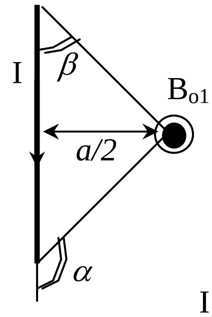
FISICA

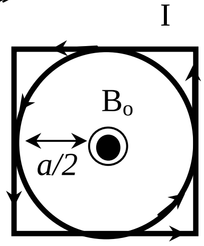
A.A. 2004-2005

Ingegneria Gestionale

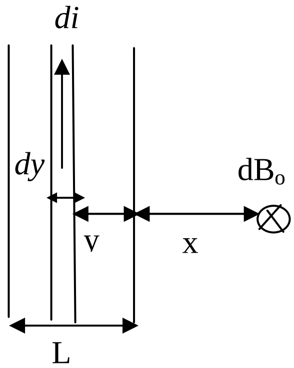
Soluzioni della 12ª prova

1. La spira quadrata è formata da 4 tratti rettilinei di lato *a* percorsi dalla comune corrente *I*. Ciascun lato genera nel centro della spira un contributo di vettore induzione magnetica uscente dal piano del foglio. In generale il contributo B_{o1} generato da un segmento rettilineo vale $B_{01}=\frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{R}$ dove nel nostro caso essendo $\beta=\pi/4$, $\alpha=3\pi/4$, $R=a/2$ si ottiene $B_{01}=2\sqrt{2}\frac{\mu_o I}{4\pi a}$. Anche gli altri tre lati generano singolarmente lo stesso contributo (in modulo, direzione e verso). Il valore complessivo è quindi $B_{quadrato}=4B_{01}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{\mu_o I}{a}$. Esso è inferiore al campo generato da una spira circolare di raggio $R=a/2$, che vale $B_{cerchio}=\frac{\mu_o I}{a}$. Il loro rapporto infatti vale $B_{quadrato}/B_{cerchio}=2\sqrt{2}/\pi=0.9$

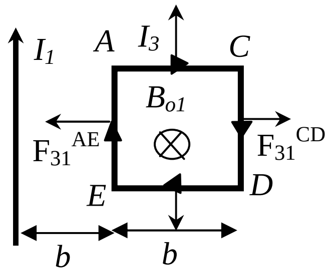




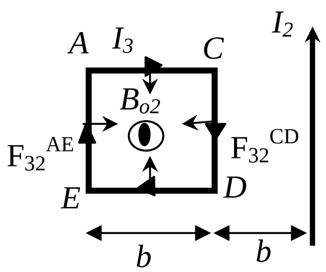
2. Il nastro conduttore può pensarsi formato da un numero infinito di fili rettilinei di spessore infinitesimo *dy* sui quali scorre la corrente infinitesima *di*. Il valore di questa corrente si ottiene dalla proporzione *di:I=dy:L* da cui $di=(I/L)dy$. Il vettore induzione magnetica infinitesimo dB_o creato dal generico filo distante $(x+y)$ dal punto di osservazione vale per Biot-Savart $dB_o=\frac{\mu_o}{2\pi}\frac{di}{x+y}=\frac{\mu_o I}{2\pi L}\frac{dy}{x+y}$ con direzione entrante nel piano del foglio. Il vettore induzione complessivo B_o si ottiene integrando il contributo infinitesimo dB_o al variare della posizione del filo *y* nell'intervallo $0<y<L$, da



cui: $B_o=\int dB_o=\frac{\mu_o I}{2\pi L}\int_0^L\frac{dy}{x+y}=\frac{\mu_o I}{2\pi L}\ln\left(\frac{x+L}{x}\right)=\frac{\mu_o I}{2\pi L}\ln\left(1+\frac{L}{x}\right)$ con il verso indicato in figura. Si noti come facendo tendere le dimensioni trasversali del nastro a zero ($L\to 0$), il termine logaritmico tenda al valore $\ln\left(1+\frac{L}{x}\right)\cong\frac{L}{x}$, ed il vettore induzione tenda correttamente al campo di Biot-Savart generato da un filo infinito $B_o=\frac{\mu_o I}{2\pi x}$.

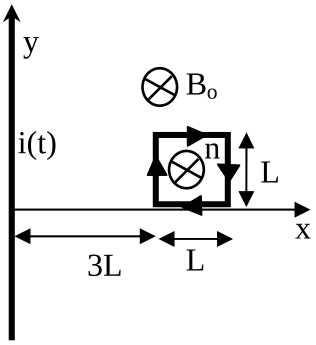


3. La spira rettangolare ACDE è sottoposta a forze magnetiche interne ed esterne. Le forze magnetiche interne dovute al campo magnetico da essa stessa generato hanno risultante nulla e quindi nel caso di una spira rigida non danno alcun effetto. Le forze magnetiche esterne sono quelle dovute ai campi magnetici B_{o1} generato dalla corrente I_1 e B_{o2} dalla I_2. Tali forze esterne sono descritte in generale dalla 2ª formula di Laplace $\vec{F}=\vec{F}_{31}+\vec{F}_{32}=I_3\int d\vec{l}_3\times\vec{B}_{o1}+I_3\int d\vec{l}\times\vec{B}_{o2}$. Calcoliamo prima la forza $\vec{F}_{31}$ che può pensarsi come somma la risultante delle 4 forze agenti sui 4 lati della spira rettangolar. Le 2 forze sui due lati AC ed ED sono uguali ed opposte e non danno alcun effetto, mentre sul lato AE c'è una forza attrattiva di valore



$F_{31}^{AE} = B_{o1} I_3 a = \frac{\mu_o}{2\pi b} I_1 I_3 a$ maggiore della forza repulsiva sul lato CD che vale $F_{31}^{CD} = B_{o1} I_3 a = \frac{\mu_o}{4\pi b} I_1 I_3 a = \frac{F_{31}^{AE}}{2}$. La risultante $F_{31} = \frac{\mu_o I_1 I_3 a}{4\pi b}$ è quindi attrattiva verso il primo filo. Ragionamento analogo deve essere fatto per trovare la forza risultante $\vec{F}_{32}$, dove le forze che non compensate sono sul lato CD $F_{32}^{CD} = B_{o2} I_3 a = \frac{\mu_o}{2\pi b} I_2 I_3 a$ repulsiva e doppia rispetto a quella attrattiva sul lato AE $F_{32}^{AE} = B_{o2} I_3 a = \frac{\mu_o}{4\pi b} I_2 I_3 a$. La risultante $F_{32} = \frac{\mu_o I_2 I_3 a}{4\pi b}$ è quindi repulsiva ed ha ho stesso verso della F_{31}. La risulatnte totale è quindi diretta verso il primo filo con intensità $F_3 = \frac{\mu_o a}{4\pi b}\left(I_1 I_3 + I_2 I_3\right)$

4. Il campo magnetico nonuniforme generato dal filo rettilineo vale, per la legge di Biot e Savart, $B_o(x,t) = \frac{\mu_o i(t)}{2\pi x}$ con direzione e verso indicati in figura. Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira quadrata in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$, procediamo al calcolo del flusso concatenato con la spira Φ_c:



$\Phi_c = \int \vec{B}_o \cdot \hat{n} dS = \int B_o dS = \frac{\mu_o i(t)}{2\pi} \int_o^L dy \int_{3L}^{4L} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o i(t) L}{2\pi} \ln(4/3)$. Applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz possiamo calcolare la forza elettromotrice indotta nella spira con l'equazione $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{\mu_o L}{2\pi} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \frac{d}{dt} i(t) = \frac{\mu_o L i_{\max} \omega}{2\pi} \ln\left(\frac{4}{3}\right) sin(\omega t)$. Infine l'intensità di corrente indotta nel circuito si ottiene $i_2(t) = f_i / R$. Tale corrente è alternata ed ha valore massimo $i_{2,\max} = \frac{\mu_o L i_{\max} \omega}{2\pi R} \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4\pi 10^{-7} 10^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 314}{2\pi \cdot 1}$ 0.288=3.61nA.

5. La spira esterna genera un vettore induzione magnetica che nella regione dove è posta la spira interna può essere considerato praticamente uniforme di intensità $B_o = \frac{\mu_o I_B}{2b}$ (campo al centro della spira). Il flusso concatenato è quindi $\Phi_c(t) = \int B_o dS = B_o \pi a^2 = \frac{\mu_o \pi a^2}{2b} I_B(t)$. La corrente indotta nella spira interna si calcola con la legge di Faraday-Neumann-Lenz $I_A(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_c}{dt} = \left(\frac{\mu_o \pi^2 a^2 i_{b\max} f}{R \cdot b}\right) \sin(2\pi f t)$ ed ha valore massimo $i_{A\max} = \left(\frac{\mu_o \pi^2 a^2 i_{b\max} f}{R \cdot b}\right) = 2.48\ 10^{-11}$ A.