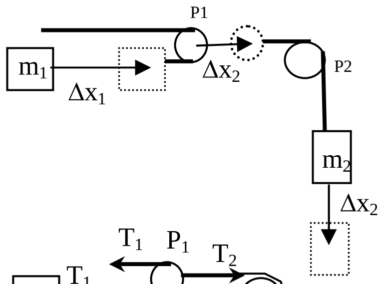
FISICA

A.A. 2004-2005
Ingegneria Gestionale Canale M-Z
1° appello del 25 Giugno 2005

1. Ad uno spostamento Δx_2 della massa m_2 corrisponde un ugual spostamento della puleggia P_1 ed uno spostamento doppio $\Delta x_1=2\Delta x_2$ della massa m_1 Derivando gli spostamenti nel tempo si ottengono facilmente **la relazione fra le accelerazioni**



$$a_1 = 2a_2$$

2° principio sulla massa m_2

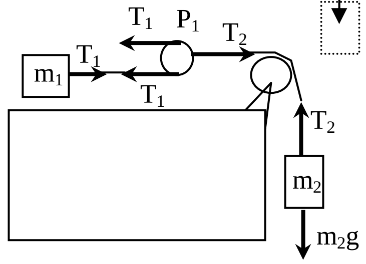
$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

2° principio sulla massa m_1

$$T_1 = m_1 a_1$$

Equilibrio fra le tensioni applicate alla puleggia P_1

$$T_2 = 2T_1$$



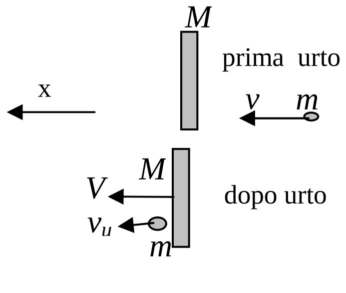
da cui si derivano le quantità:

$$a_2 = g\frac{m_2}{m_2 + 4m_1} = \mathbf{0.684\ m/s^2} \qquad a_1 = \mathbf{1.367\ m/s^2}$$

$$T_2 = \mathbf{27.3\ N} \qquad T_1 = \mathbf{13.7\ N}$$

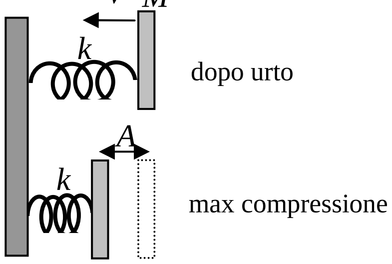
2. Il problema richiede l'analisi separata di due fenomeni fisici consecutivi:
a) il processo d'urto anelastico tra il proiettile ed il blocco in cui viene conservata la quantità di moto del sistema.
b) il susseguente fenomeno di compressione della molla in cui, in assenza di attriti, viene conservata l'energia meccanica.

a) **Conservazione della quantità di moto lungo l'asse x**.
v: velocità proiettile prima dell'urto
v_u: velocità proiettile dopo l'urto
V: velocità del blocco dopo l'urto



$$mv = mv_u + MV \qquad \text{da cui} \qquad v_u = v - \left(\frac{M}{m}\right)V$$

b) **Conservazione dell'energia meccanica**



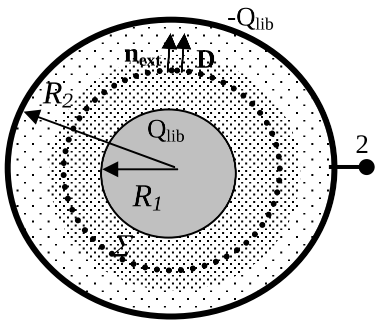
$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}kA^2 \qquad \text{da cui} \qquad V = A\sqrt{k/M}$$

Combinando le espressioni si ottiene

$$v_u = v - A\frac{\sqrt{kM}}{m} = 210.6\ \text{m/s}$$

$$E_d = \frac{1}{2}mv^2 - \left(\frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}mv_u^2\right) = 228 \text{ J}$$

3. Vettore spostamento elettrico fra le armature

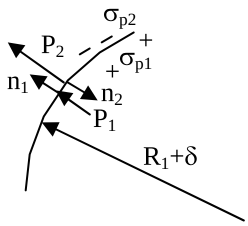


Applicando la legge di Gauss sulla superficie interna Σ di raggio $R_1<r<R_2$

$$\Phi_\Sigma\left(\vec{D}\right) = \int_\Sigma \vec{D} \bullet \hat{n}_{ext} dS = D\left(4\pi r^2\right) = Q_{lib} \qquad \text{da cui} \qquad D(r) = \frac{Q_{lib}}{4\pi r^2}$$

Il campo elettrico nei due dielettrici

$$\begin{cases} R_1 \le r \le R_1 + d & E_1 = \dfrac{D}{\varepsilon_o \varepsilon_{r1}} = \dfrac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_{r1}r^2} \\ R_1 + d \le r \le R_2 & E_2 = \dfrac{D}{\varepsilon_o \varepsilon_{r2}} = \dfrac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_{r2}r^2} \end{cases}$$



La differenza di potenziale fra le due armature

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_1+d} E_1 dr + \int_{R_1+d}^{R_2} E_2 dr = \frac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1+\delta}\right) + \frac{1}{\varepsilon_{r2}}\left(\frac{1}{R_1+\delta} - \frac{1}{R_2}\right)\right]$$

$$= \frac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o}\left[\left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}R_1} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}R_2}\right)\left(\frac{\delta}{R_1+\delta}\right)\right]$$

La **carica libera** quindi vale $Q_{lib} = \dfrac{4\pi\varepsilon_o\left(V_1 - V_2\right)}{\left(\dfrac{1}{\varepsilon_{r1}R_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_{r2}R_2}\right)}\left(1 + \dfrac{R_1}{\delta}\right) =$ **317 pC**

Il vettore intensità di polarizzazione vale

$$\begin{cases} R_1 \le r \le R_1 + d & P_1 = \left(\dfrac{\varepsilon_{r1} - 1}{\varepsilon_{r1}}\right)D = \left(\dfrac{\varepsilon_{r1} - 1}{\varepsilon_{r1}}\right)\dfrac{Q_{lib}}{4\pi r^2} \\ R_1 + d \le r \le R_2 & P_2 = \left(\dfrac{\varepsilon_{r2} - 1}{\varepsilon_{r2}}\right)D = \left(\dfrac{\varepsilon_{r2} - 1}{\varepsilon_{r2}}\right)\dfrac{Q_{lib}}{4\pi r^2} \end{cases}$$

La densità di carica elettrica all'interfaccia $r=R_1+\delta$

$$\sigma_{pol} = \sigma_{pol1} + \sigma_{pol2} = \vec{P}_1 \cdot \hat{n}_1 + \vec{P}_2 \cdot \hat{n}_2 = P_1 - P_2$$

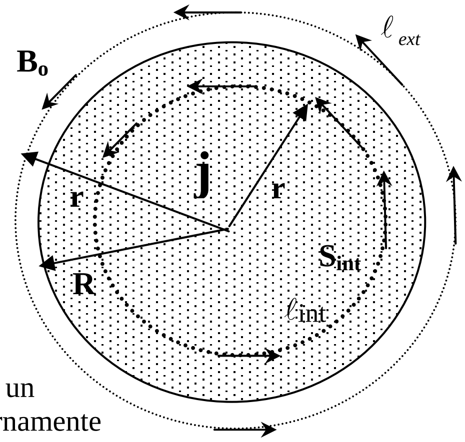
che integrata sulla superficie dell'interfaccia sferica

$Q_{pol} = Q_{lib}\left(\dfrac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}\right) = -0.15 \quad Q_{lib}$ **= -47.6 pC**

Nel caso di inversione dei dielettrici

Q_{lib}=370 pC, Q_{pol}=55.6 pC

4. Il calcolo dell'induzione magnetica B_o per un singolo conduttore si ottiene a partire dalla legge di circuitazione di Ampere applicato ad una circonferenza ℓ di raggio r concentrica al cavo.



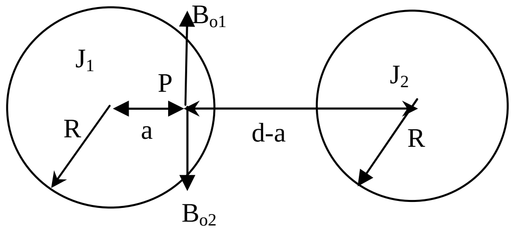
Per punti interni al cavo *r<R*

$$\oint_{\ell\,\mathrm{int}} \vec{B}_o \cdot d\vec{l} = B_o(2\pi r) = \mu_o \int_{S\,\mathrm{int}} \vec{j} \cdot \hat{n} dS = \mu_o j \pi r^2 \text{ da cui } B_o(r) = \frac{\mu_o jr}{2}$$

Per punti esterni al cavo *r>R*

$$\oint_{\ell ext} \vec{B}_o \cdot d\vec{l} = B_o(2\pi r) = \mu_o \int_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS = \mu_o j \pi R^2 \quad \text{da cui} \quad B_o(r) = \frac{\mu_o jR^2}{2r}$$

Il vettore induzione magnetica nel punto P risulta quindi dalla sovrapposizione di un vettore B_{o1} prodotto internamente al primo cavo e da un vettore B_{o2} prodotto esternamente al secondo cavo.

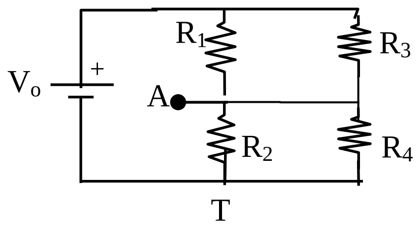


$$B_o = B_{o1} - B_{o2} = \frac{\mu_o j_1 a}{2} - \frac{\mu_o j_2 R^2}{2(d-a)}$$

Dalla condizione di annullamento della somma dei due si ottiene

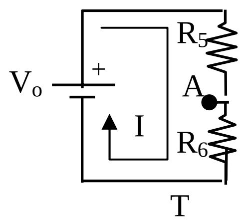
$$j_2 = j_1 \frac{a(d-a)}{R^2} = 2.04\, j_1 = 20.4 \text{ A/m}^2$$

5. Prima dell'apertura dell'interruttore per *t<0* il circuito è in condizione stazionaria, il condensatore è carico e si comporta come un circuito aperto. La corrente uscente dal generatore attraversa il parallelo $R_5=R_1//R_3$



$R_5=R_1//R_3=\dfrac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = 1.33$ kΩ e successivamente (in serie) il parallelo $R_6=R_2//R_4=\dfrac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4} = 2.4$ kΩ. La corrente di maglia è quindi $I = \dfrac{V_o}{R_5 + R_6}$ ed il condensatore si trova alla differenza di potenziale anteriore all'apertura

$$\Delta V_c(0) = V_A - V_T = IR_6 = V_o \frac{R_6}{R_5 + R_6} = 5.14 \text{ V}.$$



All'apertura il generatore viene disattivato ed il condensatore si scarica solo sul parallelo $R_6=R_2//R_4$. La differenza di potenziale ai capi del condensatore segue per t>0 la legge $\Delta V_c(t) = \Delta V_c(0)\exp[-t/\tau]$ con $\tau = R_6 C = 2.4ms$ ed il tempo *t** si trova dalla relazione $t^* = \tau \ln(\Delta V_c(0)/\Delta V^*) = \tau \ln(5.14) = 3.93\,\mathrm{ms}$.