Esercizi sulla Statica dei Fluidi
A cura del Prof. T.Papa

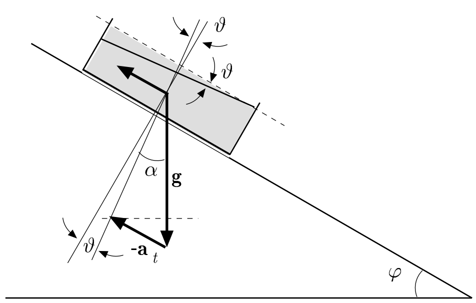
1. Un recipiente contenente un liquido scivola lungo un piano inclinato di un angolo φ rispetto all'orizzontale. Il coefficiente di attrito cinetico tra recipiente e piano è $\mu = 0,15$. Si determini l'angolo θ che la superficie libera del liquido forma col piano inclinato durante il moto del recipiente.

Nel riferimento solidale col recipiente si ha equilibrio tra le forze di superficie e le forze di volume; queste ultime dovute al peso del liquido e alla forza di trascinamento. La somma di tali forze è ortogonale alla superficie isobarica (equipotenziale). Si verifica facilmente che nel caso in cui non fosse presente attrito, la superficie libera del liquido sarebbe parallela al piano inclinato. Infatti l'accelerazione di trascinamento è in modulo $a_t = g \sin\varphi$, opposta all'accelerazione con cui si muove il recipiente. La somma dei vettori $\mathbf{g}$ e $-\mathbf{a}_t$ è ortogonale al piano inclinato e quindi alla superficie libera del liquido.

Nel caso in cui sia presente l'attrito l'accelerazione di trascinamento risulta, in modulo,

$$a_t = g \sin\varphi - \mu g \cos\varphi. \tag{1}$$

La somma dei vettori $\mathbf{g}$ e $-\mathbf{a}_t$, dev'essere ortogonale alla superficie libera del liquido ma non è ortogonale al piano inclinato.



Si consideri l'angolo α che la forza peso forma con la normale alla superficie libera, vedi figura; esso è dato dalla relazione

$$\tan\alpha = \frac{a_t \cos\varphi}{g - a_t \sin\varphi}. \tag{2}$$

Si verifica immediatamente che in assenza di attrito $\tan\alpha = \tan\varphi$. Poiché $\theta = \varphi - \alpha$, si ha:

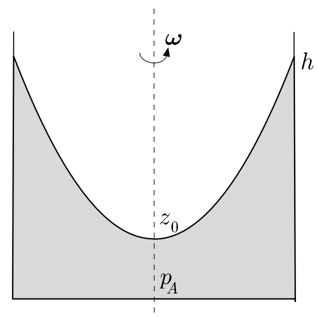
$$\tan\theta = \tan(\varphi - \alpha) = \frac{\tan\varphi - \tan\alpha}{1 + \tan\varphi \tan\alpha}.$$

Sostituendo nella precedente relazione le (1) e (2), si ottiene

$$\tan\theta = \mu, \qquad \theta = 8,53°.$$

Il risultato è interessante ma non sorprendente; infatti nell'accelerazione di trascinamento interviene la forza di attrito che è proporzionale a μ.

2. Un recipiente cilindrico di raggio $R = 25\,cm$ contenente acqua, ruota attorno al proprio asse, disposto verticalmente, compiendo $1,5\,giri/s$. Sapendo che la pressione minima sul fondo del recipiente è $p_A = 1,02\,atm$, si determini l'altezza h che l'acqua raggiunge in corrispondenza alla parete. Si assuma che la pressione esterna p_0 sia uguale ad una atmosfera.



Nel riferimento ruotante si ha equilibrio tra le forze di pressione e le forze di volume. Le superfici equipotenziali, e quindi la superficie libera dell'acqua, sono paraboloidi di rotazione (T. Papa; Lezioni di Fisica, Meccanica, pag. 427) di equazione

$$g(z - z_0) = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2), \tag{1}$$

dove z_0 è l'ordinata del vertice del paraboloide. La pressione sul fondo, p_A, è minima in corrispondenza all'asse di rotazione e massima in corrispondenza alla parete, dove l'acqua assume l'altezza h. Pertanto dalla (1) si ha

$$g(h - z_0) = \frac{1}{2}\omega^2 R^2,$$

e moltiplicando per ρ:

$$\rho g h - \rho g z_0 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2. \tag{2}$$

D'altra parte:

$$p_A = \rho g z_0 + p_0, \quad \Rightarrow \quad \rho g z_0 = p_A - p_0.$$

Sostituendo nella (2) si ottiene:

$$\rho g h = p_A - p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2, \quad \Rightarrow \quad h = \frac{p_A - p_0}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{\omega^2 R^2}{g} = 0,49\, m$$

3. Un palloncino di gomma, che può sopportare una sovrappressione massima $\Delta p = 0,66\, atm$, è riempito con elio alla pressione atmosferica. Nell'ipotesi di atmosfera isoterma secondo cui la densità dell'aria obbedisce alla legge di Boyle $\rho = \rho_0 p/p_0$, dove ρ_0 e p_0 sono la densità e la pressione al livello del mare, si calcoli a quale altezza dal suolo il palloncino esploderà. ($\rho_0 = 1,29\, kg/m^3$, $p_0 = 1\, atm$)

Fissato un asse z di riferimento volto in alto, la variazione infinitesima di pressione è data da

$$dp = -\rho g dz = -\frac{\rho_0}{p_0} p g dz.$$

Separando le variabili ed integrando si ha

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dz, \quad \Rightarrow \quad \ln p = -\frac{\rho_0}{p_0} g z + C,$$

dove C è una costante pari a $\ln p_0$. Pertanto

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} g z, \quad \Rightarrow \quad p = p_0 e^{-\rho_0 g z/p_0}. \tag{1}$$

Ma la pressione alla quale il palloncino esplode è $p_0 - \Delta p$, quindi sostituendo nella prima delle (1) si trae:

$$\ln\frac{p_0 - \Delta p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} g z, \quad \Rightarrow \quad z = \frac{p_0}{g\rho_0}\ln\frac{p_0}{p_0 - \Delta p} = 8,5\, km.$$

4. Un recipiente a pareti verticali poggia su un piano orizzontale ed è rempito, fino all'altezza $h = 25\,cm$, con una massa d'acqua $m = 30\,kg$. In esso viene posto a galleggiare un cubo di ghiaccio di spigolo $l = 20\,cm$. Si determini la pressione sul fondo, prima e dopo la fusione del ghiaccio (densità del ghiaccio $\rho_{gh} = 940\,kg/m^3$).

Dalla definizione di pressione come rapporto tra forza normale e superficie, si deduce che la pressione sul fondo del recipiente è la stessa prima e dopo la fusione del ghiaccio;

$$p = p_0 + \frac{m + m_{gh}}{A} g, \tag{1}$$

dove p_0 è la pressione atmosferica ed A la superficie del fondo. Poiché

$$A = \frac{V}{h} = \frac{m}{\rho_a h},$$

dove ρ_a è la densità dell'acqua, la (1) si scrive:

$$p = p_0 + (m + \rho_{gh} l^3) g \frac{h}{m} \rho_a = p_0 + 3064\,N/m^2.$$

5. Un'autocisterna completamente piena di un liquido di densità $\rho = 850\,kg/m^3$ viaggia su una strada piana con velocità costante. Ad un certo istante essa frena con accelerazione costante $a = 1,5\,m/s^2$. Sapendo che la lunghezza dell'autocisterna è $l = 7\,m$ e l'altezza del liquido in quiete è $z_0 = 1,5\,m$, determinare il valore della pressione massima esercitata dal liquido durante la frenata.

Nel riferimento x-z dell'autocisterna, fintanto che l'accelerazione impartita dalla frenata è costante, si ha equilibrio tra le forze di pressione e le forze di volume:

$$\nabla p = \mathbf{F} + \mathbf{F}_t,$$

dove $\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}_t$ sono rispettivamente la somma delle forze reali e delle forze di trascinamento. Nel caso del problema, la forza peso e la forza di trascinamento destata dalla frenata $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$. Se l'asse x del riferimento è positivo nel verso del moto, essendo l'accelerazione negativa, tale forza è positiva e spinge il liquido contro la parete anteriore. La precedente relazione si scrive:

$$\nabla p = -\rho g \mathbf{k} + \rho a_t \mathbf{i},$$

che dà luogo a

$$\nabla p = \nabla(\rho a_t x - \rho g z), \quad \Rightarrow \quad \nabla(p - \rho a_t x + \rho g z) = 0.$$

Si trae:

$$p - \rho a_t x + \rho g z = cost, \tag{1}$$

in cui, per $x = 0$, $z = z_0$, $p = p_0$ (pressione atmosferica),

$$cost = p_0 + \rho g z_0.$$

Pertanto la (1) diventa,

$$p = \rho a_t x - \rho g z + \rho g z_0 + p_0. \tag{2}$$

La pressione è massima per $x = l$ e $z = 0$:

$$p_{max} = \rho a_t l + \rho g z_0 + p_0 = 122720\,N/m^2.$$

Questo risultato è corretto se si suppone l'autocisterna completamente piena di liquido incompressibile e se essa è munita di un opportuno dispositivo che mantiene la pressione p_0 (atmosferica) alla superficie libera del liquido.

Se l'autocisterna fosse aperta, con pareti sufficienetemente alte, le superfici isobariche (equipotenziali) vanno ottenute assegnando i corrispondenti valori di p nella (2). In particolare, ponendo $p = p_0$, si ha l'equazione della superficie libera:

$$\rho g z = \rho a_t x + \rho g z_0' \quad \Rightarrow \quad z = \frac{a_t}{g} x + z_0', \tag{3}$$

dove z_0' è l'altezza minima assunta dal liquido (parete posteriore).

La (3) è l'equazione di un piano inclinato di un angolo

$$\tan\theta = \frac{a_t}{g}, \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\frac{a_t}{g}.$$

Per trovare le altezze z_0' (parete posteriore) ed h (parete anteriore) che assume il liquido (incompressibile) durante la frenata, si osservi che il suo volume rimane lo stesso; quindi, qualunque sia la sezione trasversale del serbatoio, la sezione mediana longitudinale, prima e durante la frenata, è costituita da un rettangolo e da un trapezio di aree uguali:

$$z_0 l = \frac{1}{2}(h + z_0')l, \quad z_0' = 2z_0 - h. \tag{4}$$

pertanto la (3) diventa,

$$z = \frac{a_t}{g} x + 2z_0 - h.$$

Ponendo $z = h$, $x = l$, si ha:

$$h = \frac{a_t}{g} l + 2z_0 - h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{l}{2}\frac{a_t}{g} + z_0 = 2,03\, m \tag{5}$$

La pressione massima risulta

$$p_{max} = \rho g h + p_0 = \frac{l}{2}\rho a_t + \rho g z_0 + p_0 = 118254\, N/m^2.$$

Il valore della pressione è leggermente inferiore a quello trovato prima (autocisterna piena). Si deduce che in quel caso la sovrappressione è dovuta alla reazione esercitata dalla parete superiore del serbatoio.

Si osservi che, tenuto conto della (5), la (4) fornisce:

$$z_0' = z_0 - \frac{l}{2}\frac{a_t}{g} = 0,96\, m.$$

6. Una sfera omogenea, di volume $V = 25\, dm^3$ e densità ρ, è trattenuta, completamente immersa nell'acqua di un grande recipiente, da una funicella ideale ancorata al fondo, soggetta ad una tensione $T = 20\, kg_p$. A causa della rottura della funicella, la sfera emerge raggiungendo una nuova posizione di equilibrio. Determinare la frazione di sfera emergente e la variazione della reazione vincolare esercitata dal fondo.

Detta ρ_a la densità dell'acqua, la tensione della funicella è data dalla differenza tra la spinta d'Archimede ed il peso della sfera,

$$T = \rho_a V g - \rho V g, \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_a - \frac{T}{Vg} = 200\, kg/m^3.$$

Quando la sfera emerge, una parte rimane immersa. Detto V_1 il volume di tale parte, si ha:

$$\rho_a V_1 g = \rho V g \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{\rho V}{\rho_a}.$$

pertanto,

$$\frac{V - V_1}{V} = 1 - \frac{V_1}{V} = 1 - \frac{\rho}{\rho_a} = 0,8.$$

La variazione della reazione vincolare è ovviamente:

$$\Delta R = T = 20\,kg_p = 196,2\,N.$$

7. Sul fondo di una piscina piena d'acqua è ancorata una fune ideale alla quale sono fissate, immerse nell'acqua e a distanze diverse, due boe A e B, entrambe di massa $m = 3\,kg$ e densità media ρ pari ad un terzo di quella dell'acqua. Determinare le tensioni τ_1 e τ_2 nei tratti di fune compresi tra il fondo e la prima boa A e tra la prima e la seconda boa B.

Fissato un asse di riferimento volto in basso, sulla boa A agiscono le forze: τ_1, τ_2, peso e spinta d'Archimede; per l'equilibrio si ha,

$$\tau_1 - \tau_2 + mg - m_a g = 0,$$

dove m_a è la massa d'acqua spostata. Detta ρ_a la densità dell'acqua, risulta,

$$m_a = m\frac{\rho_a}{\rho};$$

quindi la relazione precedente diventa:

$$\tau_1 - \tau_2 + mg - m\frac{\rho_a}{\rho}g = 0. \tag{1}$$

D'altra parte per l'equilibrio della boa B si ha:

$$\tau_2 + mg - m\frac{\rho_a}{\rho}g = 0, \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = mg\left(\frac{\rho_a}{\rho} - 1\right) = 58,8\,N.$$

Sostituendo nella (1) si ottiene:

$$\tau_1 = 2mg\left(\frac{\rho_a}{\rho} - 1\right) = 2\tau_2 = 117,6\,N.$$

8. Un corpo, a pressione atmosferica, ha densità $\rho = 960\,kg/m^3$ e modulo di compressibilità $K = 2\cdot 10^7\,Pa$. Determinare la minima profondità dell'acqua alla quale si deve immergere il corpo perché affondi spontaneamente. Considerare l'acqua come liquido incompressibile.

La variazione di pressione è legata alla variazione relativa di volume dalla relazione,

$$\Delta p = -K\frac{\Delta V}{V},$$

dove K è il modulo di compressibilità. Poiché

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta\rho}{\rho'},$$

dove ρ' è la densità assunta dal corpo a causa della compressione, si ottiene

$$\Delta p = K\frac{\Delta\rho}{\rho'}, \quad \Rightarrow \quad \rho_a g h = K\frac{\rho' - \rho}{\rho'},$$

in cui ρ_a è la densità dell'acqua. Pertanto la profondità minima alla quale bisogna immergere il corpo viene determinata quando quest'ultimo assume la densità dell'acqua:

$$\rho_a g h_m = \frac{\rho_a - \rho}{\rho_a}, \quad \Rightarrow \quad h_m = \frac{K}{\rho_a g}\frac{\rho_a - \rho}{\rho_a} = 81,63\,m$$

In queste condizioni il corpo è in equilibrio; appena più in basso di h_m esso affonda.

9. Un'asta di legno uniforme di lunghezza l e massa $m = 0,3\,kg$ è libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per un estremo, disposto ad un'altezza $l/2$ sopra la superficie libera dell'acqua contenuta in un grande recipiente. Sapendo che la densità del legno è $\rho = 600\,kg/m^3$, determinare la reazione vincolare sull'asse quando l'asta è in posizione d'equilibrio.

La reazione è

$$R = mg - S,$$

dove S è la spinta d'Archimede. Detta A la sezione dell'asta, ρ_a la densità dell'acqua ed l_{im} la lunghezza immersa dell'asta, si ha

$$R = \rho A l g - \rho_a A l_{im} g = A l g \left(\rho - \frac{l_{im}}{l}\rho_a\right) = mg\left(1 - \frac{l_{im}}{l}\frac{\rho_a}{\rho}\right).$$

La posizione verticale dell'asta non è di equilibrio stabile, in quanto il suo baricentro è sopra il centro di spinta. In questa posizione ($l_{im} = l/2$), risulta:

$$R_1 = mg\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\rho_a}{\rho}\right) = 0,5\,N.$$

Poiché l'asta è vincolata a ruotare, posizioni di equilibrio stabili sono quelle simmetriche rispetto alla verticale, con un angolo d'inclinazione θ, per il quale la somma dei momenti della forza peso e della spinta, rispetto all'asse di rotazione, è nulla; ossia:

$$\rho A l g \frac{l}{2}\sin\theta = \rho_a A l_{im} g \left(l - \frac{l_{im}}{2}\right)\sin\theta.$$

Si trae:

$$\rho l^2 = 2\rho_a l l_{im} - \rho_a l_{im}^2, \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{l_{im}}{l}\right)^2 - 2\frac{l_{im}}{l} + \frac{\rho}{\rho_a} = 0.$$

Risolvendo questa equazione si trova:

$$\frac{l_{im}}{l} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_a}} = 1 \pm 0,63.$$

Scartando il segno positivo si ottiene,

$$\frac{l_{im}}{l} = 0,37.$$

pertanto la reazione vale:

$$R = mg\left(1 - \frac{l_{im}}{l}\frac{\rho_a}{\rho}\right) = 1,13\,N.$$