Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Raccolta di esercizi di Fisica II
ONDE ELETTROMAGNETICHE ed OTTICA

1. Un'onda piana di intensità I e lunghezza λ si propaga in un mezzo di indice di rifrazione n impedenza caratteristica Z. Calcolare l'ampiezza del campo elettrico $\vec{E}$e di quello di induzione $\vec{B}$ associati all'onda sapendo che, se questa si propagasse nel vuoto, la sua lunghezza d'onda sarebbe λ_0.
(Z=290 Ω, I=10 W/m^2, λ=500nm, λ_0=650nm).
Soluzione:

In un'onda elettromagnetica piana monocromatica i vettori campo elettrico ed induzione magnetica sono ortogonali fra loro ed ortogonali alla direzione di propagazione. I tre vettori $\vec{E}, \vec{B}, \hat{\imath}$ formano quindi una terna trirettangola destra che senza perdita di generalità possiamo porre lungo gli assi y,z,x.
$E_y(x,t) = E_m cos(kx - \omega t + \varphi)$
$B_z(x,t) = B_m cos(kx - \omega t + \varphi)$
$H_z(x,t) = H_m cos(kx - \omega t + \varphi)$

dove i valori massimi sono regolati da $B_m = E_m/\nu$ e $H_m = E_m/Z$

Il vettore di Poynting $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$ punta la direzione di propagazione dell'onda e vale $N = E_y \cdot H_z = E_m H_m \ cos^2(kx - \omega t + \varphi) = \frac{E_m^2}{Z} cos^2(kx - \omega t + \varphi)$. L'intensità dell'onda si ottiene facendo la media temporale in un periodo; ovviamente la funzione cos^2 varia tra 0 ed 1 con valor medio $\frac{1}{2}$ così che l'intensità si scrive come $I = \overline{N} = \frac{E_m^2}{2Z}$
da cui invertendo si ha $E_m = \sqrt{2ZI} = \sqrt{2 \cdot 290 \cdot 10} = \sqrt{5800} = 76.16 \ V/m$ il valore massimo del vettore di induzione si ottiene invece a partire dal valore massimo del campo elettrico come $B_m = \frac{E_m}{\nu} = \frac{E_m \cdot n}{c}$ dove n è l'indice di rifrazione. Come ricavare il valore dell'indice di rifrazione? Per esempio dal rapporto fra l'impedenza caratteristica del vuoto $Z_0 = 120\pi \simeq 377\Omega$ e quella data nel mezzo $Z = 290\Omega$

$$n = \frac{Z_0}{Z} = \frac{377}{290} = 1.3$$

oppure è ugualmente possibile dal rapporto fra le lunghezza d'onda nel vuoto e nel mezzo

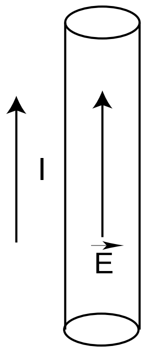
$$n = \frac{k}{k_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{650}{500} = 1.3$$

A questo punto il valore massimo del campo di induzione risulta

$$B_m = \frac{E_m \cdot n}{c} = \frac{\sqrt{5800} \cdot 1.3}{3 \cdot 10^8} = 3.3 \cdot 10^{-7} \ T$$

2. Una sottile barretta di plastica in aria, di costante dielettrica $\epsilon_r = 3$, lunghezza $l = 20cm$, e sezione $S = 1mm^2$, è investita da un' onda radio monocromatica di intensità $I = 10^{-6} W/m^2$, polarizzata parallelamente alla sbarretta. Calcolare l' ampiezza massima p_m del momento di dipolo elettrico oscillante indotto nella sbarretta.

Soluzione:



Essendo la barretta di plastica e quindi di materiale dielettrico, l'effetto del campo elettrico è quello di indurre due distribuzioni superficiali di cariche di polarizzazione σp(t), di pari modulo e opposte in segno, sulle sezioni ortogonali alla direzione del campo elettrico. In accordo alla definizione data per due cariche puntiformi, il momento di dipolo p è quindi dato dal prodotto del modulo della carica presente su una delle due sezioni per la lunghezza della barretta. Si ricorda che la σp è data dalla relazione:
$\sigma p = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E$
dove E è il campo elettrico interno alla barretta. Se si tiene conto della conservazione della componente tangenziale del campo elettrico all'interfaccia di due dielettrici e che il campo elettrico dell'onda e.m. è diretto parallelamente alla superficie della barretta, allora si può immediatamente dedurre che il campo E dell'onda e.m. coincide con quello all'interno della barretta. Se con il pedice M facciamo riferimento al valore massimo della grandezza indicata, possiamo ricavare E_M dalla relazione che fornisce l'intensità media di un onda em:

$I = \frac{E_M^2}{2Z_0} \quad \Rightarrow E_M = \sqrt{2Z_0 I}$
e in accordo a quanto detto prima, il momento di dipolo massimo indotto nella barretta:
$p_M = P_M l S = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) l S \sqrt{2Z_0 I} \simeq 10^{-19} Cm$

3. L'antenna di una stazione radio emette onde elettromagnetiche sferiche sinusoidali di frequenza $\nu = 100 Mhz$, polarizzate linearmente. La potenza media irraggiata è di $10^5 W$. Calcolare la forza elettromotrice indotta in una spira metallica che racchiude una superficie di $S = 10cm^2$, lontana $10Km$ dall'antenna e posizionata con la normale alla superficie parallela al vettore di induzione magnetica dell'onda

Soluzione:

Sulla spira si viene ad indurre un f.e.m in accordo alla legge di Faraday Neumann Lenz espressa da

$$f_i = -\frac{d\Phi(\vec{B_0})}{dt}$$

Per calcolare il flusso concatenato $\Phi(B)$ è necessario ricavare il campo B ovvero il campo elettrico E essendo le due grandezza legate dalla relazione $B_0 = E_0/c$.
Il campo E può essere ricavato a partire dall'osservazione che l'antenna emette in maniera onde e.m. sferiche. In questo caso l'intensità media a distanza D è data dal semplice dal rapporto della potenza media emessa sulla superficie sferica di raggio D. Inoltre, vista la notevole distanza D a cui è posta la spira, l'onda sferica può essere approssimata localmente come un'onda piana.

Ricordando l'espressione dell'intensità media di un onda e.m piana, si ottiene

$$\overline{\Im} = \frac{\overline{P}}{4\pi D^2} \qquad \overline{\Im} = \frac{{E_0}^2}{2Z_0} \qquad B_0 = \frac{E_0}{c}$$

da cui

$$B_0 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{2Z_0\overline{P}}{4\pi D^2}} = 8,2 \times 10^{-10} \quad T$$

Infine, notando che la normale alla spira è parallela al campo B, si può calcolare il flusso concatenato e, di conseguenza, la forza e.m. indotta.

$$f_i = \omega S B_0(D) sin(2\pi\nu t) = 5.15 \times 10^{-4} \sin(2\pi \cdot 10^8 t) \quad V$$

4. Un'onda elettromagnetica monocromatica piana, polarizzata circolarmente, di intensità media $\bar{I}$, si propaga nel vuoto. Calcolare la forza elettromotrice indotta su una sottile asta metallica di lunghezza l perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda.

   Soluzione:

   Ponendo la direzione di propagazione dell'onda lungo l'asse x di un sistema di riferimento xyz,e l'asta conduttrice lungo l'asse y con un estremo nell'origine,si trova:
   campo elettrico dell'onda: $\vec{E} \;=\; E_0 cos(\omega t - kx)\widehat{J} + E_0 sen(\omega t - kx)\widehat{k}$

   forza elettromotrice indotta: $f_i = \displaystyle\int_0^l \vec{E} \cdot \vec{dl} \;=\; E_0 l cos\omega t$

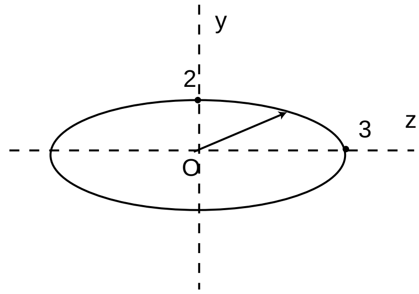
   $$\overline{I} \;=\; \frac{1}{Z_0 T}\int_0^T \vec{E} \cdot \vec{E} dt \;=\; \frac{1}{Z_0 T}\int_0^T [E_0^2 cos^2(\omega t - kx) + E_0^2 sen^2(\omega t - kx)]dt \;=\; \frac{E_0^2}{Z_0} \;\Rightarrow$$

   $$E_0 \;=\; \sqrt{\overline{I} Z_0} \;\Rightarrow\; f_i = l\sqrt{\overline{I} Z_0} cos\omega t$$

5. Un'onda e.m. piana si propaga in aria.Rispetto a un dato sistema di riferimento cartesiano l'espressione del campo $\vec{B}$ è $\vec{B}$=[$\vec{j}\,$2cos(kx-ωt)+$\vec{k}\,$3sen(kx-ωt)]$10^{-8}T$. Calcolare la potenza media incidente su una superficie piana d'area $S = 9m^2$,la cui normale forma un angolo di 60 gradi con l'asse x.Riconoscere lo stato di polarizzazione dell'onda.

   Soluzione:

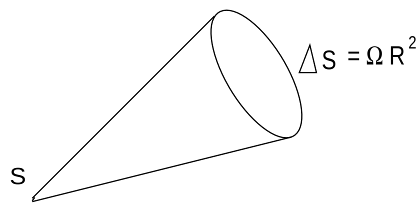
$W = IScos60^\circ = \frac{E_{eff}^2}{z_0} Scos60^\circ = 9 \cdot 10^16 \frac{2^2+3^2}{2 \cdot 377} \cdot 10^{-16} \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} =$
$0.70W$
$\frac{B_{0y}}{B_{0z}} = \frac{2}{3} \Delta\phi_{yz} = \frac{\pi}{2} \longrightarrow pol.ellittica$



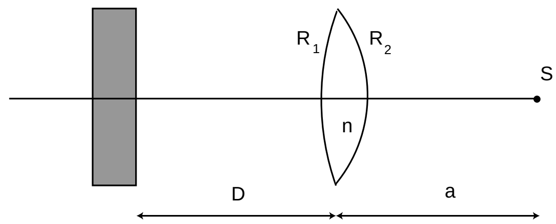
6. Una sorgente di luce irraggia radiazione uniformemente in un cono di apertura $\Omega = 10^{-5}$ steradianti con una potenza media $P = 1watt$. Calcolare il valore massimo di campo elettrico e magnetico misurati ad una distanza $R = 100m$ dalla sorgente stessa.

Soluzione:

$\triangle S = \Omega \cdot R^2 \qquad \bar{I} = \frac{P}{\triangle S} = \frac{P}{\Omega \cdot R^2} = 10 \;\; W/m^2$
$\bar{I} = \frac{1}{2}\frac{E_M^2}{Z_0} \quad \Longrightarrow \quad E_M = \sqrt{2Z_0\bar{I}} \cong 87 \;\; V/m$
$H = \frac{E}{Z_0} \cong 0.23 \;\; Asp/m$



7. Una lente sottile di raggi R_1 ed R_2 ed indice di rifrazione n ed uno specchio piano siano disposti in aria come indicato in figura in modo da formare un sistema ottico centrato. Una sorgente puntiforme S viene posta sull' asse a distanza a dalla lente. Si calcoli la posizione dell' immagine formata dal sistema rispetto alla lente. [Dati: $|R_1| = 0.4m, |R_2| = 0.2m, n = 1.5, a = 0.3m, D = 0.5m$]



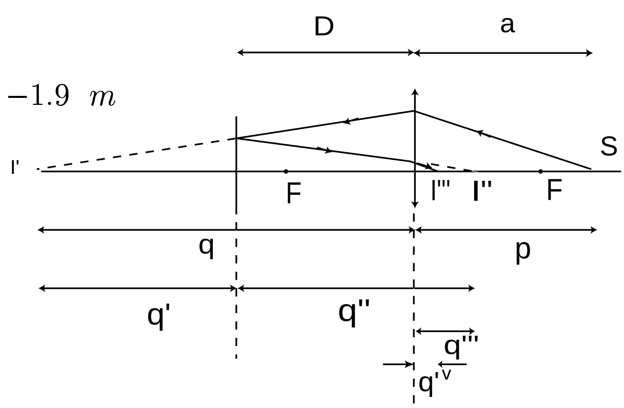
Soluzione:

- Primo passaggio nella lente
  $\frac{1}{a} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad q = 2.4 \;\; m \quad \Rightarrow q^I = D - q = -1.9 \;\; m$
  rispetto allo specchio

- Riflessione sullo specchio

  $\frac{1}{q^I} - \frac{1}{q^{II}} = 0 \quad \Rightarrow \quad q^{II} = q^I = -1.9 \;\; m$

  $\Rightarrow q^{III} = -1.4 \;\; m$ rispetto alla lente



- Secondo passaggio nella lente
  $$\frac{1}{q^{III}} + \frac{1}{q^{IV}} = \frac{1}{f} \quad q^{IV} \quad \cong 0.22 \;\; m$$

$$\frac{1}{f} = (n-1)\Big(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\Big) \simeq 3.75 \quad f \cong 0.27 \;\; m$$

L' immagine I''' si forma 22 cm a destra della lente

8. Una spira circolare di raggio a, resistenza R ed induttanza L è investita, nel vuoto, da un'onda e.m. piana, sinusoidale con pulsazione ω,polarizzata linearmente con il vettore $\vec{B}$ perpendicolare al piano della spira. L'intensità media dell'onda è $\bar{I}$ e la lunghezza d'onda è molto maggiore del raggio a. Ricavare l'espressione della corrente circolante nella spira.

   Soluzione:

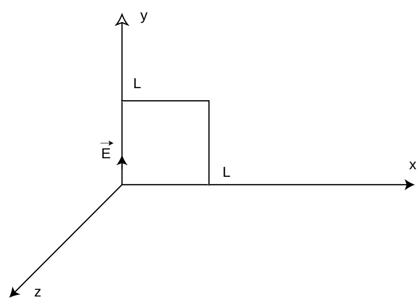
   $$B = B_0 cos(\omega t - kx) \;\; \bar{I} = E_0^2/2Z_0 \longrightarrow B_0 = \sqrt{2Z_0\bar{I}}/c$$

   $$f_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = \left[\pi a^2 \omega \frac{\sqrt{2Z_0\bar{I}}}{c}\right] sen\omega t$$

   $$i(t) = I_0 sen(\omega t + \varphi) \qquad I_0 = (\pi a^2 \omega \sqrt{2Z_0\bar{I}})/(\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2})$$

   $$tg\varphi = -\omega L/R$$

9. Un' onda elettromagnetica piana linearmente polarizzata con il vettore campo elettrico parallelo all' asse y, di frequenza $\nu = 300MHz$ e ampiezza $E_0 = 100mV/m$ si propaga nel vuoto lungo l'asse x ed investe una spira quadrata di lato $L = 25cm$ disposta, come in figura, nel piano xy. Se la spira ha resistenza elettrica complessiva $R = 30\Omega$, calcolare la corrente $i(t)$ circolante nella spira.



   Soluzione:

   $$\lambda = c/\nu = 1 \;\; m \quad (L = 0.25 \;\; m)$$

   $$\begin{cases} E = E_y = E_0 cos(kx - \omega t) \\ B = B_z = \dfrac{E_0}{c} cos(kx - \omega t) \end{cases}$$

   $$f_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

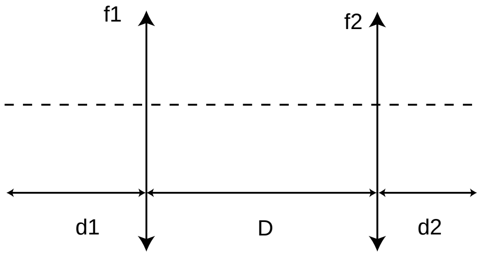
$$\Phi(B) = \int_0^L \frac{E_0}{c} cos(kx - \omega t) L dx = \frac{E_0 L}{ck}\left[sen(kL - \omega t) + sen\omega t\right]$$

$$f_i = \frac{E_0 L\omega}{ck}\left[cos(kL - \omega t) - cos\omega t\right] \quad \left(\frac{\omega}{k} = c\right)$$

$$i(t) = \frac{f_i}{R} = \frac{E_0 L}{R}\left[cos(kL - \omega t) - cos\omega t\right] = 0.83 \cdot 10^{-3}\left[cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) - cos\omega t\right] =$$

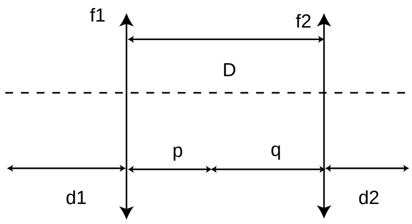
$$= 0.83 \cdot 10^{-3}(sen\omega t - cos\omega t)A$$

10. Due lenti sottili di focale f_1 ed f_2 sono disposte come in figura ad una distanza D. Si determini il valore di D affinché l'immagine di un oggetto posto a distanza d_1 alla sinistra della prima lente si crei ad una distanza d_2 a destra della seconda lente. $[f_1 = 0.100m,\ f_2 = 0.05m,\ d_1 = 1m,\ d_2 = 0.1m]$



Soluzione:

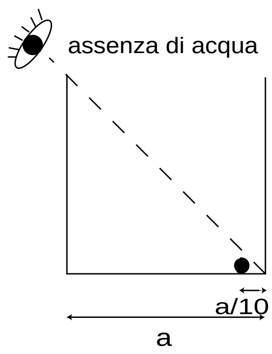
$$\begin{cases} \frac{1}{d_1} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f_1} \\ \frac{1}{p'} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f_2} \end{cases}$$



$$p' + p = D \Rightarrow p = \frac{f_1 d_1}{d_1 - f_1}$$

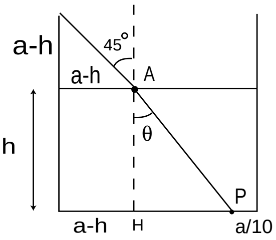
$$D - p = \frac{d_2 f_2}{d_2 - f_2} \quad \Rightarrow D = \frac{d_2 f_2}{d_2 - f_2} + \frac{f_1 d_1}{d_1 - f_1} \cong 0.21m$$

11. Un uomo guarda un recipiente cubico di lato $a = 10cm$ dall' alto sotto un angolo di 45° in modo da vedere il fondo del recipiente propio in corrispondenza dello spigolo opposto a quello dal quale egli guarda. Quanta acqua $(n = 1.33)$ deve essere messa nel recipiente perchè egli possa vedere un oggetto puntiforme sul fondo posto ad una distanza di $a/10$ dallo spigolo?



Soluzione:

$$\overline{AH} \;=\; h$$



$$\overline{HP} \;=\; a-(a-h)-\frac{a}{10} \;=\; h-\frac{a}{10}$$

$$\theta \;=\; arcsin[\frac{sin\ 45}{n_{H_2O}}] = 32.12°$$

$$\overline{HP} \;=\; \overline{AH}\ tg\theta \;\Rightarrow\; h-\frac{a}{10} \;=\; htg\theta$$

$$h \;=\; \frac{\frac{a}{10}}{1-tg\theta} \;\cong\; \frac{a}{3.7} \;\cong\; 2.69\ cm$$