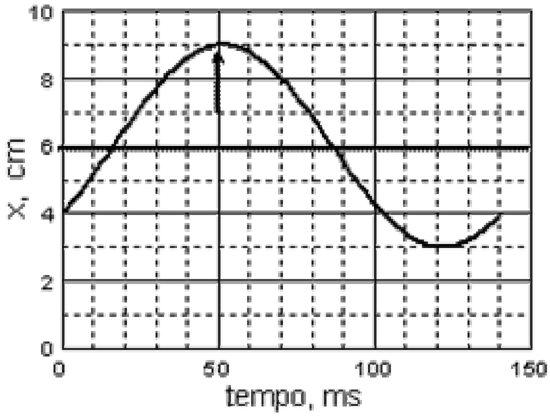
2. Il punto materiale descrive un moto armonico in accordo all'equazione $x(t) = x_{eq} + A\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ dove T rappresenta il periodo di oscillazione, ed x_{eq} il punto medio.

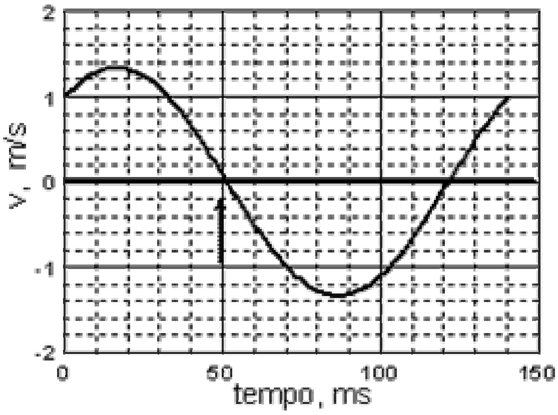
Gli estremi x_{max} e x_{min} sono $\begin{cases} x_{max} = x_{eq} + A \\ x_{min} = x_{eq} - A \end{cases}$ relazioni invertibili nelle $\begin{cases} x_{eq} = (x_{max} + x_{min})/2 = 6cm \\ A = (x_{max} - x_{min})/2 = 3cm \end{cases}$.

Dalle condizioni iniziali di posizione e velocità $\begin{cases} x(0) = x_{eq} + A\cos(\varphi) \\ v(0) = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)A\sin(\varphi) \end{cases}$ si ricavano

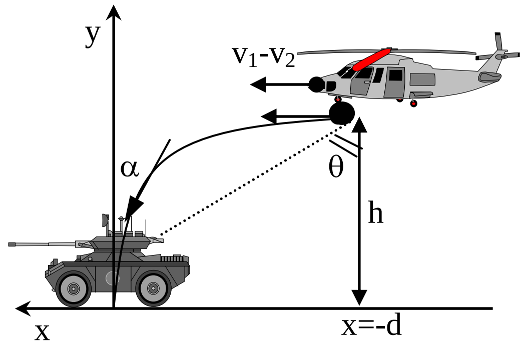
$$\begin{cases} \varphi = \arccos\left(\dfrac{x(0) - x_{eq}}{A}\right) = \pm\ 131°49' \\ T = -2\pi A\sin(\varphi)/v(0) = \mp\ 140ms \end{cases}$$ (la soluzione ϕ=131°49'porta all'assurdo di T<0)

Le grandezze cinematiche dopo t_1=50ms valgono $\begin{cases} x(t_1) = x_{eq} + A\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t_1 + \varphi\right) = 8.994\ \ cm \\ v(0) = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t_1 + \varphi\right) = 0.086\ \ m/s \end{cases}$





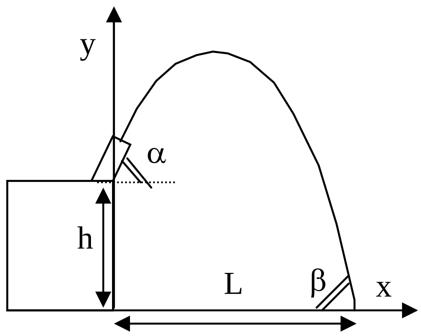
3. Nel sistema di riferimento di un osservatore nel carro armato l'elicottero vola alla velocità differenza v_1-v_2=150 km/h, che coincide anche con la velocità iniziale della bomba. Il moto parabolico della bomba può essere scomposto secondo gli assi x $\begin{cases} v_x = v_1 - v_2 \\ x(t) = (v_1 - v_2)t - d \end{cases}$ ed y $\begin{cases} v_y = -gt \\ y(t) = h - gt^2/2 \end{cases}$. La bomba tocca il suolo al tempo t^* che si ottiene dall'equazione $y(t^*)=0=h-g(t^*)^2/2$ da cui $t^* = \sqrt{2h/g}$. A quell'istante l'ascissa della bomba deve coincidere con quella del carro armato $x(t^*) = (v_1 - v_2)t^* - d = 0$, da cui si ricava la distanza $d = (v_1 - v_2)t^* = (v_1 - v_2)\sqrt{2h/g}$. La tangente dell'angolo di vista θ richiesto è proprio uguale al rapporto dei due cateti $\tan\theta = d/h = (v_1 - v_2)\sqrt{2/gh}$ =1.33 da cui $\theta = 53°05'$. La velocità finale con cui la bomba arriva sul carro, nel sistema di riferimento solidale al carro, è scomposta nelle due componenti $v_x = v_1 - v_2 = 41.7$ m/s e $v_y = -gt^* = -\sqrt{2gh} = 62.6$ m/s. La velocità finale è quindi $v_{fin} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ = 75.2 m/s, con angolazione lungo la verticale $\alpha = arc\tan(|v_x/v_y|) = 33°40'$.



4. Il tempo di volo del proiettile t^* si ottiene imponendo $y(t^*)=0$ da cui si ottiene l'equazione di secondo grado $t^2 - [2v_o sin(\alpha)/g]\cdot t - 2h/g = 0$ che ha due soluzioni di cui quella accettabile è $t^* = \frac{v_o sin(\alpha)}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_o sin(\alpha)}{g}\right)^2 + \frac{2gh}{v_o}} = v_o/g\left(sin(\alpha) + \sqrt{sin^2(\alpha) + 2gh/v_o^2}\right)$da cui la gittata risulta $L=x(t^*)= v_o^2/g\left[\cos(\alpha)\left(sin(\alpha) + \sqrt{sin^2(\alpha) + 2gh/v_0^2}\right)\right]$.

Per valutare la gittata massima basta imporre $\frac{dL}{d\alpha} = 0$ ottenendo una equazione $\cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha) = sin(\alpha)\left[\sqrt{sin^2(\alpha) + b} - \frac{\cos^2(\alpha)}{\sqrt{sin^2(\alpha) + b}}\right]$ ove $b = 2gh/v_o^2$. Quadrando ambo i membri dopo qualche passaggio algebrico si ottiene $b\cos^4(\alpha) = b^2 sin^2(\alpha) + b sin^4(\alpha)$ e semplificando per b e sfruttando relazioni trigonometriche porta a

$tg(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+b}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2gh/v_o^2}}$ nel nostro caso $\alpha = 43°40'$. Per il calcolo

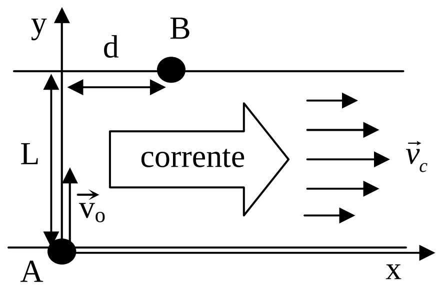


$$\begin{cases} x(t) = v_o \cos(\alpha)\cdot t \\ v_x(t) = v_o \cos(\alpha) \\ a_x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t) = h + v_o sin(\alpha)\cdot t - gt^2/2 \\ v_y(t) = v_o sin(\alpha) - gt \\ a_y = -g \end{cases}$$

del raggio di curvatura basta calcolare la velocità e l'accelerazione tangenziale al tempo t=1s. $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_o^2 + (gt)^2 - 2v_o gt sin(\alpha)} = 193.36\, m/s$ mentre l'accelerazione tangenziale è $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t - v_o g sin(\alpha)}{\sqrt{v_o^2 + (gt)^2 - 2v_o gt sin(\alpha)}} = -6.5\, m/s^2$ da cui ricaviamo l'accelerazione normale $a_n = \sqrt{g^2 - a_t^2} = 7.33\, m/s^2$ da cui il raggio di curvatura $\rho = v^2/a_n = 5098 m$.

5. La velocità del natante nel sistema fisso, solidale con la terra, è $\vec{v}_a = \vec{v}_o + \vec{v}_c$ dove $\vec{v}_o$ rappresenta la velocità che il natante ha nel sistema di riferimento solidale con l'acqua, mentre $\vec{v}_c$ è la velocità di trascinamento della corrente. La velocità del natante, decomposta secondo *x* e *y* è riportata nel riquadro. Il tempo impiegato a raggiungere l'altra sponda *t** si calcola dal moto lungo y imponendo $y(t^*)=L$ da cui $t^*=L/v_o$ quantità al momento incognita! Dal moto lungo l'asse *x* ricaviamo invece la condizione per il raggiungimento al tempo *t** del punto B. Si deve quindi imporre $x(t^*)=d$ dove però $x(t)$ è l'integrale nel tempo della velocità della corrente $v_x(y)$. Osserviamo come nel termine di velocità non compaia direttamente il tempo ma solo l'ordinata *y* che però è a sua volta funzione del tempo. Il risultato dell'integrazione riportato genericamente nel riquadro vale nel nostro caso ($x_o=0$)



$$\begin{cases} y(t) = v_o t \\ v_y = v_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x(t) = x_o + \int_o^t v_x(y(t))dt \\ v_x(y(t)) = k \cdot y(t) \cdot (L - y(t)) \end{cases}$$

$$x(t) = \int_0^t k \cdot y(t) \cdot (L - y(t))dt = kv_o \int_0^t t(L - v_o t)dt = kv_o \left\{ L \left| \frac{t^2}{2} \right|_0^t - v_o \left| \frac{t^3}{3} \right|_0^t \right\} = kv_o t^2 \left(\frac{L}{2} - \frac{v_o t}{3} \right)$$ che al tempo $t^*=L/v_o$ vale $x(t^*)=d=$ $kv_o \frac{L^2}{v_o^2}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right) = \frac{kL^3}{6v_o}$ da cui ricaviamo

$v_o = \frac{kL^3}{6d} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot (50)^3}{6 \cdot 20} = 5.2\ m/s$, da cui il tempo $t^*=L/v_o$ $t^* = L / v_o = \frac{6d}{kL^2} = 9.6s$.