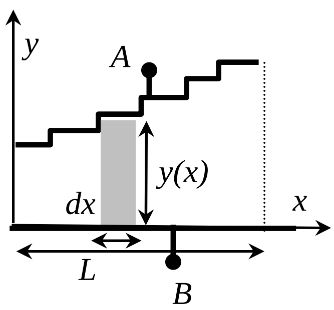
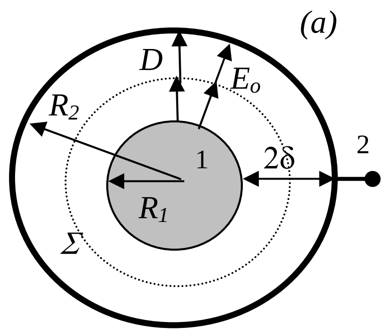
FISICA

A.A. 2004-2005
Ingegneria Gestionale
Soluzioni 10 prova

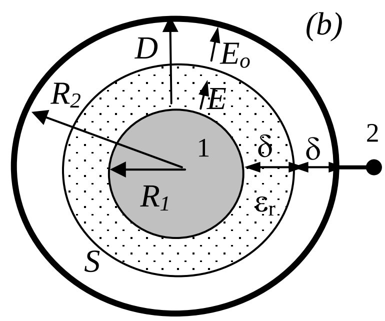


1. L'armatura obliqua superiore A può pensarsi scomponibile in una serie infinita di gradini di lunghezza dx ed altezza dy. Ciascun gradino forma con l'armatura inferiore B un condensatore piano (regione grigia) di sezione adx, e capacità $dC = \varepsilon_O\, adx/y$, dove la distanza fra le armature è variabile $y(x) = d + x \cdot tg\beta$. La capacità dell'intera struttura è data dalla somma di tutte le capacità dC di tutti gli infiniti condensatori piani in parallelo, da cui si ottiene

$$C = \int dC = \int_0^L \varepsilon_O \frac{a}{y} dx = \varepsilon_O a \int_0^{a\cos\beta} \frac{dx}{d + x \cdot tg\beta} = \frac{\varepsilon_O a}{tg\beta}\left[\ln\left|d + x \cdot tg\beta\right|\right]_0^{a\cos\beta} = \frac{\varepsilon_O a}{tg\beta}\ln\left(1 + \frac{a sin\beta}{d}\right)$$



2. In un condensatore sferico in presenza o meno del dielettrico (casi *a,b*) le linee di forza del campo elettrico E *e* dello spostamento elettrico D sono sempre radiali dirette dalla carica positiva $+Q_{lib}$ verso la carica negativa $-Q_{lib}$. Di particolare interesse è il vettore spostamento elettrico D. Il suo flusso uscente dalla superficie sferica Σ di raggio $R_1<r<R_2$ dipende dalla sola carica libere interna $+Q_{lib}$ Quindi $\Phi_\Sigma\left(\vec{D}\right) = \int_\Sigma \vec{D} \bullet \hat{n}_{ext} dS = D\left(4\pi r^2\right) = Q_{lib}$, da cui si ricava l'espressione del vettore spostamento elettrico $D(r) = Q_{lib}/4\pi r^2$ valida per tutti i punti interni del condensatore ($R_1<r<R_2$). Si noti come l'espressione non risenta della presenza del dielettrico e sia valida in entrambi i casi *a,b*. Il campo elettrico invece ha due valori diversi: nel vuoto vale $E_o(r) = D(r)/\varepsilon_o = Q_{lib}/4\pi\varepsilon_o r^2$ mentre in presenza di dielettrico si abbassa al valore $E(r) = D(r)/\varepsilon_o\varepsilon_r = Q_{lib}/4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r r^2$. In generale la differenza di potenziale fra i due conduttori si ottiene integrando il campo elettrico lungo un percorso radiale da R_1 ad R_2; nel caso *(a)* in assenza di dielettrico si ottiene $V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E_o dr = \frac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o}\frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2}$ dove è stato integrato il campo elettrico nel vuoto E_o. Nel caso *(b)* invece il valore di E nel dielettrico si abbassa riducendo complessivamente la differenza di potenziale



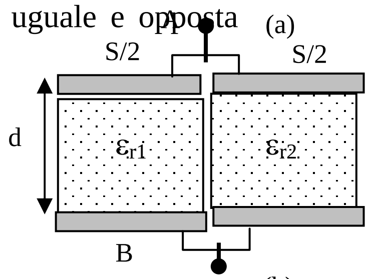
$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_1+\delta} E dr + \int_{R_1+\delta}^{R_2} E_0 dr = \frac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o}\left(\int_{R_1}^{R_1+\delta}\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{dr}{r^2} + \int_{R_1+\delta}^{R_2}\frac{dr}{r^2}\right) = \frac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\delta}{R_1 \cdot (R_1+\delta)} + \frac{R_2 - R_1 - \delta}{(R_1+\delta)\cdot R_2}\right).$$

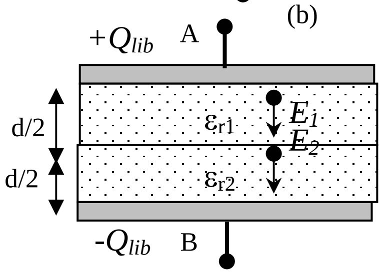
Imponendo che il rapporto fra le due differenze di potenziale (caso *b*/caso *a*) debba valere 0.8 si ricava il valore di ε_r: $\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\delta}{R_1 \cdot (R_1+\delta)} + \frac{\delta}{(R_1+\delta)\cdot R_2} = 0.8\frac{2\delta}{R_1 \cdot R_2}$ da cui semplificando per δ,

$$\frac{1}{\varepsilon_r} = R_1 \cdot (R_1+\delta)\left[\frac{1.6}{R_1 \cdot R_2} - \frac{1}{(R_1+\delta)\cdot R_2}\right] = R_1 \cdot (R_1+\delta)\left[\frac{0.6R_1 + 1.6\delta}{(R_1+\delta)\cdot R_2 \cdot R_1}\right] = 0.6\frac{R_1}{R_2} + 1.6\frac{\delta}{R_2} = 0.7$$

da cui si ricava $\varepsilon_r = 1.43$. La carica libera si ricava dal valore di $\Delta V_o = 360\pi$ nel caso *(a)* da cui $Q_{lib} = 4\pi\varepsilon_o\Delta V_o\frac{R_1 R_2}{2\delta} = 5.02\ 10^{-10}\ C$. Per determinare la carica di polarizzazione bisogna prima ricavare l'espressione del vettore intensità di polarizzazione nel dielettrico $P = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}D = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{Q_{lib}}{4\pi r^2}$. La carica di polarizzazione Q_{pol} sulla superficie S esterna del dielettrico si ottiene integrando su S la densità $\sigma_{pol} = \vec{P} \bullet \hat{n}_{ext} = \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} D$ ossia calcolando il flusso di P uscente da S che vale $Q_{pol} = \int_S \vec{P} \bullet \hat{n}_{ext} dS = \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \int_S \vec{D} \bullet \hat{n}_{ext} dS = \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} Q_{lib} = 0.3 Q_{lib} = 1.67 \quad 10^{-10} \quad C.$

Ovviamente sulla superficie interna del dielettrico sarà posizionata una carica uguale e opposta $-Q_{pol}$ che rende complessivamente neutro il dielettrico





3. Un condensatore a facce piane e parallele ha nel vuoto capacità $C_o = \varepsilon_o S/d$ dove S è la sua sezione e d la distanza fra le armature. Quando viene riempito con due dielettrici di costanti dielettriche relative ε_{r1} ε_{r2} come in figura *a*, la capacità complessiva può pensarsi come il parallelo delle due capacità che competono ai due condensatori di metà superficie *S/2*:

$$C_a = C_1 + C_2 = \varepsilon_o \varepsilon_{r1} \frac{S/2}{d} + \varepsilon_o \varepsilon_{r2} \frac{S/2}{d} = \varepsilon_o \frac{S}{d}\left(\frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2}\right) = C_o \left(\frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2}\right) =$$

$=1.5\ C_o = 15\mu F$. Nel caso (*b*), posta sul conduttore A la carica Q_{lib},, i campi elettrici nei due dielettrici sono rispettivamente a $E_1 = \sigma_{lib}/\varepsilon_o \varepsilon_{r1} = Q_{lib}/S\varepsilon_o \varepsilon_{r1}$ e $E_2 = Q_{lib}/S\varepsilon_o \varepsilon_{r2}$ (campi uniformi). La differenza di potenziale che si instaura fra le due armature è $V_A - V_B = \int_A^B E dl = E_1 \dfrac{d}{2} + E_2 \dfrac{d}{2} = \dfrac{Q_{lib} d}{2S\varepsilon_o} \dfrac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}$

e quindi la capacità si calcola dal rapporto

$C_b = \dfrac{Q_{lib}}{V_A - V_B} = \varepsilon_o \dfrac{S}{d}\left(\dfrac{2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}\right) = C_o \left(\dfrac{2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}\right)$. Ovviamente $C_a > C_b$. Infatti ciò porta a $\left(\dfrac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2}\right) > \left(\dfrac{2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}\right)$ ossia $(\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})^2 > 0$ (sempre vera se $\varepsilon_{r1} \neq \varepsilon_{r2}$).

4. Il campo elettrico è non nullo solo fra le armature per $R_1 \le r \le R_2$ e vale $E(r) = Q/2\pi\varepsilon_o\varepsilon_r rL$. Il suo valore massimo (per r=R_1) non deve eccedere la rigidità dielettrica da cui $E(R_1) \le E_r$. Questa disequazione porta a determinare la carica limite massima $Q \le Q_{\max} = 2\pi\varepsilon_o\varepsilon_r R_1 L E_r = 0.33\mu C$. Essendo la capacità C=11.2pF, l'energia massima immagazzinata diviene $U = Q_{\max}^2/2C = 5mJ$

5. Il vettore spostamento elettrico D è uniforme in tutto lo spazio, sia dentro che fuori il dielettrico. La sua espressione può essere calcolata facilmente fuori $D=\varepsilon_o E_o$. Il vettore intensità di polarizzazione P è non nullo solo all'interno con valore $P(x) = \dfrac{\varepsilon_r(x) - 1}{\varepsilon_r(x)} D = \dfrac{\varepsilon_r(x) - 1}{\varepsilon_r(x)} \varepsilon_o E_o$. Le densità di carica di polarizzazione di superficie e di volume sono (una volta calcolati $\varepsilon_{rA}=3$, $\varepsilon_{rB}=1.5$)

$$\begin{cases} \sigma_{pol}(x=0) = \vec{P}_A \cdot \hat{n}_A = -\dfrac{\varepsilon_{rA} - 1}{\varepsilon_{rA}} \varepsilon_o E_o = -\dfrac{2}{3}\varepsilon_o E_o \\ \sigma_{pol}(x=d) = \vec{P}_B \cdot \hat{n}_B = \dfrac{\varepsilon_{rB} - 1}{\varepsilon_{rB}} \varepsilon_o E_o = \dfrac{1}{3}\varepsilon_o E_o \\ \rho_{pol} = -div\vec{P} = -\dfrac{dP}{dx} = -\dfrac{d}{dx}\left(1 - \dfrac{x+d}{3d}\right)\varepsilon_o E_o = \dfrac{\varepsilon_o E_o}{3d} \end{cases}$$