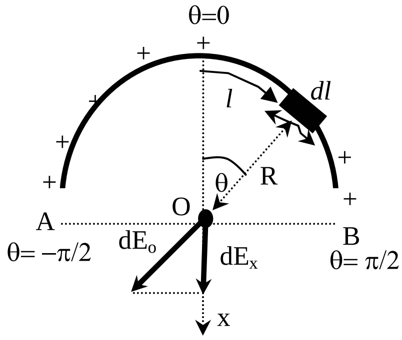
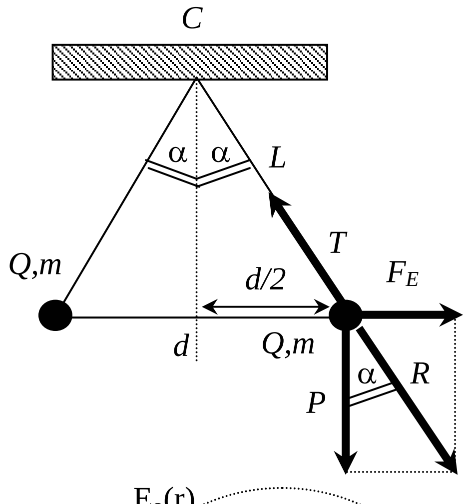
FISICA II

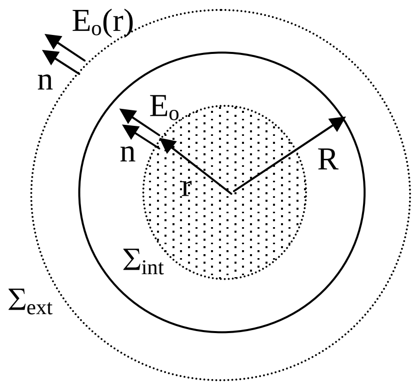
A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 1ª prova



1. La carica Q è distribuita uniformemente sulla semicirconferenza con densità lineare $\lambda = Q/\widehat{AB} = Q/\pi R$. La carica infinitesima $dq=\lambda dl$ disposta sull'elemento di lunghezza infinitesima dl, genera nel punto O (alla distanza R) un contributo di potenziale $dV_O = dq/(4\pi\varepsilon_O R)$ ed un contributo di campo elettrico $dE_O = dq/(4\pi\varepsilon_O R^2)$ diretto come in figura. Per ottenere i valori totali di potenziale e campo elettrico occorre sommare tutti i contributi infinitesimi integrando lungo tutta la distribuzione di carica. In particolare $V_O = \int dV_O = \int dq/(4\pi\varepsilon_O R) = Q/(4\pi\varepsilon_O R)$ essendo R costante, mentre per il calcolo del campo elettrico è necessario fare la difficile somma vettoriale di tutti i contributi elementari $\vec{E}_O = \int d\vec{E}_O$. Per ragioni di simmetria della distribuzione di carica, il vettore risultante $\vec{E}_O$ è tutto diretto lungo l'asse delle x ($E_O = E_{O,x}$) per cui solo le proiezioni dei contributi lungo l'asse x vanno integrati $dE_{O,x} = dE_O \cos\theta$. Combinando tutte le espressioni si ottiene $E_O = E_{O,x} = \int dE_{O,x} = \int \frac{dq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_O R^2}$ dove purtroppo θ è variabile durante l'integrazione. Conviene quindi esprimere dq in funzione dell'angolo θ. Per la relazione fra archi ed angoli, l'ascissa curvilinea vale $l=R\theta$ che differenziata permette di scrivere $dl=R\,d\theta$, e quindi $dq=\lambda dl= \lambda R\, d\theta =(Q/\pi)\, d\theta$. che sostituito nell'espressione del campo permette di ottenere $E_O = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{Q}{\pi}\right)\frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_O R^2}d\theta = \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_O R^2}\left[sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_O R^2}$



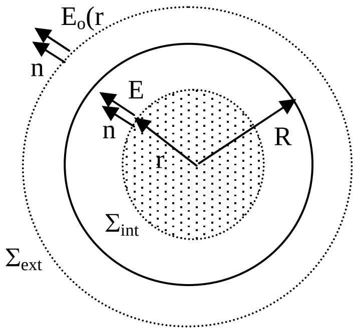
2. Su ciascuna sferetta agiscono 3 forze: la forza peso $P=mg$, la forza elettrica repulsiva $F_E = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_O d^2} = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_O L^2 sin^2\alpha}$ e la tensione del filo T. All'equilibrio la somma vettoriale delle tre forze deve annullarsi $\vec{P}+\vec{F}_E+\vec{T}=0$ e quindi la risultante parziale di peso e forza elettrica deve essere opposta alla tensione del filo $\vec{R}=\vec{P}+\vec{F}_E=-\vec{T}$ ossia anch'essa inclinata di un angolo α rispetto alla verticale. Questo avviene solo se $F_E = Ptg\alpha$ da cui $Q=\sqrt{4(4\pi\varepsilon_o)L^2 mg\sin^3\alpha/\cos\alpha} = 0.93\mu C$



3. Per la simmetria del problema il campo elettrico $E_o(r)$ è radiale e può essere calcolato applicando la legge di Gauss. Per i punti interni che si trovano sulla superficie Σ_{int} di raggio $r<R$, il flusso uscente da Σ_{int} vale $\Phi_{\Sigma\,int} = \int_{\Sigma\,int}\vec{E}_O \bullet \hat{n}dS = 4\pi r^2 E_O(r)$ che per Gauss deve valere Q_{int}/ε_o, dove il valore della carica interna alla superficie Σ_{int} vale

$$Q_{int} = \int \rho dV = \int_0^r \rho\left(4\pi r^2 dr\right) = 4\pi k\int_0^r r^4 dr = \frac{4\pi}{5}kr^5$$

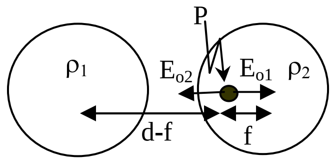
Combinando i due termini della legge di Gauss si ricava il campo interno $E_{\text{int}} = kr^3/5\varepsilon_0$. Per i punti esterni che si trovano sulla superficie Σ_{ext} di raggio $r>R$, il flusso uscente da Σ_{ext} vale $\Phi_{\Sigma ext} = \int_{\Sigma ext} \vec{E}_o \bullet \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_o(r)$ che per Gauss deve valere ancora Q_{int}/ε_o. Ma questa volta la carica contenuta è tutta la carica $Q = \int \rho dV = \int_0^R \rho\left(4\pi r^2 dr\right) = 4\pi k \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi}{5} kR^5$. Combinando i due termini della legge di Gauss si ricava il campo esterno $E_{ext} = kR^5/5\varepsilon_0 r^2$.



4. Come primo passo conviene determinare, applicando la legge di Gauss, il campo elettrico generato da un cilindro infinitamente lungo uniformemente carico con densità ρ_1. Il flusso uscente dalla superficie cilindrica generica Σ di raggio r e di altezza L vale $\Phi_\Sigma = \int_\Sigma \vec{E}_o \cdot \hat{n} dS = 2\pi r L E_o(r) = Q_{int}/\varepsilon_o$ dove

$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} \rho_1 \pi r^2 L & r < R \\ \rho_1 \pi R^2 L & r \geq R \end{cases} \quad \text{da cui il campo elettrico} \quad \begin{cases} E_{o\,\text{int}} = \rho_1 r/2\varepsilon_o & r < R \\ E_{oext} = \rho_1 R^2/2\varepsilon_o r & r \geq R \end{cases}$$

Le stesse formule possono essere applicate per la seconda distribuzione ρ_2.



La condizione di annullamento del campo elettrico nel punto P implica $E_{o1}(d-f)=E_{o2}(f)$ ossia $\frac{\rho_1 R^2}{2\varepsilon_o(d-f)} = \frac{\rho_2 f}{2\varepsilon_o}$ da cui $\rho_2 = \rho_1 \frac{R^2}{f(d-f)} =$ 1.23 μC/m^3

5. Il calcolo di ρ si può effettuare a partire dalla 1^a equazione di Maxwell $\nabla \bullet \vec{E}_o = \rho/\varepsilon_o$ che invertita dà luogo a $\rho = \varepsilon_o \nabla \bullet \vec{E}_o = \varepsilon_o \left(\frac{\partial E_{ox}}{\partial x} + \frac{\partial E_{oy}}{\partial y} + \frac{\partial E_{oz}}{\partial z} \right)$ dove $\begin{cases} E_{ox} = a\varepsilon_o x r^2 \\ E_{oy} = a\varepsilon_o y r^2 \\ E_{oz} = a\varepsilon_o z r^2 \end{cases}$. Il primo termine della divergenza vale $\frac{\partial E_{ox}}{\partial x} = \frac{\partial\left(a\varepsilon_o x r^2\right)}{\partial x} = a\varepsilon_o \frac{\partial\left(x r^2\right)}{\partial x} = a\varepsilon_o \left[\frac{\partial x}{\partial x} r^2 + 2xr \frac{\partial r}{\partial x} \right]$ dove ovviamente $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, mentre il valore $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ si ricava differenziando l'espressione del raggio $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, tenendo costanti le variabili y,z così da ottenere $2r\partial r = 2x\partial x$ e quindi $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$.

Il primo termine della divergenza si scrive quindi $\frac{\partial E_{ox}}{\partial x} = a\varepsilon_o\left[r^2 + 2x^2\right]$ mentre gli altri valgono $\frac{\partial E_{oy}}{\partial y} = a\varepsilon_o\left[r^2 + 2y^2\right]$, e $\frac{\partial E_{oz}}{\partial z} = a\varepsilon_o\left[r^2 + 2z^2\right]$. Da ciò possiamo calcolare la densità di carica $\rho = \varepsilon_o \left(\frac{\partial E_{ox}}{\partial x} + \frac{\partial E_{oy}}{\partial y} + \frac{\partial E_{oz}}{\partial z} \right) = a\varepsilon_o^2\left(3r^2 + 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right) = 5a\varepsilon_o^2 r^2$. Questa densità di carica integrata nella sfera di raggio R (con il sistema dei gusci sferici di volume $d\tau = 4\pi r^2 dr$) dà luogo alla carica interna alla sfera $Q = \int \rho d\tau = \int_0^R \rho\left(4\pi r^2 dr\right) = 20 a\pi\varepsilon_o^2 \int_0^R r^4 dr = 4a\pi\varepsilon_o^2 R^5$.