



FISICA

A.A. 2004-2005

Ingegneria Gestionale

Soluzioni della 11^a prova

1. Il teorema di Thevenin viene applicato ai capi del resistore R sul quale si vuole calcolare la potenza dissipata. La rete a monte del resistore viene quindi ridotta ad un generatore equivalente di Thevenin V_{th} con in serie una resistenza di Thevenin R_{th} (figura a). Il calcolo della tensione equivalente di Thevenin si ottiene dalla differenza $V_A - V_B$ a vuoto quando cioè A e B sono scollegati come in figura b. Le resistenze R_4 ed $R_2 + R_3$ sono in parallelo ed equivalgono alla resistenza complessiva

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4}$$

da cui $R_{eq} = 4 \text{ k}\Omega$. La corrente di questo circuito (figura c) costituito da una sola maglia è quindi $I = \frac{f}{R_1 + R_{eq}}$ da cui si ricava la tensione di

Thevenin $V_{th} = V_A - V_B = IR_{eq} = 6.67 \text{ V}$. Il calcolo della resistenza equivalente di Thevenin si ottiene invece cortocircuitando il generatore di tensione ed inviando una corrente di prova al capo A per vedere come attraversa il circuito uscendo infine da B (figura d). Si può notare come i tre rami di resistenze R_1 , $R_2 + R_3$, R_4 sono attraversati in parallelo da cui $\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4}$ e cioè $R_{th} = 1.33 \text{ k}\Omega$.

Dopo aver trovato i valori di V_{th} ed R_{th} ricolleghiamo tra A e B il resistore variabile R come in figura a. La corrente che attraversa il resistore è $I(R) = \frac{V_{th}}{R_{th} + R}$ che come è evidente è funzione di R . Conseguentemente anche la potenza dissipata sul resistore è funzione di R e vale $P(R) = I^2 R = V_{th}^2 \frac{R}{(R_{th} + R)^2}$. Dallo studio di funzione si ricava che la potenza è massima quando $R = R_{th} = 1.33 \text{ k}\Omega$. Per questo valore la potenza vale $P = V_{th}^2 / 4R_{th} = 8.34 \text{ mW}$.

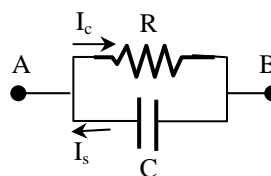
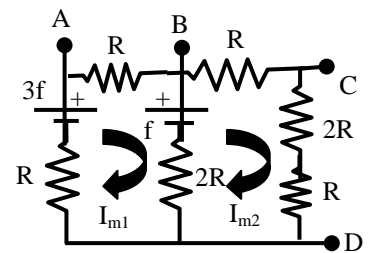
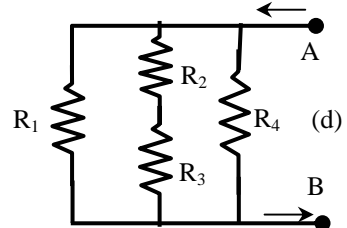
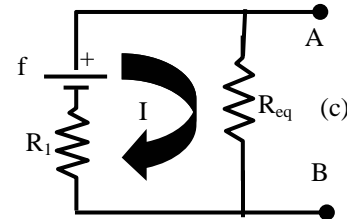
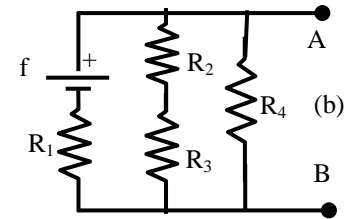
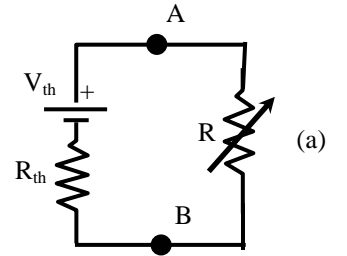
2. Il circuito è da lungo tempo nella configurazione in figura. Il processo di carica dei condensatori è da ritenersi completato; i condensatori possono essere assimilati a circuiti aperti dove non scorre corrente. Il circuito due maglie può essere risolto con il metodo delle correnti di maglia

$$\begin{pmatrix} 4R & -2R \\ -2R & 6R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2f \\ f \end{pmatrix} \text{ da cui } I_{m1} = \frac{7f}{10R}, \quad I_{m2} = \frac{4f}{10R}$$

dei condensatori si ottengono calcolando la caduta ohmica sui resistori che si trovano in parallelo ad essi e valgono rispettivamente $V_A - V_B = I_{m1}R = 0.7f = 3.5 \text{ V}$ ai capi di C_1 , mentre

$$V_C - V_D = I_{m2}3R = 1.2f = 6 \text{ V} \text{ ai capi di } C_2. \text{ Il rapporto di carica } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{(V_A - V_B)C_1}{(V_C - V_D)C_2} = \frac{3.5 \cdot 3}{6 \cdot 5} = 0.35.$$

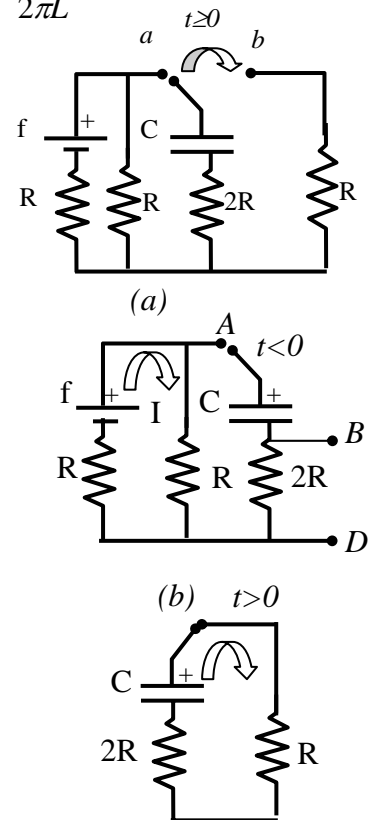
3. All'interno del condensatore considerato sono presenti due correnti: la corrente di conduzione ohmica a causa della resistività finita del dielettrico, e la corrente di spostamento che si avrebbe anche in un condensatore ideale. Il condensatore è quindi schematizzabile con un condensatore ideale con in parallelo un resistore a rappresentare le perdite ohmiche. Il circuito RC si scarica con un tempo caratteristico $\tau = RC$ dove per un condensatore cilindrico di lunghezza L e raggi delle armature R_1 (interno) ed R_2 (esterno)



la capacità vale $C = \varepsilon \frac{2\pi L}{\ln(R_2/R_1)}$, la resistenza $R = \rho \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{S} = \rho \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{2\pi r L} = \rho \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi L}$. Il

tempo caratteristico $\tau = \rho \varepsilon$ è quindi indipendente dai parametri geometrici.

4. Per lungo tempo, prima di $t=0$, la topologia del circuito è quella della configurazione (a). Il processo di carica nel condensatore procede con una corrente di carica che diminuisce gradualmente fino ad annullarsi dopo lungo tempo. Quindi poco prima di $t=0$ non scorre corrente né nel condensatore né sulla resistenza $2R$. La corrente circola quindi solo nella prima maglia dove $I = f/(R+R)$. Tale corrente crea sul resistore del ramo centrale una caduta di tensione ohmica $V_A - V_D = RI = f/2$. D'altra parte sul terzo ramo l'assenza di corrente fa sì che siano uguali i due potenziali $V_B = V_D$. Conseguentemente la tensione ai capi del condensatore vale $\Delta V_c = V_A - V_B = V_A - V_D = f/2$ cui corrisponde il valore di energia immagazzinata $U = (\Delta V_c)^2 C/2 = f^2 C/8$. Quando per $t=0$ la topologia del circuito diviene quella della configurazione (b) il condensatore subisce un processo di scarica che parte dal valore di energia immagazzinata del caso precedente $U_{in} = f^2 C/8 = 50 \mu J$ e lo porta progressivamente a zero $U_{fin} = 0$ per $t \rightarrow \infty$. La dinamica del processo di scarica avviene con un tempo caratteristico $\tau = 3RC$ e con una legge di decadimento esponenziale della tensione sul condensatore $\Delta V_c(t) = (f/2) \cdot e^{-t/\tau}$ che partendo dal valore $f/2$ tende progressivamente ad annullarsi. Al tempo t_o l'energia immagazzinata si dimezza divenendo $U(t_o) = f^2 C/16$ cui corrisponde la tensione $\Delta V_c(t_o) = f/\sqrt{8}$. Il tempo t_o si ricava come segue: $\Delta V_c(t_o) = (f/2) \cdot e^{-t_o/\tau} = f/\sqrt{8}$, da cui $e^{-t_o/\tau} = 1/\sqrt{2}$, e quindi $t_o = \tau \ln \sqrt{2} = 3RC \ln \sqrt{2} = 1.04 ms$.



5. Prima dell'apertura dell'interruttore per $t < 0$ (figura a) il circuito è in condizione stazionaria, il condensatore è carico e si comporta come un circuito aperto. La batteria, posizionata fra i punti T e B, alimenta le due correnti $I_1 = V_o/(R_1 + R_2) = 1 mA$ ed $I_2 = V_o/R_3 = 2 mA$. La differenza di potenziale ai capi del condensatore $\Delta V_c = V_A - V_B$ coincide con la caduta di potenziale ohmica ai capi della resistenza R_2 da cui $\Delta V_c = V_A - V_B = I_1 R_2 = V_o (R_2/(R_1 + R_2)) = 3V_o/4 = 6V$ che rappresenta la tensione ai capi del condensatore all'apertura ΔV_o ($t=0$). Dopo l'apertura dell'interruttore la batteria V_o viene scollegata ed il condensatore si scarica sulle 3 resistenze (vedi figura b) che vengono viste dal condensatore come una resistenza equivalente $R_{eq} = (R_1 + R_3) // R_2 = \frac{(R_1 + R_3)R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 3k\Omega$

(Infatti la corrente del condensatore I_c si ripartisce in una corrente che attraversa R_2 ed un'altra che attraversa in serie R_1 ed R_3). La tensione ai capi del condensatore per $t > 0$ segue la legge $\Delta V_c(t) = \Delta V_o \exp[-t/\tau]$ dove il tempo di scarica $\tau = R_{eq}C = 3ms$ ed il tempo t^* si trova dalla relazione $t^* = \tau \ln(\Delta V_o/\Delta V^*) = \tau \ln(4) = 4.16 ms$.

