

18. Onde elastiche

1. Considerazioni preliminari

Nell'ambito della dinamica dei mezzi elastici ci limiteremo ad esaminare la propagazione delle perturbazioni di piccola ampiezza, impresse ad un mezzo *continuo ed isotropo*, rientrando quindi nei limiti di elasticità. L'esperienza mostra che se una particella del mezzo considerato, intesa nel senso più volte specificato, viene spostata dalla sua posizione di equilibrio, le altre particelle del mezzo subiscono spostamenti che si propagano con un ritardo proporzionale alla distanza dal punto in cui lo spostamento iniziale è stato provocato. Lo spostamento si propaga nel mezzo con una velocità caratteristica; se è periodico, la propagazione avviene con lo stesso periodo.

Lo studio di tale propagazione è piuttosto semplice se si suppone che tutte le particelle contenute in un piano π_0 , ad un certo istante t subiscano lo stesso spostamento rappresentato dal vettore ψ_0 , non necessariamente giacente su di esso. Allora se si considera un piano π generico parallelo al precedente, tutte le particelle di questo piano subiranno, allo stesso istante, uno spostamento ψ , in generale diverso da ψ_0 .

Fissato un riferimento cartesiano ortogonale in cui i piani anzidetti risultano ortogonali all'asse x , gli spostamenti dipendono soltanto dalla coordinata x e dal tempo. In tal caso gli spostamenti si propagano per *onde piane*; tutti i piani, tra loro paralleli, luogo dei punti di uguale spostamento, si chiamano *fronti d'onda o superfici d'onda*; l'asse x orientato stabilisce la direzione di propagazione, figura 1. Lo spostamento si può sempre scomporre nei vettori componenti, paralleli agli assi del riferimento. Se esiste il solo componente parallelo ad x , l'onda si dice *longitudinale*; se esiste soltanto il componente ortogonale, l'onda si dice *trasversale*. Lo spostamento trasversale avviene in un determinato piano, *piano di vibrazione*, che in particolare può coincidere con uno dei piani coordinati x - y e x - z . Il piano ad esso ortogonale è detto *piano di polarizzazione*; l'onda si dice *polarizzata linearmente*.

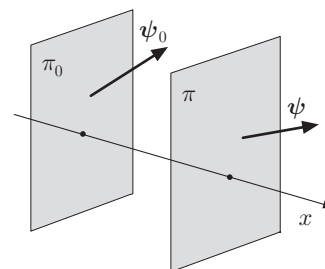


Fig. 18.1

Per chiarire meglio questi concetti, consideriamo una corda elastica seminfinita al cui estremo, che fissiamo come origine di un sistema di ascisse x , venga impartito uno spostamento trasversale ψ sinusoidale

$$\psi(0, t) = A \sin \omega t.$$

Lo spostamento, realizzato in modo che avvenga nel piano x - y , si propaga lungo la corda e in corrispondenza alla generica coordinata x , giungerà con certo ritardo τ cosicché in quel punto si potrà scrivere

$$\psi(x, t) = A \sin \omega(t - \tau).$$

Chiamando con v la velocità di propagazione, risulta $\tau = x/v$, perciò la precedente diventa

$$\psi(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (1)$$

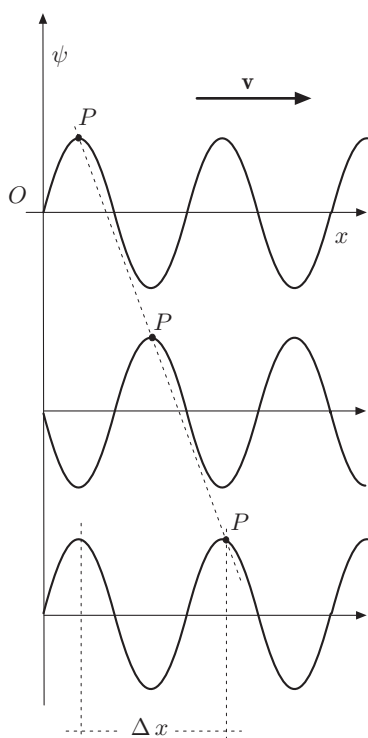


Fig. 18.2

La (1) descrive un'onda armonica piana e polarizzata linearmente. In figura 2 è mostrato il percorso Δx del massimo dello spostamento in un periodo. L'osservatore fisso col riferimento, vede una sinusoide che trasla rigidamente nel verso positivo dell'asse x , mentre un osservatore che si muove con la velocità v di propagazione dell'onda, vede l'elemento di corda oscillare di moto armonico; basta operare il cambiamento di coordinata $x = x' + vt$. Analoghe considerazioni possono essere fatte nel caso di un'onda longitudinale; questa può essere realizzata supponendo che una membrana impartisca vibrazioni, per esempio sinusoidali, al mezzo elastico circostante. Assumendo come origine del riferimento la posizione della membrana, le particelle del mezzo, come nel caso della corda, subiscono spostamenti governati dalla equazione (1).

Si osservi che, fissata l'origine del riferimento in un punto generico del mezzo elastico, la vibrazione si propaga sia nel verso fissato come positivo che nel verso negativo. Si ha dunque un'onda progressiva e un'onda regressiva. L'equazione di quest'ultima si scrive

$$\psi(x, t) = A \sin \omega \left(t + \frac{x}{v} \right).$$

Infatti un osservatore che trasla con velocità $-v$, vede ancora l'elemento oscillare di moto armonico; basta effettuare nella precedente il cambiamento di coordinata $x = x' - vt$. Nella propagazione ondosa energia meccanica fluisce attraverso il mezzo elastico, analogamente a quanto avviene nella collisione elastica di una sfera rigida contro una fila di sfere identiche in quiete. L'energia posseduta dalla sfera incidente viene trasferita progressivamente da una sfera all'altra e alla fine, l'ultima sfera della fila si muove con la stessa quantità di moto di quella incidente. L'energia si propaga attraverso la fila di sfere come se si trattasse di

un'onda che si propaga in un mezzo continuo. Va osservato che un solido continuo può trasmettere onde trasversali e longitudinali, mentre un fluido soltanto onde longitudinali; ciò dipende, come vedremo, dai moduli elastici caratteristici del mezzo.

2. Propagazione nei mezzi elastici isotropi e indefiniti

Come più volte si è detto, in un mezzo elastico isotropo e indefinito le forze agenti vanno distinte tra forze di volume e forze di superficie, che all'equilibrio danno luogo all'equazione (10)-XV. Individuata la generica particella o elemento di un tale corpo, mediante il vettore \mathbf{r} che ne dà la posizione, e indicando con

$$\psi(\mathbf{r}, t),$$

lo spostamento, funzione della posizione e del tempo, l'equazione fondamentale della dinamica si scrive:

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \mathbf{F} - \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right), \quad (2)$$

dove ρ è la densità del mezzo, \mathbf{F} la forza per unità di volume e σ sono gli sforzi.

Esprimendo gli sforzi in termini di componenti cartesiane, la (2) dà luogo alle equazioni scalari:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} &= F_x - \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} &= F_y - \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} &= F_z - \left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Per ricavare le derivate degli sforzi, si ricordi l'equazione (29)-XV, che lega gli sforzi di taglio alle corrispondenti deformazioni,

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & 0 \end{pmatrix} = 2G \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & 0 & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & 0 \end{pmatrix},$$

e l'equazione (31)-XV relativa agli sforzi e alle deformazioni normali:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\mu} \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} + \frac{\mu\theta}{1-2\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Introducendo in quest'ultima i coefficienti di Lamè, equazione

(40)-XV, si ha:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = 2G \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} + \lambda\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

dove θ è la dilatazione cubica,

$$\theta = \frac{\partial\psi_x}{\partial x} + \frac{\partial\psi_y}{\partial y} + \frac{\partial\psi_z}{\partial z}.$$

Dalle equazioni precedenti si trae:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G \epsilon_{xx} + \lambda\theta & \sigma_{yy} &= 2G \epsilon_{yy} + \lambda\theta & \sigma_{zz} &= 2G \epsilon_{zz} + \lambda\theta, \\ \sigma_{xy} &= 2G \epsilon_{xy} & \sigma_{xz} &= 2G \epsilon_{xz} & \sigma_{yz} &= 2G \epsilon_{yz}. \end{aligned}$$

Tenuto conto che

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x} + \frac{\partial\psi_x}{\partial x} \right), \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\psi_x}{\partial y} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x} \right), \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\psi_x}{\partial z} + \frac{\partial\psi_z}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

e che è lecito scambiare l'ordine di derivazione, la prima delle (3) dà luogo all'equazione:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} &= F_x - (\lambda + G) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x} + \frac{\partial\psi_y}{\partial y} + \frac{\partial\psi_z}{\partial z} \right) \right] - G \nabla^2 \psi_x \\ &= F_x - (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) - G \nabla^2 \psi_x, \end{aligned}$$

in cui l'operatore ∇^2 in coordinate cartesiane, ha l'espressione più volte ricordata. Analoghe equazioni si ottengono per le altre componenti. Esprimendo le relazioni ottenute in forma vettoriale, si ha:

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = \mathbf{F} - (\lambda + G) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) - G \nabla^2 \boldsymbol{\psi},$$

essendo $\nabla^2 \boldsymbol{\psi}$ un vettore di componenti $\nabla^2 \psi_x$, $\nabla^2 \psi_y$ e $\nabla^2 \psi_z$.

Poiché lo spostamento è causato da forze di superficie, è possibile trascurare le forze di volume \mathbf{F} le quali, se non variano nel tempo, come per esempio la forza di gravità, possono determinare una nuova configurazione del sistema, diversa da quella naturale. In ogni caso, assumendo come origine degli spostamenti tale configurazione, come d'uso, si può scrivere:

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = (\lambda + G) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) + G \nabla^2 \boldsymbol{\psi}. \quad (4)$$

Se lo spostamento è irrotazionale ($\nabla \times \boldsymbol{\psi} = 0$) allora esiste una funzione scalare φ tale che $\boldsymbol{\psi} = \nabla \varphi$; perciò la (4) diventa

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = (\lambda + G) \nabla [\nabla \cdot (\nabla \varphi)] + G \nabla^2 \boldsymbol{\psi}.$$

Ma essendo:

$$\nabla[\nabla \cdot (\nabla\varphi)] = \nabla(\nabla^2\varphi) = \nabla^2(\nabla\varphi);$$

si ha

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= (\lambda + G)\nabla^2(\nabla\varphi) + G\nabla^2\psi \\ &= (\lambda + G)\nabla^2\psi + G\nabla^2\psi = (\lambda + 2G)\nabla^2\psi. \end{aligned}$$

Dunque:

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (\lambda + 2G)\nabla^2\psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{(\lambda + 2G)}{\rho} \nabla^2\psi.$$

Ponendo

$$v^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho},$$

la precedente diventa:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \psi. \quad (5)$$

La grandezza

$$v = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}, \quad (6)$$

come facilmente si può verificare, ha le dimensioni della velocità; essa rappresenta la velocità di propagazione dello spostamento.

Ogni componente di ψ soddisfa equazioni del tipo

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \psi,$$

le quali, come la (5), sono *equazioni di D'Alembert*.

Se dunque in un punto del mezzo elastico considerato, viene provocato uno spostamento irrotazionale, tale spostamento si propaga per onde, in modo che il fronte d'onda o superficie d'onda, luogo dei punti in cui lo spostamento, ad un certo istante ha un certo valore, avanza con velocità data dalla (6). Inoltre poiché $\nabla \cdot \psi = \theta$ e l'operatore divergenza è commutabile nelle derivazioni, prendendo la divergenza di ambo i membri della (5), si ottiene

$$\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = (\lambda + 2G)\nabla^2 \theta. \quad (7)$$

La dilatazione soddisfa all'equazione di D'Alembert e si propaga per onde che, per questo motivo, sono chiamate anche *onde di dilatazione*.

Se $\nabla \cdot \psi = 0$, lo spostamento si dice *solenoidale*; la (4) diventa

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \nabla^2 \psi. \quad (8)$$

Si riconosce che

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (9)$$

rappresenta la velocità di propagazione, minore di quella espressa dall'equazione (6). In tal caso non si ha dilatazione o condensazione del mezzo, dunque lo spostamento è di scorrimento, che in quanto tale non implica variazioni di volume. La propagazione avviene per *onde trasversali*. Anche in questo caso ogni componente di ψ soddisfa un'equazione di D'Alembert. Nell'ipotesi che $\nabla \times \psi \neq 0$, lo spostamento è sempre solenoidale perché, come facilmente si può verificare, $\nabla \cdot (\nabla \times \psi) = 0$; pertanto prendendo il rotore di ambo i membri della (8) e indicando con \mathbf{R} il vettore rotazione, si ottiene

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = G \nabla^2 \mathbf{R}. \quad (10)$$

Si tenga presente che il rotore dello spostamento è il doppio della rotazione di ogni elemento del mezzo elastico, $2\mathbf{R} = \nabla \times \psi$. Dunque le rotazioni degli elementi si propagano con la velocità $\sqrt{G/\rho}$; per questo motivo le onde trasversali si chiamano anche *onde di rotazione*. Va rilevato che l'equazione di D'Alembert, chiamata anche *equazione delle onde*, equazioni (5), (8), (10), comprese le rispettive componenti, è una equazione *lineare* del secondo ordine alle derivate parziali; essa, oltre i casi considerati, governa tutti i fenomeni di propagazione ondosa in Elettromagnetismo, in Ottica e in Sismologia.

La (6) può essere espressa in altra forma, ricordando le relazioni esistenti tra i moduli elastici, stabiliti nel capitolo XV; in particolare:

$$\frac{1}{1 + \mu} = \frac{2G}{E}, \quad \frac{1}{1 - 2\mu} = \frac{3K}{E}, \quad \mu = \frac{E}{2G} - 1.$$

Sostituendo queste grandezze nell'espressione di λ e tenendo presente la (40)-XV, si ottiene

$$\lambda = 3K - \frac{6KG}{E} = K - \frac{2}{3}G.$$

Pertanto la (6) diventa

$$v = \sqrt{\frac{K + 4G/3}{\rho}}.$$

Poiché la variazione degli spostamenti nel tempo è sempre molto rapida rispetto ai tempi di diffusione termica, le espansioni e le compressioni del mezzo vanno considerate adiabatiche. Il corrispondente modulo di compressibilità va indicato con K_S , perciò

$$v = \sqrt{\frac{K_S + 4G/3}{\rho}}. \quad (11)$$

3. Onde piane

Se, come si è detto in premessa, lo spostamento ψ dipende dalla sola coordinata x e dal tempo, esprimendo ψ mediante i vettori componenti ψ_x , ψ_y e ψ_z , si riconosce che

$$\begin{aligned} \nabla \times \psi_x &= 0 & \nabla \times \psi_y &\neq 0 & \nabla \times \psi_z &\neq 0 \\ \nabla \cdot \psi_x &\neq 0 & \nabla \cdot \psi_y &= 0 & \nabla \cdot \psi_z &= 0. \end{aligned}$$

Lo spostamento ψ_x si propaga per onde longitudinali che sono *onde di dilatazione*, equazione (7), mentre gli spostamenti ψ_y e ψ_z si propagano per *onde trasversali*, equazione (8). Tenuto conto che detti spostamenti sono funzioni della sola x e del tempo, omettendo la notazione vettoriale, in tutti i casi l'equazione di D'Alembert diventa:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

dove la velocità di propagazione v è data dalla (9) o dalla (11) o da espressioni simili. Poiché l'equazione di D'Alembert è lineare, soluzioni della precedente, come dimostreremo in seguito, sono funzioni del tipo:

$$\psi = \psi_1(vt - x) + \psi_2(vt + x).$$

La prima rappresenta un'onda che si propaga nel verso positivo dell'asse x , mentre l'altra si propaga in verso opposto.

Prendendo in considerazione l'onda progressiva $\psi_1(vt - x)$, questa non va pensata come localizzata sull'asse x , essendo estesa a tutto lo spazio; dunque, ad un certo istante, lo spostamento assume lo stesso valore in tutti i punti che hanno la stessa x . Ma $x = cost$ è un piano ortogonale all'asse x e costituisce una superficie d'onda; perciò $\psi_1(vt - x)$ rappresenta un'onda piana che si propaga parallelamente a detto asse. Più propriamente, detto $\hat{\mathbf{u}}$ il versore perpendicolare alla superficie d'onda ed \mathbf{r} la posizione di un generico punto su di essa, è $x = \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}$; dunque tale onda può essere rappresentata dall'equazione

$$\psi_1(vt - \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}).$$

In figura 3 è rappresentata una superficie d'onda piana che si propaga lungo x e gli spostamenti componenti ψ_x , ψ_y e ψ_z . Se $\hat{\mathbf{u}}$ definisce una generica direzione e \mathbf{r} la posizione di un punto della superficie d'onda, il prodotto scalare $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}$ è la distanza della superficie d'onda, misurata da un'origine O nella direzione di propagazione.

In figura 4 è mostrata la superficie d'onda piana che si propaga in una direzione generica. L'equazione di D'Alembert alla quale soddisfa tale onda è ancora la (5) ovvero la (8), le cui proiezioni

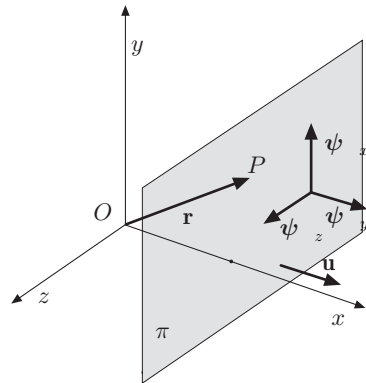


Fig. 18.3

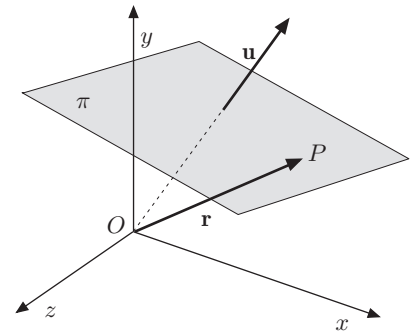


Fig. 18.4

sugli assi coordinati sono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} &= v^2 \nabla^2 \psi_x = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} &= v^2 \nabla^2 \psi_y = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} &= v^2 \nabla^2 \psi_z = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} \right).\end{aligned}$$

Detta ψ la componente dello spostamento parallela alla direzione di propagazione nel caso di un'onda longitudinale (ovvero perpendicolare ad essa per un'onda trasversale), e $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ i coseni direttori di detta componente, risulta

$$\psi_x = \psi \cos \alpha, \quad \psi_y = \psi \cos \beta, \quad \psi_z = \psi \cos \gamma.$$

Sostituendo nel sistema di equazioni precedenti, si ottiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \quad (12)$$

la quale è l'equazione di D'Alembert per un'onda piana in tre dimensioni. Soluzioni della (12) sono onde del tipo

$$\begin{aligned}\psi(vt - \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}) &= \psi[vt - (x + y + z)] \\ \psi(vt + \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}) &= \psi[vt + (x + y + z)],\end{aligned} \quad (13)$$

oppure la loro combinazione lineare.

Va sottolineato che lo spostamento di un'onda trasversale può essere espresso dalla sovrapposizione di due spostamenti mutuamente ortogonali. Se, per esempio, l'onda si propaga lungo l'asse x , gli spostamenti componenti sono rispettivamente paralleli all'asse y e all'asse z del riferimento, come indicato in figura 3. Ciascuno di questi spostamenti si propaga per onde piane trasversali, polarizzate linearmente in direzioni perpendicolari. La composizione di tali spostamenti dà luogo ad un vettore spostamento

risultante il cui estremo descrive una traiettoria curva nello spazio. Il significato di tale propagazione si può capire rammentando che la composizione di due vibrazioni armoniche su assi ortogonali, in generale, dà luogo a un movimento ellittico dipendente dalle ampiezze e dalle relazione di fase dei moti. Se tale moto è inizialmente provocato in una regione del mezzo elastico, esso si propaga per onde piane *polarizzate ellitticamente*. In figura 5 è rappresentata un'onda armonica piana *polarizzata circolarmente* che si propaga lungo una corda. In questo caso la corda, in ogni istante, assume la configurazione di un'elica cilindrica. In particolare, la polarizzazione lineare può essere ottenuta quando i moti componenti hanno una differenza di fase di $\pi/2$.

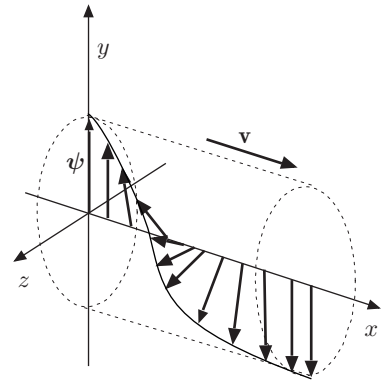


Fig. 18.5

4. Deduzione elementare dell'equazione di D'Alembert

4.1. Onde piane nei fluidi

Nei fluidi il tensore degli sforzi è isotropo e coincide con la pressione; la dilatazione θ dell'elemento di volume causata dall'onda, è uguale alla variazione relativa di volume:

$$\theta = 3\epsilon = \frac{\Delta V}{V}.$$

Pertanto, nell'ambito di piccole deformazioni, la variazione di pressione è proporzionale alla dilatazione attraverso il coefficiente o il modulo di compressibilità adiabatica, definito da

$$\kappa_S = \frac{1}{K_S} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S.$$

L'indice S indica, come d'uso in Termodinamica, che la compressione avviene ad entropia S costante, cioè senza scambio di calore col mezzo circostante all'elemento, considerando che le variazioni di volume, conseguenti alla propagazione dell'onda, come si è detto nel paragrafo precedente, sono talmente rapide da potere escludere scambi di calore. Nell'ambito di piccole variazioni di volume, possiamo scrivere

$$\kappa_S = -\frac{1}{V_0} \frac{V - V_0}{p - p_0}, \quad \Rightarrow \quad \Delta p = p - p_0 = -\frac{\theta}{\kappa_S} = -K_S \theta, \quad (14)$$

dove p_0 è la pressione statica del mezzo.

Consideriamo due superfici d'onda, piani ortogonali alla direzione di propagazione x , di coordinate x e $x + dx$, figura 6. Gli spostamenti corrispondenti, ad un certo istante t , sono

$$\psi(x), \quad \psi(x + dx) = \psi(x) + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx.$$

La variazione relativa di volume di un elemento di sezione S ,

risulta

$$\frac{\Delta V}{V} = \theta = \frac{1}{Sdx} \left(\psi(x) + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \psi(x) \right) S = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Dunque la (14) si può scrivere:

$$\Delta p = -\frac{1}{\kappa_S} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (15)$$

Consideriamo ora la dinamica dell'elemento in esame. Le variazioni di pressione in corrispondenza a x e $x + dx$ sono rispettivamente

$$\Delta p(x), \quad \Delta p(x + dx) = \Delta p(x) + \frac{\partial(\Delta p)}{\partial x} dx;$$

quindi, detta $dm = \rho S dx$ la massa dell'elemento, l'equazione della dinamica è

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = S \Delta p(x) - S \left(\Delta p(x) + \frac{\partial(\Delta p)}{\partial x} dx \right) = -S \frac{\partial(\Delta p)}{\partial x} dx,$$

ossia:

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial(\Delta p)}{\partial x},$$

che, per la (15), diventa:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho \kappa_S} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (16)$$

La precedente è l'equazione di D'Alembert (5), soddisfatta da un'onda piana longitudinale, che si propaga con velocità

$$v = \sqrt{\frac{1}{\rho \kappa_S}} = \sqrt{\frac{K_S}{\rho}}. \quad (17)$$

Questa relazione si può ottenere direttamente dalla (11), ponendo $G = 0$, dal momento che nei fluidi non sussistono sforzi di taglio.

|| 4.2. Velocità di propagazione delle onde nei gas ideali

Anticipando quanto verrà stabilito in Termodinamica, l'equazione di stato di una adiabatca reversibile del gas ideale è

$$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma = \text{cost},$$

essendo γ il rapporto tra i calori molari a pressione e a volume costanti. Poiché

$$V = \left(\frac{\text{cost}}{p} \right)^{1/\gamma},$$

si ha:

$$\frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\text{cost}^{1/\gamma}}{p^{(1+\gamma)/\gamma}}.$$

Pertanto

$$\kappa_S = \frac{1}{\gamma p}.$$

La velocità di propagazione risulta

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}. \quad (18)$$

Per ottenere la velocità di propagazione in funzione della temperatura, va tenuto conto dell'equazione di stato dei gas ideali:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{M}T, \quad \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{R}{M}T_0, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0 T_0} \frac{T}{p},$$

dove R è la costante dei gas, T la temperatura assoluta, M il peso molecolare. Sostituendo nella (18), si ottiene

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0 T_0} \gamma T} = v_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}. \quad (19)$$

Per esempio, la velocità di propagazione del suono in aria secca, a $0^\circ C$ e alla pressione normale di una atmosfera, è $v = 331,4 m/s$; a $20^\circ C$ risulta $v = 342,9 m/s$.

4.3. Onde piane longitudinali in una sbarra indefinita

Consideriamo una sottile sbarra indefinita di sezione S , non soggetta a vincoli, e supponiamo che lo sforzo prodotto da un'onda piana longitudinale, in qualunque sua sezione, sia esclusivamente normale, poiché sulla superficie laterale non agiscono sforzi. Supponiamo inoltre che lo sforzo normale non induca contrazioni laterali della sbarra.

Detto $\psi(x)$ lo spostamento, a un certo istante, della superficie d'onda in x e $\psi(x+dx)$ lo spostamento corrispondente all'ascissa $x+dx$, nello stesso istante, come in figura 6, la deformazione longitudinale risulta

$$\frac{\psi(x+dx) - \psi(x)}{dx} = \frac{\psi(x) + (\partial\psi/\partial x)dx - \psi(x)}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Per la legge di Hooke si ha

$$\sigma_x = E \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (20)$$

Lo sforzo ha una espressione analoga a quella della variazione di pressione, equazione (15).

L'equazione della dinamica dell'elemento è

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = S \sigma_x(x) - S \left(\sigma_x(x) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) = -S \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx,$$

ossia:

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x},$$

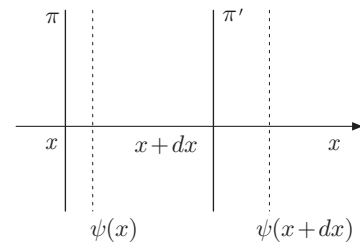


Fig. 18.6

che, per la (20), si scrive:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (21)$$

La precedente è l'equazione di D'Alembert di cui è soluzione un'onda che si propaga con velocità

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

analoga a quella trovata per le onde che si propagano in un fluido. Si osservi che il risultato è approssimato poiché si è trascurata la deformazione trasversale $\epsilon_t = -\mu\sigma_x/E$ che, in realtà, è sempre molto piccola.

4.4. Onde trasversali

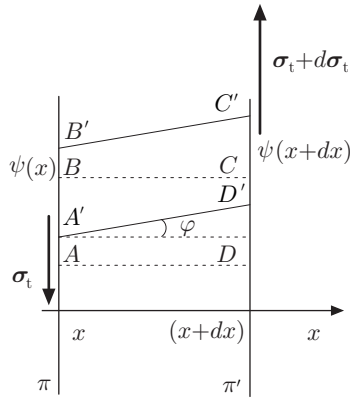


Fig. 18.7

Prendiamo in considerazione due piani π , π' del mezzo elastico, ortogonali alla direzione di propagazione, di coordinate x e $x+dx$, figura 7. Un elemento $ABCD$ inizialmente in equilibrio, se soggetto a sforzi di taglio σ_t , ad un certo istante t assume la configurazione $A'B'C'D'$. Gli spostamenti trasversali, in corrispondenza ad x e ad $x+dx$, sono

$$\psi(x), \quad \psi(x+dx) = \psi(x) + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx,$$

Lo spostamento risultante sarà

$$\psi(x+dx) - \psi(x) = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx;$$

pertanto la deformazione di scorrimento, la quale non implica variazioni di volume, risulta

$$\tan \varphi \approx \varphi = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

e lo sforzo di taglio:

$$\sigma_t = G \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

dove G è il modulo di scorrimento.

Le facce AB e $A'B'$ dell'elemento sono soggette agli sforzi

$$\sigma_t, \quad \sigma_t + d\sigma_t,$$

dunque lo sforzo risultante è

$$d\sigma_t = G \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx.$$

Con ragionamento analogo ai precedenti, l'equazione della dinamica dell'elemento si scrive:

$$G \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Delta S dx = \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Delta S dx,$$

dove ΔS è la superficie delle facce considerate. Si ottiene ancora l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Tali onde si dicono anche di rotazione perché dx , in seguito alla deformazione di scorrimento, subisce la rotazione dell'angolo φ di figura 7.

5. Piccole vibrazioni trasversali di un filo indefinito

Un filo flessibile e inestendibile, disposto lungo l'orizzontale, sia soggetto ad una tensione \mathbf{T} di modulo costante, mentre la forza esterna \mathbf{F} , per unità di lunghezza, sia trascurabile. Se al filo viene impresso uno spostamento ψ trasversale, un elemento ds del filo assume la configurazione mostrata in figura 8. Dette

$$\mathbf{T}(s), \quad \mathbf{T}(s + ds) = \mathbf{T}(s) + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} ds,$$

le tensioni che agiscono agli estremi dell'elemento, su di esso la tensione risultante è

$$\mathbf{T}(s + ds) - \mathbf{T}(s) = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} ds.$$

Pertanto indicando con μ la densità lineica, l'equazione della dinamica dell'elemento ds si scrive:

$$\mu ds \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} ds, \quad \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s}. \quad (22)$$

Detti $\partial x / \partial s$ e $\partial \psi / \partial s$ i coseni direttori dell'elemento, e tenendo presente che la componente dell'accelerazione secondo x è nulla, le componenti della (22) sono:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x}{\partial s} \right) = 0, \quad \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial \psi}{\partial s} \right). \quad (23)$$

La lunghezza dell'elemento di filo, come è noto, è data da

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2}.$$

Poiché gli spostamenti sono piccoli e la quantità $\partial \psi / \partial x$ rappresenta il valore numerico della tangente al filo, piccola rispetto all'unità, e dunque tale da poterne trascurare il quadrato, possiamo assumere $ds \approx dx$. Sotto queste condizioni le (23), diventano:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (24)$$

La prima mostra che il modulo della tensione è costante lungo x ; la seconda è l'equazione di D'Alembert alla quale soddisfa la

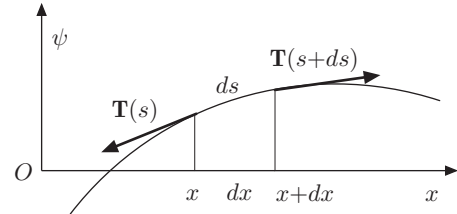


Fig. 18.8

vibrazione, che si propaga con velocità

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (25)$$

III 6. Generalità sulla equazione delle onde piane

Le (16), (21) e (24), sono tipiche di qualsiasi propagazione ondosa piana che viaggia con velocità v , dipendente esclusivamente dalle caratteristiche elastiche del mezzo. Analoga equazione governa la propagazione delle onde elettromagnetiche che, come noto, viaggiano con la velocità della luce. Pertanto, in generale, si può scrivere

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (26)$$

Questa relazione, come s'è detto, è una equazione differenziale lineare alle derivate parziali, di cui si riporta la soluzione dovuta a D'Alembert. Introducendo nella (26) le variabili ausiliarie

$$\eta = vt + x, \quad \zeta = vt - x,$$

si ha:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) v;$$

in quanto

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = v.$$

Derivando ancora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= v \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right] \\ &= v^2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \right] \end{aligned}$$

Analogamente, derivando rispetto ad x e tenendo presente che $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1$ e $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -1$, si ha

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = v^2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \right].$$

Sostituendo nella (26), si ottiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) = 0.$$

Ciò significa che $\partial \psi / \partial \eta$ e $\partial \psi / \partial \zeta$, dipendono rispettivamente solo da η e solo da ζ . Ossia

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \xi(\eta) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = \varphi(\zeta),$$

dove $\xi(\eta)$ e $\varphi(\zeta)$ sono funzioni arbitrarie. Integrando le precedenti rispettivamente ad η e a ζ , si ottiene:

$$\psi_1 = \int \xi(\eta) d\eta, \quad \psi_2 = \int \varphi(\zeta) d\zeta.$$

Pertanto la soluzione cercata ha la forma:

$$\psi = \psi_1(\zeta) + \psi_2(\eta).$$

Ricordando le variabili introdotte:

$$\psi = \psi_1(vt - x) + \psi_2(vt + x). \quad (27)$$

Poiché la (26) è lineare e vale il principio di sovrapposizione, funzioni del tipo

$$\psi_1(vt - x), \quad \psi_2(vt + x),$$

la soddisfano separatamente.

La verifica che la (27) è soluzione della (26) è immediata: basta derivare successivamente rispetto a x e rispetto al tempo. Indicando con l'apice la derivata della funzione rispetto all'argomento, si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\psi_1'(vt - x) + \psi_2'(vt + x), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi_1''(vt - x) + \psi_2''(vt + x);$$

ed inoltre

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = v[\psi_1'(vt - x) + \psi_2'(vt + x)], \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2[\psi_1''(vt - x) + \psi_2''(vt + x)].$$

Sostituendo, nella (26) si ottiene una identità.

Analogamente si verifica che le funzioni

$$\psi_1(x - vt), \quad \psi_2(x + vt), \quad (28)$$

e la loro combinazione lineare

$$\psi = \psi_1(x - vt) + \psi_2(x + vt), \quad (29)$$

soddisfano la (26).

Le funzioni ψ_1 e ψ_2 , rappresentano rispettivamente *onde progressive* che avanzano nel verso positivo di x e *onde regressive* che si propagano nel verso opposto. La forma dell'onda progressiva rimane fissa rispetto ad un osservatore che si muove lungo l'asse x , con la velocità v dell'onda; analogamente la forma dell'onda regressiva rimane fissa, rispetto ad un osservatore che si muove con velocità $-v$. Basta ricordare le formule di relatività galileiana

$$x = x' + vt, \quad x = x' - vt,$$

e sostituire nelle (28) e (29).

Mostriamo ora che le onde, in assenza di fenomeni dissipativi, si propagano indistorte sia rispetto al tempo che rispetto a x .

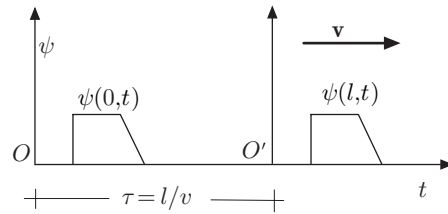


Fig. 18.9

Consideriamo un'onda progressiva, rappresentata in figura 9 con un impulso trapezoidale, che per $x = 0$ e $x = l$, ha equazioni

$$\psi(0, t) = \psi(vt), \quad \psi(l, t) = \psi(vt - l),$$

Assumiamo, nella seconda equazione, come origine dei tempi $\tau = l/v$; operiamo quindi il cambiamento di variabile $t = t' + \tau$. Nella nuova coordinata temporale l'equazione dell'onda diventa

$$\psi(l, t) = \psi[v(t' + \tau) - l] = \psi(vt' + v\tau - l) = \psi(vt').$$

L'onda, nel propagarsi, non è mutata rispetto alla configurazione assunta in $x = 0$, ma presenta, rispetto a questa un ritardo $\tau = l/v$; essa si è propagata senza deformarsi con una velocità caratteristica, indipendente dalla sua forma.

Lo studio dell'evoluzione dell'onda rispetto ad x , conduce alla stessa conclusione. In corrispondenza agli istanti $t = 0$ e $t = \tau$, l'equazione dell'onda risulta

$$\psi(x, 0) = \psi(-x), \quad \psi(x, \tau) = \psi(v\tau - x).$$

Operando il cambiamento di coordinata $x = x' + v\tau$, la seconda equazione diventa

$$\psi(x, \tau) = \psi[v\tau - (x' + v\tau)] = \psi(-x').$$

Quest'ultima è identica alla prima equazione; nell'intervallo di tempo τ , l'onda si è spostata rigidamente, senza mutare di forma, di una lunghezza $l = v\tau$, figura 10. Stabiliamo ora le proprietà di tutte le grandezze che contengono il termine di deformazione $\partial\psi/\partial x$.

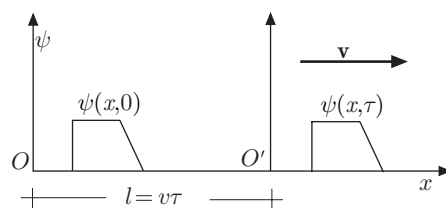


Fig. 18.10

DILATAZIONE

La dilatazione, chiamata anche *rarefazione*, equazione (15), è definita da

$$\theta = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho}.$$

Considerando un'onda progressiva, si ha

$$\theta = \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\psi'(vt - x).$$

La rarefazione si propaga con la stessa velocità dell'onda di spostamento, ma ha segno opposto.

Si definisce *condensazione* la grandezza

$$\theta_c = -\theta = \frac{V_0 - V}{V_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho}.$$

Pertanto

$$\theta_c = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \psi'(vt - x).$$

La condensazione si propaga con la stessa velocità dell'onda di spostamento ed ha segno opposto alla rarefazione.

VARIAZIONE DI PRESSIONE

variazione di pressione

Dalla (15) si ha

$$\Delta p = \frac{1}{\kappa_S} \psi'(vt - x).$$

L'onda di pressione si propaga con velocità v ed ha lo stesso segno dell'onda di spostamento.

SFORZO

Lo sforzo normale si propaga secondo la (20). Per le onde trasversali, come s'è detto, la quantità $\partial\psi/\partial x$ rappresenta la deformazione di scorrimento; lo sforzo di taglio si propaga secondo la relazione

$$\sigma_t = G \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Lo stesso si verifica per la componente trasversale della tensione di un filo vibrante:

$$T_t = T \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

VELOCITÀ DELLE PARTICELLE DEL MEZZO

velocità delle particelle del mezzo

La velocità che le particelle del mezzo assumono a causa della propagazione di un'onda, da non confondere con la velocità di propagazione, è definita da

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \dot{\psi} = v\psi'(vt - x). \quad (30)$$

Essa si propaga con la stessa velocità dell'onda. Si verifica immediatamente che il rapporto tra la velocità delle particelle e la rarefazione,

$$\frac{\dot{\psi}}{\theta} = -v, \quad (31)$$

è costante ed uguale alla velocità di propagazione, cambiata di segno; mentre se si considera la condensazione, si ottiene

$$\frac{\dot{\psi}}{\theta_c} = v.$$

7.1. Riflessione delle onde piane per incidenza normale

La riflessione delle onde piane incidenti su una superficie che delimita due mezzi va esaminata tenendo presente la soluzione generale dell'equazione delle onde. Si prenderanno in considerazione i casi di discontinuità perfettamente rigida e di discontinuità perfettamente cedevole.

7.1.1. Discontinuità rigida

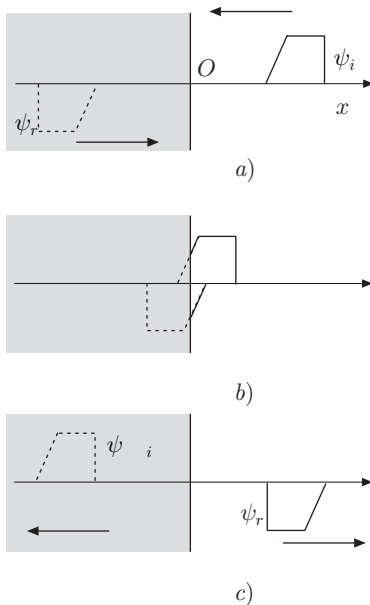


Fig. 18.11

Il mezzo sia limitato da una parete rigida piana, ortogonale all'asse x , lungo il quale avviene la propagazione, figura 11. Assumendo come origine la parete, lo spostamento nel semispazio da essa delimitato verrà espresso da

$$\psi(x, t) = \psi_1(vt + x) + \Psi(vt - x),$$

dove ψ_1 rappresenta l'onda incidente, che in figura si propaga nel verso negativo dell'asse x , e Ψ la perturbazione riflessa. Essendo la parete fissa, in $x = 0$ lo spostamento è nullo, dunque si ha

$$\psi_1(vt) + \Psi(vt) = 0, \quad \Psi(vt) = -\psi_1(vt).$$

Pertanto, per ogni valore di x :

$$\Psi(vt - x) = -\psi_1(vt - x). \quad (32)$$

In altri termini nel semispazio limitato dalla parete si ha sovrapposizione dell'onda incidente e di un'onda riflessa, uguale alla prima ma cambiata di segno. Pertanto:

$$\psi(x, t) = \psi_1(vt + x) - \psi_1(vt - x),$$

e posto

$$\psi_i = \psi_1(vt + x), \quad \psi_r = -\psi_1(vt - x),$$

si ha:

$$\psi(x, t) = \psi_i(vt + x) + \psi_r(vt - x),$$

Per chiarire questa formulazione, supponiamo che l'onda sia costituita da una vibrazione impulsiva di ampiezza ovunque nulla,

tranne che nell'intervallo Δx , figura 11. All'istante $t = 0$ ψ_i si trova in una certa posizione rispetto all'origine O ; nello stesso istante, la vibrazione riflessa può essere rappresentata nella posizione simmetrica, rispetto ad O , cambiata di segno, figura 11a). Evidentemente ψ_r non ha significato fisico perché al di là della parete non può verificarsi propagazione. Al crescere del tempo ψ_i e ψ_r si propagano verso O ; la prima nel verso negativo, la seconda nel verso positivo. Nell'intervallo di tempo durante il quale ψ_i attraversa l'origine O , la configurazione delle due vibrazioni deve essere tale che la loro somma sia nulla, perché, essendo la parete rigida, ivi lo spostamento è nullo, figura 11b). Successivamente la vibrazione ψ_r procede nel verso positivo, riflessa, e ψ_i nel verso negativo; quest'ultima situazione, come s'è detto, non è reale, figura 11c).

Per quanto riguarda le rarefazioni, si ha:

$$\theta_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \psi'_1(vt + x), \quad \theta_r = \frac{\partial \psi_r}{\partial x} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \psi'_1(vt - x).$$

Per $x = 0$:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \psi'_1(vt), \quad \frac{\partial \psi_r}{\partial x} = \psi'_1(vt).$$

Analogo comportamento hanno le condensazioni. Rarefazioni e condensazioni, in seguito alla riflessione, non mutano. Poiché inoltre la variazione di pressione è $\Delta p = -\theta/\kappa_S$, equazione (15), si deduce che la variazione di pressione, in seguito alla riflessione, resta immutata.

Analogo ragionamento vale per la velocità delle particelle del mezzo:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = v\psi'_1(vt + x), \quad \frac{\partial \psi_r}{\partial t} = -v\psi'_1(vt - x).$$

Per $x = 0$:

$$\dot{\psi}_i = v\psi'_1(vt), \quad \dot{\psi}_r = -v\psi'_1(vt).$$

Le velocità delle particelle del mezzo, in seguito alla riflessione, sono opposte.

Va notato che il rapporto tra la velocità delle particelle e la rarefazione è costante ed uguale alla velocità di propagazione, equazione (31). Nel riferimento adottato, per le vibrazioni incidente e riflessa si ha

$$\frac{\dot{\psi}_i}{\theta} = v, \quad \frac{\dot{\psi}_r}{\theta} = -v. \quad (33)$$

|| 7.2. Discontinuità cedevole

Le estremità aperte di una canna d'organo, l'estremo libero di una corda o sistemi simili, possono realizzare discontinuità perfettamente cedevoli. Nel caso di onde longitudinali, si suppone che

la discontinuità delimiti un mezzo circostante indefinito perfettamente cedevole ove la pressione è costante; la canna d'organo, ad esempio, ha le estremità aperte nell'aria libera, dove la rarefazione è nulla.

Assumendo come origine del riferimento la discontinuità, come nel caso precedente, lo spostamento nello spazio da essa delimitato è

$$\psi(x, t) = \psi_1(vt + x) + \Psi(vt - x),$$

con analogo significato delle grandezze. La rarefazione risulta:

$$\theta = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \psi_1'(vt + x) - \Psi'(vt - x). \quad (34)$$

Per $x = 0$, la rarefazione è nulla:

$$\psi_1'(vt) - \Psi'(vt) = 0,$$

quindi

$$\Psi'(vt) = \psi_1'(vt)$$

e, per ogni valore di x :

$$\Psi'(vt - x) = \psi_1'(vt - x).$$

Integrando:

$$\Psi(vt - x) = \psi_1(vt - x) + C,$$

dove C è una costante; pertanto

$$\psi(x, t) = \psi_1(vt + x) + \psi_1(vt - x),$$

dove la costante si è posta uguale a zero, in quanto rappresenta lo spostamento complessivo del mezzo. In seguito alla riflessione, onda incidente e onda riflessa hanno lo stesso segno.

Indicando, come prima, con $\psi_i = \psi_1(vt + x)$ l'onda incidente e con $\psi_r = \psi_1(vt - x)$ quella riflessa, le rarefazioni risultano:

$$\theta_i = \psi_1'(vt + x), \quad \theta_r = -\psi_1'(vt - x).$$

In seguito alla riflessione su una discontinuità cedevole, le rarefazioni cambiano di segno. Lo stesso avviene per le condensazioni e, ricordando la (15), per le variazioni di pressione. Viceversa, le velocità delle particelle:

$$\dot{\psi}_i = v\psi_1'(vt + x), \quad \dot{\psi}_r = v\psi_1'(vt - x),$$

restano immutate.

Ricapitolando, per l'onda riflessa, si ha

DISCONTINUITÀ RIGIDA

Spostamento invertito

Velocità delle particelle invertita

Condensazione e rarefazione invariate

Differenza di pressione invariata

DISCONTINUITÀ CEDEVOLLE

- Spostamento invariato
- Velocità delle particelle invariata
- Condensazione e rarefazione invertite
- Differenza di pressione invertita

Tutte queste grandezze assumono il loro segno rispetto al riferimento fissato. Le precedenti considerazioni valgono per le onde trasversali; va osservato che la grandezza $\partial\psi/\partial x$, assume il significato di deformazione di scorrimento. Per le onde che si propagano lungo un filo ha anche il significato geometrico di pendenza, la quale ovviamente dipende dall'equazione dell'onda.

|| 7.3. Riflessione parziale delle onde piane per incidenza normale

Indichiamo con gli indici i, r, t le onde incidente, riflessa e trasmessa o rifratta, figura 12. Poiché ogni proprietà fisica, spostamento, velocità delle particelle, pressione, deve mantenere il suo valore alla superficie di separazione dei due mezzi, da qualunque parte venga osservato, si potrà assumere la continuità delle velocità delle particelle:

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \frac{\partial\psi_r}{\partial t} = \frac{\partial\psi_t}{\partial t}, \quad (35)$$

e la continuità della variazione di pressione:

$$M_1\theta_i + M_1\theta_r = M_2\theta_t, \quad (36)$$

dove M è il modulo elastico del mezzo e θ la rarefazione. Assumendo i segni delle velocità di propagazione conformi al riferimento di figura 11, per la (31) si ha

$$\dot{\psi}_i = v_1\theta_i, \quad \dot{\psi}_r = -v_1\theta_r, \quad \dot{\psi}_t = v_2\theta_t,$$

essendo v_1, v_2 le velocità di propagazione nei due mezzi. Dalle (35) e (36) si ottiene:

$$v_1(\theta_i - \theta_r) = v_2\theta_t, \quad M_1(\theta_i + \theta_r) = M_2\theta_t, \quad (37)$$

Dividendo membro a membro:

$$\frac{\theta_i - \theta_r}{\theta_i + \theta_r} = \frac{M_1v_2}{M_2v_1},$$

si ottiene

$$\frac{\theta_r}{\theta_i} = \frac{v_1M_2 - v_2M_1}{v_1M_2 + v_2M_1}. \quad (38)$$

Nel caso della discontinuità rigida, $M_2 \gg M_1$, risulta $\theta_r = \theta_i$; l'onda è completamente riflessa; il segno della rarefazione non muta. Se la discontinuità è cedevole, $M_1 \ll M_2$, la rarefazione cambia segno, $\theta_r = -\theta_i$.

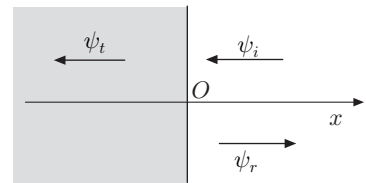


Fig. 18.12

Dalle (37) si ottiene:

$$\frac{\theta_t}{\theta_i} = \frac{2v_1M_1}{v_1M_2 + v_2M_1}. \quad (39)$$

Le (38) e (39) definiscono rispettivamente il coefficiente di riflessione r e il coefficiente di trasmissione t . Si noti che t è sempre positivo e che $-1 < r < 1$. Inoltre poiché

$$M_1 = \rho_1 v_1^2, \quad M_2 = \rho_2 v_2^2,$$

si ha

$$\frac{\theta_r}{\theta_i} = \frac{v_2\rho_2 - v_1\rho_1}{v_2\rho_2 + v_1\rho_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad (40)$$

dove con $Z = \rho v$ si indicata l'impedenza caratteristica del mezzo. L'impedenza caratteristica è definita anche dalle relazioni

$$Z = \frac{M}{v}, \quad Z = \sqrt{M\rho};$$

essa si misura in $Pa/(m/s)$. Perché si verifichi la trasmissione completa della rarefazione dev'essere $Z_2 = Z_1$. Si colga l'analogia con un trasduttore o un dispositivo elettrico.

ONDE TRASVERSALI

Per le onde trasversali valgono le considerazioni precedenti, assumendo alla superficie di separazione dei due mezzi, la continuità degli spostamenti e la continuità degli sforzi di taglio. Per una corda vibrante si ha continuità degli spostamenti e delle componenti trasversali della tensione:

$$\psi_i + \psi_r = \psi_t, \quad T \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right)_0 = T \left(\frac{\partial \psi_t}{\partial x} \right)_0 \quad (41)$$

8. Onde armoniche piane

Si è accennato alle onde armoniche progressive, equazione (1), che riscriviamo:

$$\psi(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

Questa equazione può essere posta nella forma:

$$\psi(x, t) = A \sin \frac{\omega}{v}(vt - x).$$

Tenendo presente che $\omega = 2\pi/T$, dove T è il periodo temporale dell'onda, si ha

$$\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{Tv} = \frac{2\pi}{\lambda} = k. \quad (42)$$

Chiamiamo *lunghezza d'onda* $\lambda = Tv$ lo spazio percorso dall'onda nell'intervallo di tempo uguale a un periodo; essa rappresenta

anche il *periodo spaziale*. Poiché nell'intervallo di un periodo gli spostamenti hanno la stessa ampiezza, possiamo definire la lunghezza d'onda come lo spazio percorso dall'onda dal punto x_1 al punto x_2 , in cui l'onda ha la stessa ampiezza che, in particolare, può coincidere con due massimi oppure due minimi, figura 13.

La grandezza $k = 2\pi/\lambda$ si chiama *numero d'onde angolare* e si misura in radianti per metro (rad/m); questa quantità è l'analoga nello spazio, della pulsazione o frequenza angolare ω . Si definisce inoltre *numero d'onde* la grandezza $k' = 1/\lambda$ che si misura in m^{-1} ; essa è l'analoga nello spazio della frequenza ν delle oscillazioni nel tempo. Dalla (42) si ha

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = v, \quad \Rightarrow \quad \lambda\nu = v.$$

Il prodotto tra la lunghezza d'onda e la frequenza è costante e pari alla velocità di propagazione. Poiché quest'ultima dipende esclusivamente dalle caratteristiche elastiche del mezzo, l'equazione

$$\omega(k) = vk, \quad (43)$$

che si chiama *relazione di dispersione*, è lineare con k . Tale relazione caratterizza la propagazione delle onde nel mezzo. Se è valida la (43), il mezzo si dice *non dispersivo*. Se la relazione di dispersione non è lineare, come in certi casi che esamineremo in seguito, il mezzo si dice *dispersivo*; la velocità di propagazione dipende dalla frequenza.

L'equazione di un'onda armonica progressiva si può esprimere in una delle seguenti forme alternative

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) = A \sin 2\pi \left(\frac{vt}{\lambda} - \frac{x}{\lambda} \right) \\ &= A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = A \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{v} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Oppure:

$$\psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx), \quad (45)$$

e, tenendo conto delle (28),

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t). \quad (46)$$

Quest'ultima si può ottenere dalla (45) aggiungendo una fase uguale a π , che corrisponde a $T/2$ nel periodo temporale oppure a $\lambda/2$ nel periodo spaziale. Le equazioni (44), (45) e (46) rappresentano un'onda armonica piana progressiva di periodo T e lunghezza d'onda λ .

Le stesse considerazioni valgono per le onde armoniche regressive, rappresentate, per esempio, dall'equazione

$$\psi(x, t) = A \sin(\omega t + kx).$$

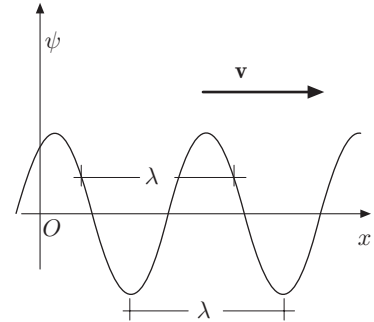


Fig. 18.13

Si noti che la stessa onda, come ogni funzione armonica, può essere espressa da una funzione coseno, introducendo semplicemente un fattore di fase pari a $\pi/2$. Può essere indifferente a questo scopo introdurre un anticipo di fase uguale a $T/4$ nel periodo temporale, oppure uguale a $\lambda/4$ nel periodo spaziale.

In generale scriveremo:

$$\psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi), \quad \psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi).$$

Un'onda armonica che si propaga in una direzione generica rispetto al riferimento fissato, ha una equazione analoga alla (13). Infatti detto \mathbf{k} il vettore ortogonale alla superficie d'onda ed \mathbf{r} il vettore che individua la posizione di un punto qualsiasi di detta superficie, si ha:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = A \sin[\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)]. \quad (47)$$

Il vettore \mathbf{k} , che individua la direzione di propagazione, è detto *vettore di propagazione* o *vettore d'onda*. Essendo $k = \omega/v$, le componenti di \mathbf{k} soddisfano la relazione:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2}. \quad (48)$$

RAREFAZIONE O DILATAZIONE

Per un'onda armonica longitudinale si ottiene

$$\theta = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -Ak \cos(\omega t - kx) = -\theta_0 \cos(\omega t - kx), \quad (49)$$

dove $\theta_0 = Ak$ è il valore massimo. La condensazione risulta di segno opposto e in quadratura.

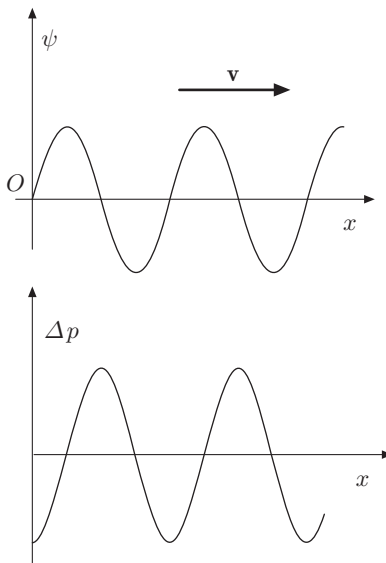


Fig. 18.14

VARIAZIONE DI PRESSIONE

Per la (15):

$$\begin{aligned} \Delta p &= -\frac{1}{\kappa_S} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{Ak}{\kappa_S} \cos(\omega t - kx) \\ &= kK_S \cos(\omega t - kx) = \Delta p_0 \cos(\omega t - kx), \end{aligned} \quad (50)$$

dove $\Delta p_0 = AkK_S$ è l'ampiezza massima. L'onda di pressione si propaga come l'onda di spostamento, ma sfasata di $\pi/2$, figura 14. In corrispondenza ai massimi dello spostamento la variazione di pressione è nulla e nei minimi di spostamento, massima.

SFORZO IN UNA SBARRA INDEFINITA

Per un'onda longitudinale che si propaga in una sbarra, si è trovato che lo sforzo ha andamento analogo all'onda di pressione, equazione (20), perciò

$$\sigma = E \frac{\partial \psi}{\partial x} = -E Ak \cos(\omega t - kx) = -\sigma_0 \cos(\omega t - kx), \quad (51)$$

Lo sforzo massimo, $\sigma_0 = E Ak$, è notevole; infatti assumendo, per una sbarra metallica, $E = 10^{11} Pa$, $\lambda = 1 m$, $A = 10^{-6} m$, il suo ordine di grandezza risulta $10^6 Pa$.

VELOCITÀ DELLE PARTICELLE

Si ha:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial t} = A\omega \cos(\omega t - kx) = \dot{\psi}_0 \cos(\omega t - kx). \quad (52)$$

L'onda di velocità ha lo stesso andamento dell'onda di pressione. Va ricordato che le equazioni (44) e (45), descrivono anche onde trasversali polarizzate linearmente. Inoltre tenendo presente quanto si è detto alla fine del paragrafo 3, descrivono le onde componenti in un'onda polarizzata ellitticamente.

||| 9. Intensità di un'onda piana

Un elemento del mezzo in cui si propaga l'onda possiede, a causa del moto che gli è stato impresso, energia cinetica ed energia potenziale elastica, la cui somma dà l'energia totale. Questa energia si propaga con la velocità v dell'onda ed è indipendente dalla forma dell'onda.

In generale, ricordando la (17)-XV, la densità di energia totale, misurata in J/m^3 , si può esprimere con l'equazione:

$$u = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}M \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2,$$

dove M è l'opportuno modulo elastico. Per un'onda armonica, equazione (45), la densità di energia, all'istante t , risulta

$$u = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx) + \frac{1}{2}K_S A^2 k^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

Tenuto conto che $K_S = \rho v^2$ e che $v = \omega/k$, la densità di energia cinetica risulta uguale alla densità di energia potenziale elastica, perciò si ottiene

$$u = \rho A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

L'energia si propaga con la stessa velocità dell'onda. La densità media di energia è data da

$$\bar{u} = \rho A^2 \omega^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kx) dt.$$

Poiché l'integrale è uguale a $T/2$, si ha

$$\bar{u} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2. \quad (53)$$

Tenendo presente la (50), in cui $\Delta p_0 = AkK_S$, e tenuto conto che

$k = \omega/v$, $K_S = \rho v^2$, per un'onda longitudinale si trova anche:

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_0)^2}{\rho v^2}. \tag{54}$$

Definiamo *intensità J dell'onda*, l'energia che fluisce attraverso la sezione unitaria del mezzo, ortogonale alla direzione di propagazione, nell'unità di tempo; dunque moltiplicando la (53) per la velocità di propagazione v , si ha

$$J = \frac{1}{2} \rho v A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} Z A^2 \omega^2, \tag{55}$$

dove $Z = \rho v$ è l'impedenza caratteristica del mezzo. Per un'onda piana longitudinale l'intensità si può esprimere come:

$$J = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_0)^2}{\rho v}. \tag{56}$$

L'intensità si misura in W/m^2 .

Complementi ed esempi

- III 1. *Riflessione di un'onda piana per incidenza obliqua.*
Siano rispettivamente

$$\begin{aligned} \psi_i &= A_i \sin(\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}), \\ \psi_r &= A_r \sin(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}) \\ \psi_t &= A_t \sin(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}), \end{aligned} \tag{57}$$

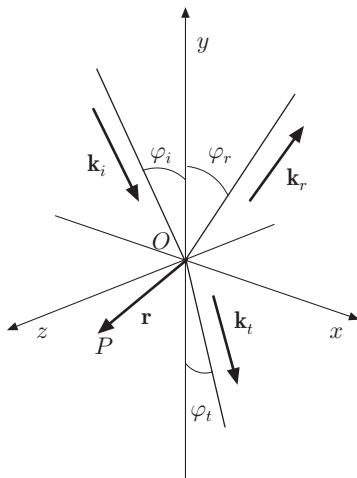


Fig. 18.15

l'onda incidente, riflessa e trasmessa. L'esperienza mostra che alla discontinuità la frequenza delle onde non muta. Rappresentiamo le onde piane, come d'uso, mediante "raggi", cioè con le rette orientate ortogonali alle superfici d'onda. Supponiamo, come in figura 15, che il raggio/onda giaccia nel piano $x-y$ e incida nell'origine del riferimento; il piano $x-z$ costituisca la superficie di separazione dei due mezzi. Per tutti i punti di questo piano, individuati dal vettore \mathbf{r} di componenti x e z , deve essere rispettata la continuità degli spostamenti:

$$\psi_i + \psi_r = \psi_t.$$

Perché questa condizione sia soddisfatta, è necessario che gli argomenti delle (57) siano uguali

$$\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r},$$

da cui

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}. \tag{58}$$

Poiché

$$\mathbf{k}_i = k_{ix} \mathbf{i} + k_{iy} \mathbf{j}, \quad \mathbf{k}_r = k_{rx} \mathbf{i} + k_{ry} \mathbf{j} + k_{rz} \mathbf{k}, \quad \mathbf{k}_t = k_{tx} \mathbf{i} + k_{ty} \mathbf{j} + k_{tz} \mathbf{k},$$

sostituendo nella (58),

$$k_{ix} x = k_{rx} x + k_{rz} z = k_{tx} x + k_{tz} z.$$

Questa relazione deve essere valida per tutti i punti del piano $x-z$; ne segue:

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}, \quad k_{rz} = k_{tz} = 0.$$

si deduce che \mathbf{k}_r e \mathbf{k}_t non hanno componenti lungo l'asse z , perciò tali vettori giacciono nel piano $x-y$.

Indicando con φ_i , φ_r e φ_t gli angoli di incidenza, riflessione e rifrazione che le onde formano con la normale al piano x - z , figura 15, si ha

$$k_{ix} = k_i \sin \varphi_i, \quad k_{rx} = k_r \sin \varphi_r, \quad k_{tx} = k_t \sin \varphi_t,$$

ed essendo

$$k_i = k_r = \frac{\omega}{v_1}, \quad k_t = \frac{\omega}{v_2},$$

si ottiene:

$$k_{ix} = \frac{\omega}{v_1} \sin \varphi_i, \quad k_{rx} = \frac{\omega}{v_1} \sin \varphi_r, \quad k_{tx} = \frac{\omega}{v_2} \sin \varphi_t.$$

Dunque

$$\frac{1}{v_1} \sin \varphi_i = \frac{1}{v_1} \sin \varphi_r = \frac{1}{v_2} \sin \varphi_t;$$

ne segue:

$$\sin \varphi_i = \sin \varphi_r, \quad \Rightarrow \quad \varphi_i = \varphi_r, \quad \frac{\sin \varphi_i}{\sin \varphi_t} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (59)$$

L'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione e il rapporto tra il seno dell'angolo di incidenza e il seno dell'angolo di rifrazione è uguale al rapporto tra le velocità di propagazione nei due mezzi (legge di Snell).

Consideriamo ora le ampiezze delle onde A_i , A_r , A_t ; poiché dev'essere rispettata la continuità delle loro componenti normali alla superficie di separazione, si ha

$$(A_i + A_r) \cos \varphi_i = A_t \cos \varphi_t.$$

Introducendo il coefficiente di riflessione r , tale che $A_r = rA_i$, la precedente diventa

$$A_i(1 + r) \cos \varphi_i = A_t \cos \varphi_t. \quad (60)$$

Per determinare il coefficiente di riflessione occorre un'altra relazione, fornita dalla conservazione dell'energia; infatti l'intensità dell'onda incidente va ripartita tra l'onda riflessa e quella trasmessa. Tenuto conto, figura 16, che i fronti d'onda incidente, AB e riflesso BC , sul tratto AC della discontinuità, hanno sezione $AC \cos \varphi_i$, mentre quello rifratto ha sezione $AC \cos \varphi_t$, il bilancio delle potenze incidente, riflessa e rifratta, equazione (55), si scrive:

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho_1 v_1 A_i^2 AC \cos \varphi_i &= \omega^2 \rho_1 v_1 r^2 A_i^2 AC \cos \varphi_i + \omega^2 \rho_2 v_2 A_t^2 AC \cos \varphi_t, \\ \rho_1 v_1 A_i^2 (1 - r^2) \cos \varphi_i &= \rho_2 v_2 A_t^2 \cos \varphi_t. \end{aligned} \quad (61)$$

Dividendo membro a membro per il quadrato della (60), si ha

$$\frac{\rho_1 v_1 A_i^2 \cos \varphi_i (1 - r^2)}{(1 + r)^2 A_i^2 \cos^2 \varphi_i} = \frac{\rho_2 v_2 A_t^2 \cos \varphi_t}{A_t^2 \cos^2 \varphi_t},$$

ossia

$$\frac{\rho_1 v_1 (1 - r^2)}{(1 + r)^2 \cos \varphi_i} = \frac{\rho_2 v_2}{\cos \varphi_t}.$$

Da questa relazione si ricava

$$\frac{1 - r}{1 + r} = \frac{\rho_2 v_2 \cos \varphi_i}{\rho_1 v_1 \cos \varphi_t}, \quad (62)$$

che per la legge di Snell, possiamo scrivere

$$\frac{1 - r}{1 + r} = \frac{\rho_2 \cot \varphi_i}{\rho_1 \cot \varphi_t}.$$

Si ottiene:

$$r = \frac{\rho_1 \cot \varphi_t - \rho_2 \cot \varphi_i}{\rho_1 \cot \varphi_t + \rho_2 \cot \varphi_i}. \quad (63)$$

Per incidenza normale la (62), a parte il segno, si riduce alla (40).

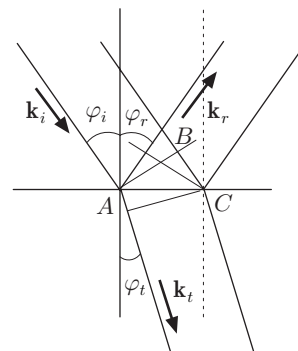


Fig. 18.16

III 2. *Riflessione alla discontinuità aria-acqua.*

Assegnate le velocità di propagazione nell'aria, $v_1 = 343 \text{ m/s}$, e nell'acqua, $v_2 = 1450 \text{ m/s}$; note le rispettive densità $\rho_1 = 1,2 \text{ kg/m}^3$ e $\rho_2 = 10^3 \text{ kg/m}^3$, si ha

$$Z_1 = 412 \text{ Pa/(m/s)}, \quad Z_2 = 1,45 \cdot 10^6 \text{ Pa/(m/s)}.$$

Dalla (40) si ottiene

$$\frac{\theta_r}{\theta_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = 0,9994.$$

L'acqua è praticamente un riflettore perfetto, sia che l'onda venga generata in aria o nell'acqua. Viceversa la trasmissione tra liquidi e solidi è più favorevole; per esempio alla discontinuità acqua-acciaio, essendo le impedenze caratteristiche rispettivamente $Z_1 = 1,45 \cdot 10^6 \text{ Pa/(m/s)}$, $Z_2 = 3,9 \cdot 10^6 \text{ Pa/(m/s)}$, si ha

$$\frac{\theta_r}{\theta_i} = 0,46.$$

III 3. *Riflessione parziale alla saldatura di due fili di materiali diversi, soggetti alla tensione T.*

Supponiamo che l'onda sia armonica e fissiamo l'origine del riferimento in corrispondenza alla saldatura, figura 17. Siano

$$\psi_i = A_i \sin(\omega t - kx), \quad \psi_r = A_r \sin(\omega t + kx), \quad \psi_t = A_t \sin(\omega t - k_t x),$$

rispettivamente le onde incidente, riflessa e trasmessa. Quest'ultima si propaga con velocità diversa a causa della differente natura dei fili.

Poiché per $x = 0$ si ha continuità degli spostamenti, dalle precedenti si ottiene

$$A_i \sin \omega t + A_r \sin \omega t = A_t \sin \omega t, \quad A_i + A_r = A_t. \quad (64)$$

Inoltre dev'essere rispettata la continuità delle componenti trasversali della tensione:

$$T \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right)_0 = T \left(\frac{\partial \psi_t}{\partial x} \right)_0. \quad (65)$$

Essendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} &= -A_i k \cos(\omega t - kx) \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial x} &= A_r k \cos(\omega t + kx) \\ \frac{\partial \psi_t}{\partial x} &= -A_t k_t \cos(\omega t - k_t x) \end{aligned}$$

sostituendo nella (65), per $x = 0$ si ha

$$-A_i k \cos \omega t + A_r k \cos \omega t = -A_t k_t \cos \omega t,$$

da cui:

$$k(A_i - A_r) = A_t k_t. \quad (66)$$

Dividendo membro a membro le (64) e (66), si ottiene

$$\frac{A_i + A_r}{A_i - A_r} = \frac{k}{k_t},$$

quindi:

$$A_r = A_i \frac{k - k_t}{k + k_t}.$$

Poiché $k/k_t = v_2/v_1$, rapporto tra le velocità di propagazione nei due fili, si ha

$$A_r = A_i \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}.$$

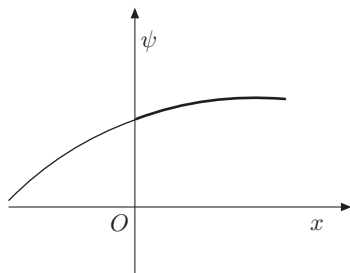


Fig. 18.17

Essendo:

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}, \quad \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}},$$

dove μ è la densità lineica, si ottiene

$$A_r = A_i \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}.$$

Il coefficiente di riflessione risulta:

$$r = \frac{A_r}{A_i} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}},$$

che si può scrivere:

$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2},$$

con $Z = \sqrt{T\mu}$, impedenza caratteristica, che questa volta si misura in $N/(m/s)$.

Se $\mu_1 > \mu_2$, A_i ed A_r hanno lo stesso segno; l'onda riflessa non subisce variazione di fase. Se $\mu_1 < \mu_2$, A_i e A_r hanno segno opposto; l'onda riflessa subisce una variazione di fase di π . L'ampiezza dell'onda trasmessa risulta

$$A_t = A_i + A_r = A_i(1 + r) = A_i \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}, \quad t = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}.$$

Si osservi che $t = 1 + r$; t è sempre positivo, mentre r è positivo o negativo secondo che $\sqrt{\mu_1}$ sia maggiore o minore di $\sqrt{\mu_2}$.

III 4. Intensità delle onde sonore.

L'intensità delle onde di pressione è espressa dalla (56). La sensibilità dell'orecchio umano varia in funzione della frequenza ed è tale che per ciascuna frequenza esiste un minimo di intensità, detta *soglia della sensazione sonora*, al di sotto della quale il suono non è percepibile, e un massimo di intensità, *soglia della sensazione dolorosa*, al di sopra della quale si ha disagio o dolore.

In figura 18 è illustrato il diagramma uditivo medio dell'orecchio umano; la curva superiore descrive l'andamento della sensazione dolorosa; quella inferiore la soglia di sensazione sonora in funzione della frequenza. In ordinate sono riportate l'intensità e l'ampiezza di pressione; si noti che l'orecchio è un

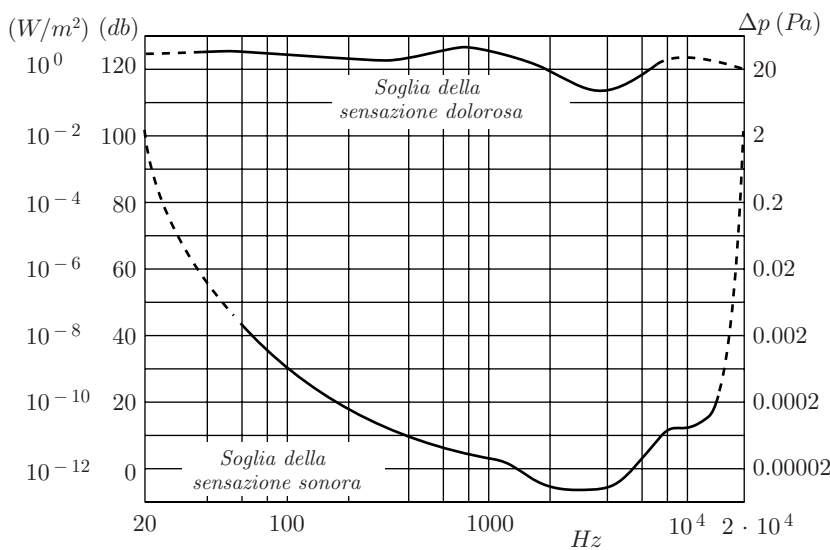


Fig. 18.18

rivelatore quadratico. L'orecchio, tra le soglie suddette, è caratterizzato da un rapporto tra le intensità enorme, 10^{12} ; per questo motivo l'intensità è espressa anche da un'altra unità, il *decibel* (*db*). Il livello d'intensità del suono, come di ogni altro fenomeno ondulatorio, è indicato con B ed è espresso in *db*:

$$B = 10 \log \frac{J}{J_0},$$

dove J_0 è una intensità di riferimento. Nel caso del suono in aria il riferimento corrisponde convenzionalmente a 10^{-12} W/m^2 . Per esempio, l'ampiezza di pressione del suono percepibile a 400 Hz , equazione (56), corrisponde all'intensità di $7,2 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$ e ad un livello sonoro di $8,57 \text{ db}$.

10. Onde sferiche

Per lo studio della propagazione di un'onda prodotta da una sorgente puntiforme, va presa in considerazione l'equazione generale dell'idrodinamica dei fluidi perfetti, supponendo che spostamenti, velocità, variazioni di volume e di pressione siano piccoli e tali da poter trascurare ogni termine contenente il loro quadrato o il loro prodotto. Per quanto riguarda l'equazione complementare che esprime la densità in funzione della pressione, ricordiamo l'espressione della dilatazione

$$\theta = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho},$$

dalla quale otteniamo il volume specifico:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}(1 + \theta). \quad (67)$$

In conformità alle ipotesi assunte, indicando con \mathbf{u} la velocità delle particelle, nell'equazione (14)-XVII,

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \cdot (u^2) + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u},$$

possiamo trascurare, al secondo membro, i fattori che contengono termini quadratici, e scrivere

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho_0}(1 + \theta) \nabla p = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Trascurando il termine

$$\frac{\theta}{\rho_0} \nabla p,$$

del secondo ordine, perché prodotto tra la dilatazione e il gradiente della pressione, si ha

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Essendo la variazione di pressione

$$\Delta p = -\frac{\theta}{\kappa_S}, \quad p = p_0 - \frac{\theta}{\kappa_S},$$

equazione (14), si ha:

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 + \frac{1}{\rho_0 \kappa_S} \nabla \theta = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Se inizialmente il fluido è in quiete, $\mathbf{u} = 0$ e $\theta = 0$, la precedente implica

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 = 0.$$

Pertanto:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 \kappa_S} \nabla \theta. \quad (68)$$

Si deduce che esiste un potenziale delle velocità $\varphi(x, y, z, t)$, tale che:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\theta}{\rho_0 \kappa_S}. \quad (69)$$

Dunque la (68) diventa

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

L'eventuale velocità iniziale, costante rispetto al tempo, implica un moto stazionario del fluido che non influisce sulla propagazione delle onde. Possiamo concludere quindi che *i moti di piccola ampiezza del fluido ammettono un potenziale delle velocità*. Si deduce inoltre che tali moti sono irrotazionali, $\nabla \times \nabla \varphi = 0$, pertanto devono essere longitudinali.

Dall'equazione di continuità:

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

tenendo presente la (67) che, con buona approssimazione, si può scrivere

$$\rho = \rho_0(1 + \theta)^{-1} \approx \rho_0(1 - \theta),$$

e trascurando, per le ipotesi fatte, i termini di secondo ordine, ossia $\rho_0 \theta u_x$ rispetto a $\rho_0 u_x$, si ottiene

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \rho_0 \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0. \quad (70)$$

Ma:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

dunque il primo termine della (70) è il laplaciano di φ , pertanto:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla^2 \varphi. \quad (71)$$

Ponendo nella (69) $v^2 = 1/\rho_0 \kappa_S$, con v velocità di propagazione, tale equazione si scrive

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = v^2 \theta. \quad (72)$$

Derivando rispetto al tempo e tenendo conto della (71), si ottiene

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \varphi. \quad (73)$$

La precedente costituisce l'equazione di propagazione del potenziale delle velocità. Si osservi che v rappresenta la velocità di propagazione, da non confondere con la velocità delle particelle.

La funzione $\varphi(x, y, z, t)$ che soddisfa la (73), permette di ricavare per derivazione rispetto alle coordinate, le componenti delle velocità delle particelle e per derivazione rispetto al tempo, equazione (69), la rarefazione. Sia le une che l'altra soddisfano l'equazione di D'Alembert; infatti derivando la (73) rispetto ad x si ha

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}.$$

Così per le altre componenti.

Analogamente derivando rispetto al tempo:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

Le componenti delle velocità e la rarefazione obbediscono all'equazione delle onde.

|| 10.1. Propagazione per onde sferiche

Consideriamo una piccola sfera pulsante che trasmette al mezzo circostante il suo movimento che chiaramente ha simmetria sferica. Se r è la distanza di un punto del mezzo dal centro della sfera, possiamo ritenere che la rarefazione sia funzione soltanto di r e del tempo t . Occorre dunque esprimere il laplaciano di θ in funzione della variabile r . Fissata l'origine del riferimento nel centro della sfera ed essendo $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, si ha

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}.$$

Risulta pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2}. \end{aligned}$$

Lo stesso procedimento vale per le altre variabili. Pertanto il laplaciano di θ diventa

$$\begin{aligned} \nabla^2 \theta &= \left(\frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \\ &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r}. \end{aligned}$$

Dunque l'equazione di propagazione della rarefazione è:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right). \quad (74)$$

Trasformiamo questa equazione, ponendo

$$\xi(r, t) = r\theta, \quad (75)$$

le cui derivate sono:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial r} = r \frac{\partial \theta}{\partial r} + \theta, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} = r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \theta}{\partial r}.$$

In questo modo la (74) assume la forma

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2}, \quad (76)$$

identica all'equazione di propagazione delle onde piane. L'integrale generale della (76) è del tipo già noto:

$$\xi(r, t) = f(vt - r) + g(vt + r).$$

La grandezza rappresentata da ξ contiene la somma di due quantità che si propagano per onde sferiche; la prima nel verso delle r crescenti, progressiva, l'altra in verso opposto.

Prendiamo in considerazione l'onda progressiva; dalla (75) si ottiene la rarefazione,

$$\theta = \frac{\xi}{r} = \frac{1}{r} f(vt - r), \quad (77)$$

che si propaga con velocità v , riducendosi in ragione di $1/r$.

Siamo ora in grado di ricavare la velocità delle particelle del mezzo e lo spostamento. Introduciamo, per comodità, una funzione $\zeta(vt - r)$, la cui derivata seconda rispetto ad r sia uguale a $-f$; perciò la (77) diventa:

$$\theta = -\frac{1}{r} \zeta''(vt - r), \quad (78)$$

Tenuto conto della (72), si ottiene:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = v^2 \theta = -\frac{v^2}{r} \zeta''(vt - r),$$

e integrando rispetto al tempo

$$\varphi = -\frac{v}{r} \zeta'(vt - r).$$

A causa della simmetria sferica, le velocità delle particelle sono radiali, pertanto nel punto r e all'istante t , si ha

$$u(r, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{v}{r^2} \zeta'(vt - r) + \frac{v}{r} \zeta''(vt - r). \quad (79)$$

Indicando, come di consueto, lo spostamento con ψ , è anche

$$u(r, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{v}{r^2} \zeta'(vt - r) + \frac{v}{r} \zeta''(vt - r),$$

dunque integrando rispetto al tempo:

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r^2} \zeta(vt - r) + \frac{1}{r} \zeta'(vt - r). \quad (80)$$

L'onda sferica è costituita da due termini; uno decresce come $1/r^2$, l'altro come $1/r$. Il loro contributo dipende dalla distanza r ; per r sufficientemente piccolo $1/r$ è trascurabile rispetto a $1/r^2$ e, con buona approssimazione si ha

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r^2} \zeta(vt - r).$$

Per r sufficientemente grande, al contrario, l'onda sferica è rappresentata dall'equazione:

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r} \zeta'(vt - r),$$

e la sua ampiezza decresce in ragione inversa alla distanza r dalla sorgente. Per valutare con maggiore precisione la distanza r per la quale prevale l'uno o l'altro termine dell'onda, conviene prendere in considerazione le onde sferiche armoniche.

10.2. Onde sferiche armoniche

Nell'ipotesi che la soluzione $f(vt - r)$ sia armonica, la rarefazione, equazione (77), si può esprimere come

$$\theta = \frac{\theta_0}{r} \cos(\omega t - kr), \quad (81)$$

dove θ_0 è l'ampiezza. In conformità con la (78), si ha

$$\zeta'' = -r\theta = -\theta_0 \cos(\omega t - kr).$$

Integrando successivamente rispetto ad r , si ha

$$\zeta' = \frac{\theta_0}{k} \sin(\omega t - kr), \quad \zeta = \frac{\theta_0}{k^2} \cos(\omega t - kr).$$

Ponendo $A = \theta_0/k$, per la (80), si ottiene

$$\psi(r, t) = \frac{\zeta}{r^2} + \frac{\zeta'}{r} = \frac{A}{kr^2} \cos(\omega t - kr) + \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr),$$

che scriviamo:

$$\psi(r, t) = \frac{A}{kr^2} \sin\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr). \quad (82)$$

La somma di queste onde risulta

$$\psi(r, t) = \left(\frac{A}{r} \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} + 1}\right) \sin(\omega t - kr + \varphi), \quad (83)$$

in cui ampiezza e fase sono state ottenute per mezzo delle formule (7) e (8) del capitolo IV. La fase è data dalla relazione:

$$\tan \varphi = \frac{\lambda}{2\pi r}.$$

Al crescere di r , in pratica per r uguale ad alcune volte λ , φ tende a zero e l'ampiezza tende al valore A/r . Nella (82) sopravvive soltanto l'onda

$$\psi(r, t) = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr).$$

PRESSIONE

Ricordando la (14), si ha

$$\begin{aligned} \Delta p &= -K_S \theta = -K_S \frac{\theta_0}{r} \cos(\omega t - kr) \\ &= \frac{\Delta p_0}{r} \sin\left(\omega t - kr - \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (84)$$

dove $\Delta p_0 = K_S \theta_0$ è l'ampiezza di pressione. La pressione si propaga con una differenza di fase di $-\pi/2$ rispetto all'onda di spostamento, con ampiezza che decresce come $1/r$.

DENSITÀ MEDIA DI ENERGIA E INTENSITÀ

La densità media di energia, a distanze sufficientemente grandi rispetto a λ , è ancora data dalla (53) o dalla (54), ossia:

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \rho \frac{A^2}{r^2} \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_0)^2}{r^2 \rho v^2}. \quad (85)$$

L'intensità risulta:

$$J = v \bar{u} = \frac{1}{2} \rho v \frac{A^2}{r^2} \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_0)^2}{r^2 \rho v}. \quad (86)$$

In un'onda sferica, la densità media di energia e l'intensità decrescono come $1/r^2$.

Se consideriamo le intensità corrispondenti alle distanze r_1 e r_2 :

$$J_1 = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_0)^2}{r_1^2 \rho v}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_0)^2}{r_2^2 \rho v},$$

si ottiene

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Le intensità sono inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze dalla sorgente. Viceversa la potenza che attraversa una qualsiasi superficie d'onda, è indipendente da r :

$$W = \frac{1}{2} 4\pi r^2 \frac{(\Delta p_0)^2}{r^2 \rho v} = \frac{2\pi}{\rho v} (\Delta p_0)^2. \quad (87)$$

Questo risultato è conseguenza del principio di conservazione dell'energia il quale, in assenza di effetti dissipativi, richiede che la

stessa potenza media attraverso qualsiasi superficie sferica, concentrica con la sorgente.

III 11. Effetto Doppler

È opportuno ricordare che la velocità di propagazione di un'onda è misurata rispetto al riferimento che si suppone fisso, in un mezzo in quiete.

L'effetto Doppler è un fenomeno che si manifesta quando sorgente e osservatore sono in moto relativo; la frequenza delle onde osservata risulta diversa dalla frequenza delle onde emesse dalla sorgente.

Sono utili per il proseguimento le seguenti considerazioni preliminari. Consideriamo una sorgente di onde sferiche S e un ricevitore R , entrambi in quiete; indichiamo con N il numero di onde emesse nell'intervallo di tempo Δt , sarà:

$$N = \nu_0 \Delta t,$$

dove ν_0 è la frequenza, ossia il numero di onde emesse nell'unità di tempo. Se v è la velocità di propagazione rispetto al mezzo, in quiete, tali onde sono comprese in uno spazio $v\Delta t$ e la lunghezza d'onda risulta

$$\lambda = \frac{v\Delta t}{N} = \frac{v\Delta t}{\nu_0 \Delta t} = \frac{v}{\nu_0} = \lambda_0.$$

La frequenza osservata dal ricevitore è il numero d'onde che lo oltrepassa nell'unità di tempo. Poiché il numero d'onde contenute nello spazio $v\Delta t$ è $v\Delta t/\lambda_0$, la frequenza osservata dal ricevitore è

$$\nu_R = \frac{v\Delta t/\lambda_0}{\Delta t} = \frac{v}{\lambda_0} = \nu_0.$$

Tutto ciò appare ovvio, ma è utile per il ragionamento che faremo.

II 11.1. Mezzo in moto rispetto alla sorgente e all'osservatore

Supponiamo che un vento soffi nella direzione che va dalla sorgente all'osservatore, detta u la velocità del vento, la velocità di propagazione rispetto alla sorgente e all'osservatore, fissi, è

$$v' = v + u.$$

La velocità del vento è evidentemente la velocità di trascinamento del mezzo. La lunghezza d'onda λ' osservata è maggiore di quella in assenza di vento, perché lo stesso numero di onde emesse, $N = \nu_0 \Delta t$, è contenuto nella lunghezza $v' \Delta t = (v + u) \Delta t$; infatti:

$$\lambda' = \frac{v' \Delta t}{N} = \frac{(v + u) \Delta t}{\nu_0 \Delta t} = \frac{v + u}{\nu_0} = \frac{v + u}{v} \lambda_0, \quad (88)$$

dove λ_0 è la lunghezza d'onda in assenza di vento. Però il numero di onde emesse nell'intervallo di tempo Δt , sono ora contenute nella lunghezza $(v + u)\Delta t$, ma il loro numero è sempre $\nu_0\Delta t$, pertanto la frequenza osservata è

$$\nu_R = \frac{v'}{\lambda'} = \frac{v + u}{v + u} \frac{v}{\lambda_0} = \nu_0, \quad (89)$$

uguale a quella emessa dalla sorgente. Mentre la lunghezza d'onda varia, la frequenza osservata non muta. L'effetto che si percepisce quando si ascolta il suono di una campana in presenza di vento è dovuto alle variazioni di densità del mezzo.

|| 11.2. Sorgente in moto

Sia v_S la velocità della sorgente rispetto al mezzo. Davanti alla sorgente i fronti d'onda si infittiscono, mentre dietro sono più distanziati, figura 19. La sorgente nell'intervallo di tempo Δt emette $N = \nu_0\Delta t$ onde. Il primo fronte d'onda percorre la distanza $v\Delta t$, mentre la sorgente percorre il tratto $v_S\Delta t$.

Davanti alla sorgente gli N fronti d'onda occupano una lunghezza $v\Delta t - v_S\Delta t$, mentre dietro occupano la lunghezza $v\Delta t + v_S\Delta t$. La lunghezza d'onda davanti è

$$\lambda_1 = \frac{(v - v_S)\Delta t}{\nu_0\Delta t} = \frac{v}{\nu_0} \left(1 - \frac{v_S}{v}\right).$$

Quella dietro:

$$\lambda_2 = \frac{(v + v_S)\Delta t}{\nu_0\Delta t} = \frac{v}{\nu_0} \left(1 + \frac{v_S}{v}\right).$$

In una unica notazione si ha

$$\lambda' = \lambda_0 \left(1 \pm \frac{v_S}{v}\right).$$

Poiché la velocità di propagazione dipende dalle proprietà del mezzo, la frequenza osservata nel caso che la sorgente si avvicini al ricevitore, risulta:

$$\nu' = \frac{v}{\lambda_1} = \nu_0 \left(1 - \frac{v_S}{v}\right)^{-1}, \quad (\nu' > \nu_0). \quad (90)$$

Se la sorgente si allontana dal ricevitore:

$$\nu' = \frac{v}{\lambda_2} = \nu_0 \left(1 + \frac{v_S}{v}\right)^{-1}, \quad (\nu' < \nu_0). \quad (91)$$

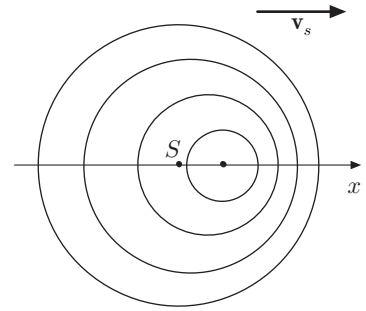


Fig. 18.19

|| 11.3. Ricevitore in moto

Poichè la sorgente è ferma, la lunghezza d'onda delle onde emesse resta invariata. Se il ricevitore si avvicina alla sorgente con velocità v_R , oltrepassa un numero di fronti d'onda aggiuntivo $v_R \Delta t / \lambda_0$. Dunque il numero di onde complessivo incontrato risulta

$$N = \frac{(v + v_R) \Delta t}{\lambda_0},$$

la frequenza osservata sarà:

$$\nu' = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v + v_R}{\lambda_0} = \frac{v + v_R}{v} \frac{v}{\lambda_0} = \nu_0 \left(1 + \frac{v_R}{v} \right). \quad (92)$$

Con ragionamento analogo, se il ricevitore si allontana dalla sorgente, si ottiene:

$$\nu' = \nu_0 \left(1 - \frac{v_R}{v} \right). \quad (93)$$

Se il mezzo è in moto con velocità u , la velocità di propagazione va sostituita con $v' = v \pm u$.

È interessante considerare le variazioni di frequenza Doppler quando la velocità della sorgente o del ricevitore è molto minore della velocità di propagazione. L'espressione (92), ricevitore che si avvicina alla sorgente, non è equivalente alla (90), sorgente che si avvicina al ricevitore. Quest'ultima si può scrivere

$$\nu' = \nu_0 \left(1 - \frac{v_R}{v} \right)^{-1} = \nu_0 \left(1 + \frac{v_S}{v} + \frac{v_S^2}{v^2} + \dots \right).$$

Tuttavia se $v_S \ll v$, è possibile trascurare i termini successivi a quello lineare e le due espressioni coincidono. In ogni caso, per decidere se il ricevitore si avvicina alla sorgente oppure la sorgente al ricevitore, occorre considerare il contributo del termine $(v_S/v)^2$.

Esempi

- ||| 5. Una sorgente sonora emette un suono di frequenza $\nu_0 = 870 \text{ Hz}$, mentre un vento costante soffia alla velocità $u = 100 \text{ km/h}$ nel verso che va dalla sorgente al ricevitore. Si determini la frequenza percepita dal ricevitore fermo e quando si avvicina alla sorgente, alla velocità di $v_R = 50 \text{ km/h}$; (velocità del suono in aria $v = 340 \text{ m/s}$).

Se il ricevitore è fermo la frequenza percepita è la stessa; varia la lunghezza d'onda, equazione (88). Se il ricevitore si avvicina alla sorgente, dalla (92) si ha

$$\nu' = \nu_0 \left(1 + \frac{v_R}{v + u} \right) = 903 \text{ Hz}.$$

- ||| 6. Una sorgente in moto con velocità $v_S = 7 \text{ m/s}$, emette un suono di frequenza $\nu_0 = 100 \text{ Hz}$, allontanandosi da un ricevitore fermo, e avvicinandosi ad una parete, ortogonale alla direzione del moto. Determinare la frequenza dei battimenti rivelati dal ricevitore.

Il ricevitore rivelerà l'onda emessa dalla sorgente che si allontana e l'onda riflessa dalla parete. La frequenza della prima onda osservata dal ricevitore,

per la (91), risulta

$$\nu' = \frac{v}{v + v_S} \nu_0 = 979 \text{ Hz}.$$

La parete costituisce, rispetto all'onda incidente, un ricevitore, perciò l'onda riflessa, per la (90), ha frequenza:

$$\nu'' = \frac{v}{v - v_S} \nu_0 = 1021 \text{ Hz}$$

La frequenza del battimento osservato dal ricevitore fisso risulta

$$\nu_B = \nu'' - \nu' = 421 \text{ Hz}$$

- III 7. Una automobile viaggia a velocità costante u ed emette un segnale acustico di frequenza ν . Un ricevitore fermo misura una frequenza ν_1 quando l'automobile si avvicina e una frequenza ν_2 quando si allontana. Noto il rapporto ν_1/ν_2 , determinare la velocità dell'automobile; (velocità del suono 340 m/s).

Si ha

$$\nu_1 = \frac{v}{v + u} \nu_0, \quad \nu_2 = \frac{v}{v - u} \nu_0.$$

Dunque:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{v + u}{v - u}, \quad u = \frac{\nu_1/\nu_2 - 1}{\nu_1/\nu_2 + 1} v = 23,8 \text{ m/s}.$$

.....