

17. Dinamica dei fluidi

1. Introduzione

L'atto di moto di un sistema continuo può essere studiato assegnando, in ogni istante, la velocità posseduta da una generica particella del sistema, intendendo per particella un elemento che comprenda un numero di molecole sufficientemente grande, in modo che la risultante delle velocità "termiche" sia nulla, ma tale da potere ritenere che le forze agenti siano applicate in un unico punto. Per individuare una tale particella, si può assumere la posizione P_0 che essa occupa all'istante t_0 ; allora l'atto di moto del sistema, note le posizioni iniziali \mathbf{r}_0 di ogni particella, è dato dal vettore velocità, funzione di \mathbf{r}_0 e del tempo t :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t).$$

Il punto di vista assunto è forse il più spontaneo e viene chiamato *punto di vista lagrangiano*. Peraltro, trattandosi di un sistema a molte particelle, è praticamente impossibile formulare e risolvere il problema in questi termini. Tuttavia, l'atto di moto di un sistema continuo può essere assegnato, ponendosi da un altro punto di vista: il *punto di vista euleriano*. Esso consiste nell'assegnare, in ogni istante t , la velocità \mathbf{v} che possiede una particella imprecisata, la quale, in quell'istante, transita per un determinato punto P del campo del moto, individuato dal vettore posizione \mathbf{r} , figura 1. Perciò l'atto di moto è dato dal vettore velocità:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t).$$

Il punto di vista lagrangiano implica la descrizione "storica" della velocità di ogni particella; viceversa il punto di vista euleriano descrive, in ogni istante, la *distribuzione delle velocità* nei punti del campo di movimento. L'equazione precedente fornisce dunque la velocità, a un certo istante, della particella che transita per P e definisce così l'atto di moto all'istante considerato. Se, in particolare, l'atto di moto non dipende dal tempo, cioè la velocità di ogni particella che transita per P è la stessa, il moto si dice *stazionario*. Nel seguito adotteremo sempre il punto di vista euleriano.

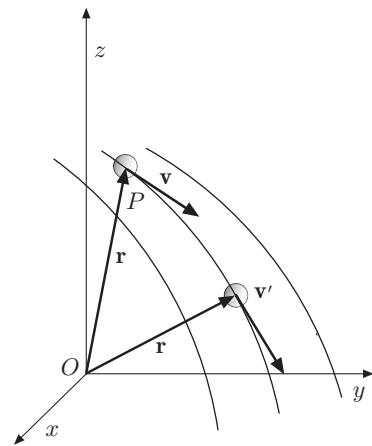


Fig. 17.1

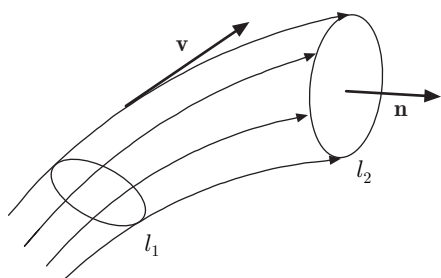


Fig. 17.2

In conformità con le proprietà dei campi vettoriali, descritte nel paragrafo 7-IV, nel campo euleriano delle velocità, definiamo *linea di flusso* una linea che, in ogni suo punto e ad ogni istante, ha per tangente il vettore velocità della particella di fluido che transita in tale punto. La linea di flusso si riferisce a un certo istante e può cambiare col tempo. Se il moto è stazionario le linee di flusso

sono chiamate *linee di corrente* o, se non sussistono ambiguità, ancora linee di flusso. La loro configurazione evidentemente non muta nel tempo. L'insieme delle linee di flusso passanti per i punti di una linea chiusa, determina un *tubo di flusso* il quale, nel caso di moto stazionario, è fermo ed assume lo stesso ruolo di un tubo reale all'interno del quale scorre il fluido, figura 2.

Prenderemo in considerazione essenzialmente fluidi privi di viscosità, il cui effetto complica notevolmente il formalismo matematico e sarà esaminato in alcuni casi specifici. In particolare, per quanto riguarda i gas, assumendo che il moto si svolga in condizioni isoterme o adiabatiche e sia sufficientemente lento, occorre tener conto della legge di compressibilità, facilmente ricavabile dall'equazione di stato. Per i liquidi, essendo molto piccolo il coefficiente di compressibilità, con buona approssimazione, si assumerà costante la densità.

III 2. Equazione di continuità

Nella Meccanica classica la massa non varia durante il moto; se il sistema è isolato l'invariabilità della massa è in accordo con l'intuizione; se non è isolato la massa può variare, come si è descritto in alcuni problemi del capitolo IX. In questi casi, considerato un sistema più esteso, si verifica solo un trasferimento di massa da una parte all'altra del sistema complessivo; la conservazione della massa è sempre verificata e costituisce una legge fondamentale della Meccanica classica.

Nel caso di un sistema continuo, detta ρ la densità, la massa del sistema sarà

$$m = \int_V \rho dV,$$

e l'invariabilità della massa, principio di conservazione della massa, si traduce nell'equazione

$$\frac{dm}{dt} = 0.$$

Da questa equazione discende che detto V il volume occupato ad un certo istante da una porzione di fluido, sempre formato dagli stessi elementi materiali, vale la relazione:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0.$$

Durante il moto, in generale possono variare sia V che ρ , ma non varia l'integrale precedente, che esprime l'invariabilità della massa della porzione di fluido. Ne segue che la variazione di densità è legata alla variazione di volume del corpo.

Consideriamo, nell'intorno di un punto del fluido, un elemento di volume dV ; si ha

$$\frac{d}{dt}(\rho dV) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt}dV + \rho \frac{d}{dt}(dV), \quad (1)$$

in cui il secondo termine rappresenta la velocità di deformazione dell'elemento considerato. Ma la variazione relativa di volume dell'elemento, equazione (34)-XV, è uguale alla somma degli elementi diagonali del tensore delle deformazioni,

$$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z}$$

dunque la velocità di deformazione dell'elemento considerato è data da

$$\frac{d}{dt}(dV) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z} \right) dV = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV.$$

Pertanto la (1) diventa:

$$\frac{d\rho}{dt}dV + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = 0,$$

ovvero

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Nella precedente la derivata di ρ rispetto al tempo è relativa allo stesso elemento materiale che viene seguito nei vari istanti. Ciò significa che, ponendosi dal punto di vista lagrangiano e ritenendo ρ funzione del vettore \mathbf{r}_0 e del tempo, la derivata di ρ che compare nella (2), è semplicemente la derivata rispetto a t , mantenendo fisso \mathbf{r}_0 . Se invece ci si pone dal punto di vista euleriano e si considera la densità come funzione della posizione \mathbf{r} e del tempo t , la densità dipende dal tempo sia direttamente che indirettamente, attraverso le coordinate cartesiane x, y, z , che variano col tempo nel moto dell'elemento materiale al quale si riferiscono. Perciò la derivata della densità rispetto al tempo, equazione (2), è:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y}v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z}v_z.$$

Sostituendo nella (2) si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y}v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z}v_z + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0,$$

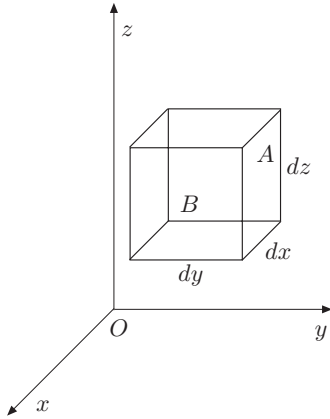


Fig. 17.3

che in termini più concisi si scrive†:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (3)$$

più adatta a rappresentare il principio di conservazione della massa, dal punto di vista euleriano. La (3) costituisce l'equazione di continuità in termini *locali* ed esprime il principio di conservazione della massa.

L'equazione di continuità, dal punto di vista euleriano, può essere ricavata con considerazioni più intuitive, attraverso il bilancio di materia che attraversa un elemento di volume del fluido. Si consideri, figura 3, un cubo elementare $dV = dxdydz$ e siano v_x, v_y, v_z, ρ le componenti della velocità e la densità del fluido, funzioni di x, y, z e del tempo t . Il volume di fluido che entra attraverso la faccia A , ortogonale all'asse x , nel tempo dt , è $v_x(A)dydzdt$, quindi la sua massa è $\rho(A)v_x(A)dydzdt$. Analogamente, la massa elementare che esce attraverso la faccia opposta B , è data da $\rho(B)v_x(B)dydzdt$. Limitandosi a variazioni del primo ordine si ha

$$\rho(B) = \rho(A) + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx, \quad v_x(B) = v_x(A) + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx;$$

quindi

$$\rho(B)v_x(B) = \left(\rho(A) + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) \left(v_x(A) + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right).$$

Trascurando gli infinitesimi del secondo ordine, si ha:

$$\begin{aligned} \rho(B)v_x(B) &= \rho(A)v_x(A) + \left(\rho(A) \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x(A) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) dx \\ &= \rho(A)v_x(A) + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

Pertanto la massa netta che esce dal cubo elementare risulta

$$\rho(B)v_x(B)dydzdt - \rho(A)v_x(A)dydzdt = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dy dz dt.$$

Considerando le altre due coppie di facce, la massa totale dm che esce dal cubo elementare risulta:

$$dm = \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right) dx dy dz dt.$$

Ma la massa elementare contenuta nel cubo, all'istante t è $\rho dxdydz$, quindi la sua diminuzione nell'intervallo dt è

$$dm = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz.$$

†Si osservi che la divergenza del prodotto di uno scalare per un vettore è data da $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v})$.

Uguagliando le due espressioni, si ottiene:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = -\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

ossia:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Se il moto è stazionario \mathbf{v} e ρ variano col punto, ma nello stesso posto non variano nel tempo, $\partial\rho/\partial t = 0$, quindi l'equazione di continuità diventa:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Questa equazione indica che il flusso entrante nell'elemento è uguale al flusso uscente. Infatti, per il teorema della divergenza, paragrafo 7-VI, in termini finiti si ha

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0,$$

dove S è la superficie chiusa che racchiude una porzione di fluido di volume V ed $\hat{\mathbf{n}}$ la normale all'elemento di superficie dS , orientata verso l'esterno.

Consideriamo un tubo di flusso di un fluido in moto stazionario. Una porzione di fluido sia delimitata da due sezioni normali S_1 , S_2 e dalla parete laterale del tubo di flusso. Supponendo che tali sezioni siano sufficientemente piccole, in modo che le velocità v_1 e v_2 possano essere ritenute uniformi, si ha

$$\rho_1 v_1 S_1 - \rho_2 v_2 S_2 = 0, \quad \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2.$$

Il flusso attraverso la superficie laterale è nullo poiché la velocità è ortogonale alla normale orientata. Questa relazione esprime ancora l'equazione di continuità relativamente al caso particolare esaminato. Se inoltre il fluido è incompressibile, $\rho = \text{cost}$, si ha

$$v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

Si definisce portata P il volume di fluido che attraversa la sezione S nell'unità di tempo:

$$P = Sv; \quad (4)$$

essa si misura in m^3/s . Nel moto stazionario la portata è costante.

III 3. Distribuzione delle velocità

In un sistema continuo, come un mezzo elastico o un fluido, paragrafo 4-XV, lo spostamento di ogni particella è funzione delle sue coordinate. Consideriamo un elemento di fluido nell'intorno di un punto P_0 ; lo spostamento elementare di una particella in questo intorno, limitandosi a variazioni del primo ordine, è dato

dal vettore infinitesimo

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + d\mathbf{s},$$

dove \mathbf{s}_0 è lo spostamento elementare di P_0 . Ricordando le conclusioni conseguite al paragrafo citato, tale spostamento si esprime nel modo seguente:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{s} \times \mathbf{r} + \mathcal{T}_S \mathbf{r}, \quad (5)$$

dove \mathbf{r} è il vettore infinitesimo che individua la posizione della particella rispetto a P_0 e \mathcal{T}_S il tensore delle deformazioni. In altri termini lo spostamento infinitesimo è costituito da un termine di traslazione, un termine di rotazione e un termine di deformazione dell'elemento di fluido considerato.

Dividendo per l'intervallo di tempo dt la (5), operazione legittima poiché gli spostamenti considerati sono infinitesimi, si ottiene la velocità della particella:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{r} + \mathcal{T} \mathbf{r}, \quad (6)$$

dove \mathcal{T} è il tensore che si ottiene dividendo ogni termine di \mathcal{T}_S per dt ; ossia:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

simile a quello delle deformazioni.

In analogia a quest'ultimo, i suoi termini rappresentano le velocità di deformazione del fluido, lineari e di scorrimento. Infatti, consideriamo una qualsiasi deformazione: per esempio

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial s_x}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_{xx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial s_x}{\partial t} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

La somma dei termini diagonali del tensore \mathcal{T} ,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \chi, \quad (7)$$

rappresenta la velocità di dilatazione del fluido. I termini non diagonali rappresentano le velocità delle deformazioni di scorrimento.

Ricordando che

$$\frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega},$$

la (6) si scrive:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathcal{T} \mathbf{r}, \quad (8)$$

dove il primo termine è la velocità comune a tutti i punti dell'elemento, il secondo è la velocità di rotazione dell'elemento attorno ad un asse passante per P_0 e rappresenta un moto vorticoso, il terzo, come s'è detto, rappresenta la velocità di deformazione.

Se il moto è irrotazionale, assenza di vortici, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, il vettore velocità deriva da una funzione scalare $\varphi(x, y, z)$ chiamato *potenziale della velocità*, tale che

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (9)$$

ovvero:

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi.$$

La divergenza di \mathbf{v} diventa:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi.$$

Se il fluido è incompressibile, $\rho = \text{cost}$, si ha $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Pertanto si ottiene *l'equazione di Laplace*:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (10)$$

Questa equazione assume il ruolo di equazione di continuità. Se dunque sono verificate contemporaneamente le condizioni

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

il moto è irrotazionale e solenoidale e il campo delle velocità si dice *armonico*.

Complementi ed esempi

III 1. Campi vettoriali armonici.

Come si è detto prima, il moto si svolge senza vortici e il flusso entrante attraverso una qualsiasi sezione di un generico tubo di flusso, è uguale al flusso uscente. Nel seguito avremo occasione di considerare situazioni simili. L'analogia idrodinamica è molto utile in altri argomenti di Fisica, in particolare nell'Elettromagnetismo.

Tra le funzioni armoniche ha particolare interesse la funzione $\varphi = 1/r$. Tale funzione è detta *funzione armonica elementare*, e caratterizza, come s'è visto, l'energia potenziale gravitazionale. La verifica della sua armonicità è immediata:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{1}{r^5} (2x^2 - y^2 - z^2), & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{1}{r^5} (2y^2 - x^2 - z^2), \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{1}{r^5} (2z^2 - x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Sommando queste relazioni si ottiene

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0.$$

III 2. Moto irrotazionale.

Poiché $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, le componenti della velocità sono date dalle (9). Le superfici equipotenziali sono ortogonali alle linee di flusso. Per una linea qualsiasi congiungente due punti P_1, P_2 , l'integrale

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \varphi_2 - \varphi_1$$

è indipendente dalla linea. Per una linea chiusa,

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0;$$

la circuitazione è nulla. In generale le superfici equipotenziali $\varphi(x, yz) = cost$ sono superfici isobariche. Per esempio, in un condotto in cui scorre un fluido ideale in regime stazionario, il campo delle velocità è costante e parallelo all'asse del condotto; le superfici equipotenziali sono ortogonali a quest'asse. Se il condotto è orizzontale le superfici $\varphi = cost$ sono piani verticali.

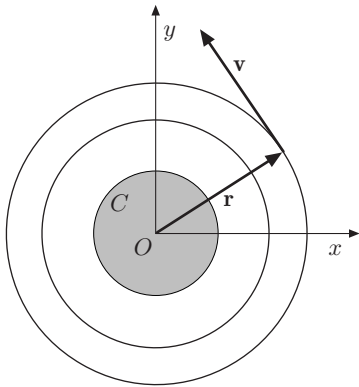


Fig. 17.4

Supponiamo che il fluido ruoti con moto stazionario attorno a un cilindro C , il cui asse coincide con l'asse z di una terna cartesiana, figura 4. Le linee di flusso, in ogni piano parallelo al piano $x-y$, siano cerchi concentrici e la velocità, tangente in ogni istante a dette linee, sia inversamente proporzionale alla distanza r dall'asse secondo la relazione $v = k/r$, con k costante. Si ha:

$$v_x = -\frac{k}{r} \sin(xr), \quad v_y = \frac{k}{r} \cos(xr), \quad v_z = 0,$$

ovvero:

$$v_x = -\frac{ky}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{kx}{x^2 + y^2}, \quad v_z = 0.$$

Si verifica immediatamente che il moto è irrotazionale. Tuttavia la circuitazione di \mathbf{v} è nulla,

$$\oint_{l_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

solo se calcolata lungo una linea chiusa l_1 , non concatenata col cilindro, figura 5. Infatti:

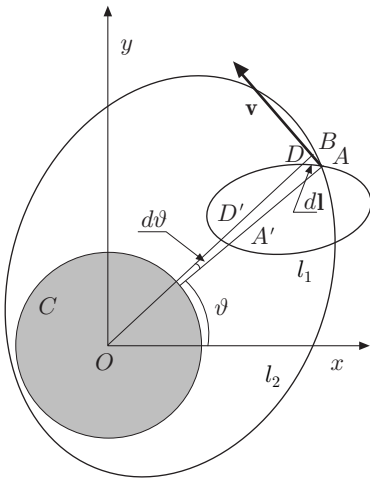


Fig. 17.5

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = v AB = \frac{k}{r} r d\theta = k d\theta,$$

dove AB è la proiezione infinitesima di $d\mathbf{l}$ secondo \mathbf{v} e $d\theta$ l'angolo elementare sotteso da AB . Poiché ad ogni elemento di linea AD corrisponde un elemento $A'D'$ che dà un contributo esattamente opposto, l'integrale considerato è nullo. Analogamente si verifica che, fissati due punti P_1, P_2 su l_1 , l'integrale lungo l'arco di linea compreso tra i due punti,

$$\int_{P_1}^{P_2} k d\theta = k(\theta_2 - \theta_1),$$

dipende solo dagli estremi. Il potenziale delle velocità è dunque

$$\varphi = k\theta + C,$$

dove C è una costante. Supponendo che φ si annulli per $\theta = 0$, le superfici equipotenziali sono tutti i semipiani uscenti dall'asse z , su ciascuno dei quali θ è costante, ortogonali appunto alle linee di flusso. Osservando che

$$\theta = \sin^{-1} \frac{y}{r} = \sin^{-1} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

per mezzo delle (9), si ottengono immediatamente le componenti della velocità.

Se la linea l_2 lungo la quale si calcola la circuitazione è concatenata col cilindro, si ha

$$\oint_{l_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = k \oint_{l_2} d\theta = 2k\pi,$$

e se è concatenata n volte:

$$\oint_{l_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = k \oint_{l_2} d\theta = 2nk\pi.$$

Il potenziale si dice *polidromo*, e gli infiniti valori che può assumere sono

$$\varphi = k\theta + 2nk\pi.$$

In questo caso il potenziale scalare φ non è atto a determinare univocamente la velocità. Si dimostra che l'introduzione di una funzione vettoriale, potenziale vettore, elimina questo inconveniente.

È rilevante l'analogia con la circuitazione del campo di induzione magnetica, prodotto da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente.

III 3. *Vortici.*

L'esperienza mostra che i vortici, una volta formati, tendono a conservarsi e, in un fluido ideale, si manterrebbero indefinitamente se non intervenissero gli attriti. Solo nei fluidi poco viscosi, come l'aria o l'acqua, alcune esperienze mostrano quale forte individualità abbiano le parti di fluido in moto vorticoso, $\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$.

I vortici che si prestano bene all'esperienza sono quelli anulari, cioè quelli nei quali l'asse del vortice si chiude su se stesso, figura 6. Molti fumatori sanno produrre questi vortici col fumo emesso bruscamente ed in piccole quantità dalla bocca. Un recipiente pieno di fumo, con un foro di qualche centimetro di diametro, percorso sulla parete opposta al foro, emette anelli di fumo ben distinti. Questi anelli, in aria calma, si propagano per molti metri prima di distruggersi; si osserva inoltre che urtandosi tra loro, due anelli rimbalzano quasi elasticamente. Una esperienza molto istruttiva consiste nel far cadere in un vaso pieno d'acqua delle gocce di inchiostro, da un'altezza di circa 4 centimetri dalla superficie dell'acqua. Ogni goccia cadendo dà luogo ad un perfetto vortice che si propaga fino ad una profondità di circa 20 centimetri senza che si distrugga.

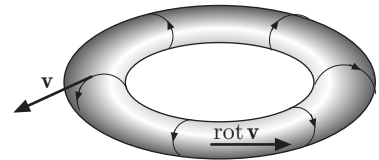


Fig. 17.6

III 4. **Dinamica dei fluidi ideali**

Si è detto che, dal punto di vista euleriano, la velocità di una particella di fluido è funzione del punto e del tempo, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$. Per determinare l'accelerazione basta derivare la velocità rispetto al tempo, osservando che \mathbf{v} dipende dal tempo sia esplicitamente che implicitamente, attraverso le coordinate della particella. Dunque si avrà:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

Essendo

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \mathbf{k} \right) \dot{x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \mathbf{k} \right) \dot{y} \\ & + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \mathbf{k} \right) \dot{z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \mathbf{k}. \end{aligned} \tag{11}$$

La componente dell'accelerazione secondo x risulta:

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t}; \quad (12)$$

le altre hanno espressioni simili.

La (11) rappresenta l'accelerazione *totale o materiale*; i primi tre termini rappresentano l'*accelerazione locale*. L'accelerazione locale esprime la variazione di velocità, nell'unità di tempo, in un determinato punto del fluido. Per chiarire il significato dell'accelerazione locale, basta pensare al flusso di un fluido in un condotto orizzontale, di sezione variabile, in regime stazionario, $\partial v_x / \partial t = 0$. Siccome la portata, equazione (4), è costante, la velocità del fluido diminuisce all'aumentare della sezione e viceversa; si capisce come questo termine dell'accelerazione tenga conto di questa circostanza. La (12) può essere scritta:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} = & \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ & + \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ & + \left[v_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - v_y \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned}$$

La prima parentesi del secondo membro è la metà della derivata, rispetto a x , del quadrato del modulo della velocità,

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$

la parentesi quadra è la componente secondo x del prodotto vettoriale $(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$. Ad analoga conclusione si perviene per le altre componenti; in definitiva l'accelerazione è data dall'espressione vettoriale

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(v^2) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}. \quad (13)$$

Siamo ora in grado di scrivere l'equazione della dinamica del fluido ideale.

Tenuto conto che sul fluido agiscono forze di volume e di pressione e che all'equilibrio, $\mathbf{v} = 0$,

$$\mathbf{F} = \nabla p,$$

dove \mathbf{F} è la forza per unità di volume e p la pressione statica, in genere diversa da quella dinamica, indicando ancora con \mathbf{F} la forza per unità di massa, l'equazione della dinamica dei fluidi ideali si scrive:

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(v^2) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}. \quad (14)$$

Detta X, Y, Z le componenti di \mathbf{F} e tenuto conto della (12), la (14)

dà luogo alle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\quad (15)$$

Queste relazioni costituiscono le *equazioni di Eulero*. Esse, insieme all'equazione di continuità, legano tra loro cinque grandezze v_x, v_y, v_z, p e ρ . Per ricavare tali grandezze, occorre ancora una relazione. Poiché, in genere, il moto avviene in condizioni isoterme o adiabatiche, la densità del fluido è funzione della sola pressione; perciò la relazione complementare che va presa in considerazione è la legge di compressibilità

$$\rho = f(p).$$

Per esempio, nel caso di un flusso isoterma e sufficientemente lento di un gas ideale, dalla legge di Boyle si ha

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = \text{cost.}$$

Se invece il flusso è adiabatico

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost.},$$

dove γ è il rapporto tra i calori molari a pressione ed a volume costante.

Va notato che le equazioni di Eulero non sono lineari, perché contengono i termini $\nabla(v^2)$ e $\nabla \times \mathbf{v}$. L'integrazione è difficoltosa in quanto l'integrale generale non si può ottenere come combinazione lineare di integrali particolari, tuttavia nel moto stazionario del fluido ideale, l'integrale richiesto è immediato.

Prendiamo in esame un fluido ideale in moto stazionario; \mathbf{v} , p e ρ variano, in generale, col punto, ma nello stesso posto non variano col tempo; sarà dunque:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Supponendo che la forza di volume sia conservativa, $\mathbf{F} = -\nabla U$, dalla (14) si ottiene:

$$\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + U + \frac{p}{\rho} \right) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = 0.$$

Consideriamo una linea di flusso; se $d\mathbf{l}$ è un elemento di tale linea, moltiplicando la precedente scalarmente per $d\mathbf{l}$, si ha

$$\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + U + \frac{p}{\rho} \right) \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

poiché $(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Ma il primo membro non è altro che la proiezione del gradiente del trinomio in parentesi, lungo la linea di corrente considerata. Essendo nulla tale proiezione, il trinomio è costante lungo detta linea:

$$\frac{1}{2}v^2 + U + \frac{p}{\rho} = \text{cost.} \quad (15)$$

La relazione precedente esprime il *teorema di Bernoulli*:

Nel moto stazionario di un fluido ideale è costante, lungo una linea di corrente, la somma dell'energia cinetica per unità di massa, dell'energia potenziale per unità di massa e del contenuto energetico per unità di massa è costante.

In particolare, per un liquido soggetto alla gravità, essendo l'energia potenziale per unità di massa $U = gz$ e $\rho = \text{cost}$, la (15) diventa:

$$\frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \text{cost}, \quad (16)$$

oppure, dividendo per g ,

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{cost.} \quad (17)$$

Ogni termine di questa equazione, dimensionalmente è una lunghezza: il primo si chiama altezza di arresto, o di velocità o cinetica; essa è infatti l'altezza alla quale il liquido salirebbe se lanciato verso l'alto con velocità v ; il secondo altezza geometrica; il terzo altezza piezometrica.

La (16) può essere espressa in termini di pressioni; infatti

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p = \text{cost.} \quad (18)$$

Queste pressioni sono dette pressioni piezometriche dinamiche o semplicemente pressioni dinamiche.

4.1. Moti irrotazionali

Una soluzione molto importante della equazione fondamentale della dinamica dei fluidi ideali è relativa ai moti irrotazionali, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. Esiste, come si è detto, uno scalare φ , potenziale della velocità tale che, a meno di una costante, risulta

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi.$$

Allora la (14) diventa

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (v^2),$$

ossia:

$$\mathbf{F} = \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \right).$$

Dunque \mathbf{F} è conservativa e pertanto $\mathbf{F} = -\nabla U$. L'equazione precedente diventa

$$\nabla \left(U + \frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 \right) = 0.$$

Ciò significa:

$$\left(U + \frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 \right) = \text{cost},$$

indipendente dal punto del campo del moto. Se inoltre il moto è stazionario, $\partial \varphi / \partial t = 0$, il trinomio

$$U + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2,$$

non varia col punto né col tempo. Si noti che mentre per un generico moto stazionario di un fluido ideale, il trinomio precedente non varia lungo una linea di corrente, per i moti stazionari irrotazionali non varia in tutto il campo del moto.

5. Deduzione elementare del teorema di Bernoulli

Si tratta di una diretta applicazione del principio di conservazione dell'energia, già espressa dal teorema di Bernoulli stabilito nel paragrafo precedente. Si consideri un tubo di flusso in un fluido in moto stazionario e irrotazionale; per questo motivo si può ritenere che il tubo di flusso costituisca effettivamente una conduttura ideale. La sezione di tale tubo sia ovunque sufficientemente piccola in modo che velocità e pressione si possano ritenere uniformi su di essa, figura 7. Indichiamo con l'indice 1 velocità, pressione, densità e sezione del tubo di flusso alla quota z_1 e con l'indice 2 le stesse grandezze alla quota z_2 . Il lavoro della forza di pressione, in corrispondenza alla sezione S_1 è dato da

$$d\mathcal{L}_1 = p_1 S_1 dl_1;$$

analogamente, in corrispondenza alla sezione S_2 , si ha

$$d\mathcal{L}_2 = -p_2 S_2 dl_2.$$

Complessivamente:

$$d\mathcal{L} = d\mathcal{L}_1 + d\mathcal{L}_2 = p_1 S_1 dl_1 - p_2 S_2 dl_2 :$$

La variazione di energia cinetica e potenziale del fluido è dovuta alla massa dm di fluido che transita agli estremi del tubo di flusso, compreso tra le sezioni S_1 e S_2 ; in tutti gli altri punti, lo spostamento di fluido sostituisce altro fluido avente esattamente la stessa energia cinetica e potenziale. La variazione agli estremi implica che la massa dm passa dalla quota z_1 , dove ha velocità v_1 , alla quota z_2 , dove ha velocità v_2 . Pertanto la variazione di energia

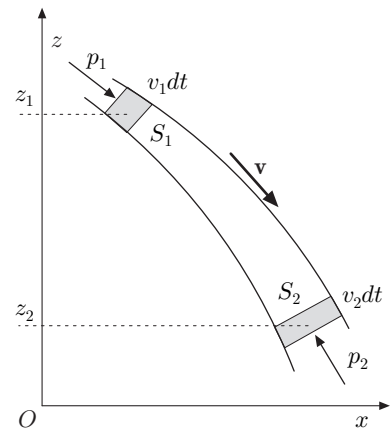


Fig. 17.7

cinetica è

$$dT = \frac{1}{2} dm (v_2^2 - v_1^2);$$

e la variazione di energia potenziale:

$$dU = dm g(z_1 - z_2).$$

Per il teorema dell'energia cinetica

$$p_1 S_1 dl_1 - p_2 S_2 dl_2 + dm g(z_1 - z_2) = \frac{1}{2} dm (v_2^2 - v_1^2).$$

Ma l'equazione di continuità, applicata al tubo di flusso considerato, impone che

$$dm = \rho_1 S_1 dl_1 = \rho_2 S_2 dl_2;$$

quindi l'equazione precedente si scrive

$$dm \frac{p_1}{\rho_1} - dm \frac{p_2}{\rho_2} + dm g(z_1 - z_2) = \frac{1}{2} dm (v_2^2 - v_1^2),$$

ossia

$$\frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + \frac{1}{2} v_2^2. \tag{19}$$

Lungo un tubo di flusso di un fluido ideale in moto stazionario non vorticoso, è costante il trinomio di Bernoulli. Per un fluido incompressibile $\rho_1 = \rho_2$. La (19), in conformità con le (17) e (18), può essere espressa in termini di altezze o di pressioni.

È notevole osservare che per un fluido in quiete, $v = 0$, la pressione è quella statica $\Delta p = \rho g \Delta z$; inoltre, a parità di quota, la velocità diminuisce all'aumentare della pressione e viceversa. Se il tubo di flusso è orizzontale ed ha sezione costante, la pressione è la stessa in qualunque sua sezione. La pressione, uniforme, è quella statica.

Esempi ed applicazioni

- ||| 4. Un recipiente contenente acqua ha un piccolo foro praticato vicino al fondo, alla profondità h rispetto alla superficie libera, attraverso il quale defluisce l'acqua, figura 8. Supponendo che il livello della superficie libera venga mantenuto costante, determinare la velocità di efflusso.

Dette z_1 e z_2 le quote della superficie libera e del foro, rispetto ad un asse di riferimento, positivo ascendente, ed essendo $v_1 = 0$, per il teorema di Bernoulli, si ha

$$z_1 + \frac{p_0}{\rho g} = z_2 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v^2}{2g},$$

essendo p_0 la pressione atmosferica. Si trae:

$$z_1 - z_2 = h = \frac{v^2}{2g}, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}. \tag{20}$$

La velocità dell'acqua che defluisce è uguale a quella che avrebbe se cadesse liberamente da un'altezza h (teorema di Torricelli). La verifica della (20) si

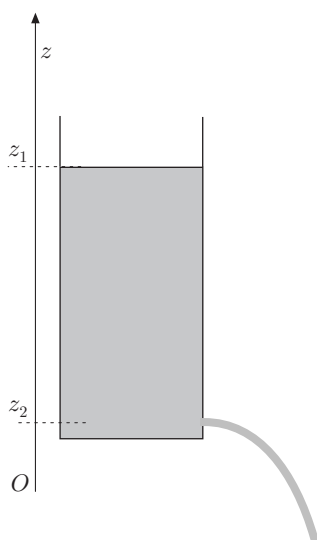


Fig. 17.8

effettua facilmente, osservando la forma parabolica del getto di liquido; infatti, se il foro è sulla parete, le equazioni del moto sono:

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_1, \quad x = vt, \quad z = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v^2} + z_1.$$

Dalla misura di una coppia di valori di x e z , si può dedurre v . D'accordo con la (20), due recipienti uguali, pieni l'uno di mercurio, l'altro d'acqua, con fori uguali, si vuotano con la stessa legge, figura 9.

Si supponga ora che sulla parete del recipiente considerato siano praticati due fori, dai quali l'acqua fuoriesca con velocità iniziale orizzontale. Sapendo che i due getti incidono nello stesso punto della superficie orizzontale dove è poggiato il recipiente, determinare l'altezza in cui sono praticati i fori.

Dette z_1, z_2 le quote dei fori ed h l'altezza dell'acqua, le equazioni del moto del primo getto sono

$$x = \sqrt{2g(h - z_1)}t, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_1,$$

che, come detto, danno luogo ad una traiettoria parabolica. Per ottenere il punto di incidenza col piano orizzontale fissato, posto $z = 0$, si ottiene il tempo di caduta:

$$t = \sqrt{\frac{2z_1}{g}},$$

che sostituito nell'espressione di x , come per il moto di un proiettile, dà la gittata:

$$x_1 = 2\sqrt{z_1(h - z_1)},$$

Analoga espressione si ottiene per l'acqua che fuoriesce dal secondo foro:

$$x_2 = 2\sqrt{z_2(h - z_2)}.$$

Uguagliando le due espressioni, si ottiene:

$$z_1(h - z_1) = z_2(h - z_2)$$

da cui

$$z_1 = \frac{h}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(h - 2z_2)^2}, \quad \Rightarrow \quad z_1 = h - z_2, \quad z_1 = z_2.$$

La soluzione $z_1 = z_2$ è ovvia; l'altra dà $z_1 + z_2 = h$. Affinché i due getti incidano nello stesso punto, la somma delle quote dei fori deve essere uguale all'altezza del liquido.

Supponiamo ora che il livello diminuisca al defluire del liquido. Indicando con $z(t)$ il livello del liquido all'istante t , per il teorema di Torricelli:

$$v(t) = \sqrt{2gz(t)}, \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gz.$$

Derivando rispetto al tempo si ha:

$$2v\frac{dv}{dt} = 2g\frac{dz}{dt}. \quad (21)$$

La quantità dz/dt rappresenta la velocità con cui diminuisce il livello del liquido. Poiché si deve presupporre che la portata, all'istante t , sia la stessa, detta S_1 la sezione del recipiente e S_2 la sezione del foro, si ha

$$-S_1\frac{dz}{dt} = S_2v, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{S_2}{S_1}v,$$

dove il segno negativo indica la diminuzione di livello. Sostituendo nella (21), si ha

$$2v\frac{dv}{dt} = -2g\frac{S_2}{S_1}v, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -g\frac{S_2}{S_1}.$$

Integrando si ottiene

$$v = v_0 - g\frac{S_2}{S_1}t = \sqrt{2gz_0} - g\frac{S_2}{S_1}t,$$

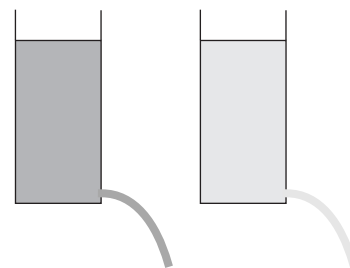


Fig. 17.9

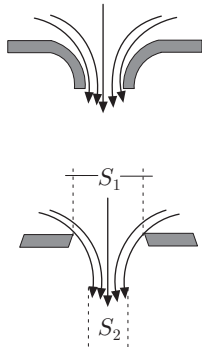


Fig. 17.10

dove v_0 è la velocità del liquido alla quota iniziale z_0 . Poiché in qualunque istante la velocità è proporzionale a \sqrt{z} , il recipiente si vuoterà quando $z = 0$, dove $v = 0$.

Dalla precedente si ottiene il tempo necessario perché il recipiente si vuoti.

$$t = \frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{2z_0}{g}}$$

L'efflusso da un recipiente è influenzato da un ulteriore fattore. Se il foro di uscita, supposto sul fondo del recipiente, non è accompagnato da una conveniente imboccatura, ma è tagliato a bordi vivi, la vena liquida subisce una contrazione, figura 10. Il rapporto S_2/S_1 tra la sezione contratta e quella effettiva può giungere fino a 0,6. La velocità di efflusso, data dalla (20), si riferisce alla sezione contratta. Questo fenomeno si osserva comunemente nell'efflusso dell'acqua da un rubinetto.

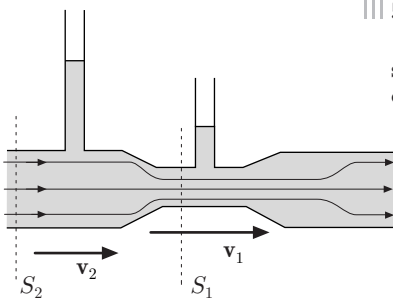


Fig. 17.11

III 5. *Tubo di Venturi*

È costituito da un condotto orizzontale con due sezioni S_1 e S_2 , in cui scorre un fluido ideale in regime stazionario, figura 11. In corrispondenza alle due sezioni, dalla (19) si ha

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2),$$

e tenendo presente l'equazione di continuità $S_1 v_1 = S_2 v_2$:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2} \right).$$

Se viene misurata la differenza di pressione in corrispondenza alle due sezioni, si può dedurre v_1 e quindi la portata P espressa in m^3/s :

$$P = \frac{dV}{dt} = S_1 v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho(1 - S_1^2/S_2^2)}}.$$

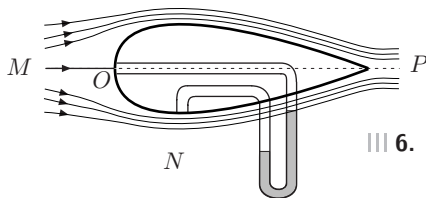


Fig. 17.12

III 6. *Tubo di Pitot*

Un corpo la cui forma è la più adatta per farsi lambire dalle linee di corrente, senza dar luogo a moti vorticosi, è in moto relativo in un fluido, figura 12.

Il tubo di flusso $MONP$ infinitesimo, in O ha una sezione molto più grande che in N ; il fluido in O ha un punto di arresto, dove la velocità è praticamente nulla; in N la velocità ha ripreso il valore che assumeva prima dell'introduzione del corpo. Per la (19), si ha

$$p_O = p_N + \frac{1}{2} \rho v_N^2, \quad v = v_N = \sqrt{\frac{2(p_O - p_N)}{\rho}}$$

Il tubo di Pitot permette, mediante la misura della differenza di pressione nei punti indicati, di ricavare la velocità relativa del fluido. Per esempio, in questo modo, è possibile misurare la velocità di un aereo relativa all'aria.

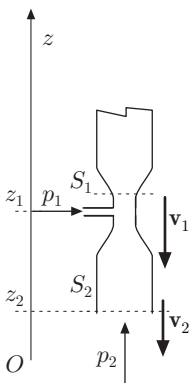


Fig. 17.13

III 7. *Aspiratori*

Consideriamo un tubo verticale, in cui scorre un liquido, che ad un estremo comunica con l'atmosfera e presenta una strozzatura di sezione S_1 , figura 13. Detta S_2 la sezione del tubo, e supponendo con buona approssimazione, che la pressione all'estremo sia quella atmosferica, dalla (19) si ha

$$p_1 = p_2 - \rho g(z_1 - z_2) - \rho \frac{v_2^2}{2} \left(\frac{S_2^2}{S_1^2} - 1 \right).$$

Se $S_1 < S_2$, è ovviamente $p_1 < p_2$; praticando un foro in corrispondenza a S_1 , l'aria viene aspirata; il sistema funziona da pompa aspirante, non molto efficace ma semplice e utile in molti casi. In questo modo funzionano i bruciatori, gli spruzzatori, gli inalatori ecc.

6. Teorema della quantità di moto

Si supponga che, nelle condizioni stazionarie di un fluido ideale, il tubo di flusso sia costituito effettivamente da un condotto e si consideri il fluido compreso tra le sezioni S_1 e S_2 . Le forze applicate, forze di pressione e di volume, ammettono una risultante \mathbf{F} . Le variazioni di quantità di moto del liquido entrante e di quello uscente attraverso le sezioni del tratto di condotto considerato, sono

$$d\mathbf{p}_1 = dm_1 \mathbf{v}_1, \quad d\mathbf{p}_2 = dm_2 \mathbf{v}_2,$$

ed essendo

$$dm_1 = dm_2 = \rho S_1 v_1 dt = \rho S_2 v_2 dt,$$

le corrispondenti variazioni di quantità di moto, nell'unità di tempo, risultano

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \rho S_1 v_1 \mathbf{v}_1, \quad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \rho S_2 v_2 \mathbf{v}_2.$$

La risultante delle forze è dunque

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \rho(S_2 v_2 \mathbf{v}_2 - S_1 v_1 \mathbf{v}_1). \quad (22)$$

Se nel tratto di condotto considerato il liquido è fermo, questa risultante è nulla; ossia è la somma del peso del liquido compreso tra sezioni considerate, delle forze di reazione esercitate dalle pareti del condotto e delle forze di pressione dovute al liquido esterno a dette sezioni.

Esempi

8. Condotto orizzontale curvo di sezione costante.

Dalla (22) i vettori di modulo

$$\frac{dp_1}{dt} = \rho S_1 v_1^2, \quad \frac{dp_2}{dt} = \rho S_2 v_2^2 = \frac{dp_1}{dt},$$

sono orientati come in figura 14 e giacciono nel piano orizzontale del condotto. La loro risultante è indicata in figura. Non si confonda la quantità di moto con la pressione, indicate con lo stesso simbolo.

Affinché il gomito del condotto imponga al liquido la variazione di quantità di moto nell'unità di tempo data dalla (22), oltre che reagire, insieme col liquido in arrivo e in partenza, alla risultante delle pressioni statiche, deve reagire con la forza \mathbf{F} contro l'azione dinamica del liquido che cambia direzione. Essendo la sezione costante e dunque $v_1 = v_2$, si ha immediatamente

$$F = 2\rho S v^2 \cos \theta.$$

Il gomito non fissato saldamente, sfuggirebbe nella direzione della forza risultante.

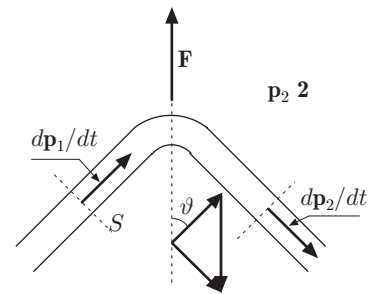


Fig. 17.14

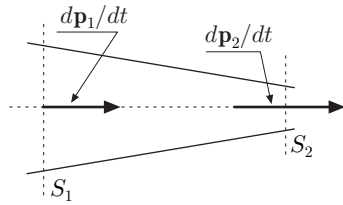


Fig. 17.15

||| 9. *Condotto orizzontale rettilineo di sezione variabile.*
I vettori di modulo

$$\frac{dp_1}{dt} = \rho S_1 v_1^2, \quad \frac{dp_2}{dt} = \rho S_2 v_2^2,$$

sono ora paralleli, figura 15. Poiché la portata è costante:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

dalla precedente si ha

$$\frac{dp_1/dt}{dp_2/dt} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}.$$

La risultante \mathbf{F} delle forze che la parete laterale del condotto, il liquido in arrivo in S_1 e quello in uscita in S_2 , devono esercitare sul liquido è diretta in avanti. Il sistema formato dal liquido in arrivo e dal condotto che si restringe, come in figura, subisce da parte del liquido uscente, che accelera il suo moto, una spinta $-\mathbf{F}$. Questa spinta, reazione, nelle lance antincendio, è così violenta da richiedere lo sforzo di parecchi uomini, perché la lancia venga tenuta ferma.

||| 7. Viscosità

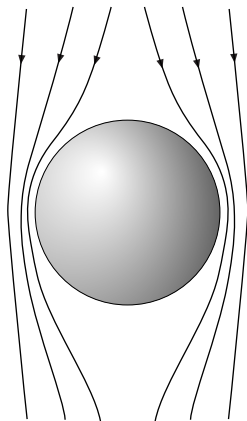


Fig. 17.16

In Dinamica sono state definite le forze viscosive; esse si manifestano ogni volta che un corpo è in moto relativo in un fluido reale o quando le parti del fluido scorrono le une rispetto alle altre. Tali forze dipendono dalla velocità e si annullano con essa; dunque nel fluido si destano sforzi di taglio, dipendenti dal coefficiente di viscosità caratteristico del fluido. Un corpo fermo, investito dalla corrente di un fluido ideale in moto non vorticoso, rimane in quiete e alle linee di flusso che lambiscono il corpo è applicabile il teorema di Bernoulli. Per un corpo sferico, figura 16, è facile dedurre che le pressioni agenti si distribuiscono simmetricamente a monte e a valle del corpo. La risultante delle forze di pressione è nulla o, più precisamente, nei fluidi pesanti, si riduce alla spinta di Archimede. Il corpo inizialmente in quiete, continua a restare in quiete e non è trascinato dal fluido che lo investe (*paradosso di D'Alembert*). Ma la conclusione è tanto "paradossale" quanto la legge di inerzia; essa sarebbe valida se si realizzassero corpi che si muovono senza attrito e svincolati dall'azione di altri corpi.

Un liquido contenuto in vaso cilindrico, ruotante attorno al proprio asse, si dispone secondo un paraboloide di rotazione grazie all'attrito interno, ruotando insieme al vaso come un sistema rigido. Il campo delle velocità è rotazionale e in ogni punto del liquido è $\nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$. Se il liquido fosse ideale la rotazione del vaso non sarebbe in grado di trascinare in rotazione il liquido il quale, se soggetto alla sola forza di gravità, si disporrebbe secondo superfici isobariche orizzontali. Ancora, si consideri il sistema mostrato in figura 17; il teorema di Bernoulli, per qualunque sezione del tubo orizzontale AB darebbe $p = p_0 = \text{cost}$. Supposto che il livello nel recipiente V rimanga costante e che il tubo sbocchi nell'atmosfera, in tutte le sezioni di A, B si dovrebbe avere la stessa

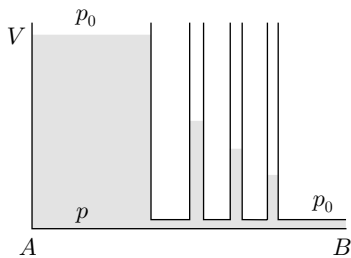


Fig. 17.17

pressione, atmosferica, ed i manometri dovrebbero dare la stessa indicazione. In altri termini il liquido si muoverebbe per inerzia perché la pressione passa bruscamente dal valore p , richiesto dalla legge di Stevino, sul fondo del recipiente in A , laddove il liquido all'inizio del condotto acquista la sua velocità, al valore della pressione atmosferica. In realtà, raggiunto il regime stazionario, la pressione cresce spostandosi da B verso A . Poiché la velocità è costante in tutto il condotto, si deduce che si è verificata una *perdita di carico*, definita dalla differenza di pressione $p - p_0$, denunciata dai manometri agli estremi A, B . Questa differenza di pressione è necessaria per vincere la resistenza viscosa e mantenere costante il flusso. Prendiamo ora in considerazione il moto di un fluido viscoso in particolari condizioni.

|| 7.1. Moto laminare

L'esperienza mostra che un fluido reale in qualche modo aderisce alle pareti con le quali è a contatto, dove si stabilisce uno strato di fluido in quiete di alcuni spessori molecolari, detto strato limite; quindi il fluido in effetti si muove rispetto a tale strato. Se la velocità del fluido non raggiunge un certo valore critico, paragrafo 9, il moto o il flusso si dice laminare; esso è stazionario, ma $\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$. Il flusso laminare è detto anche *flusso o regime di Poiseuille* ed avviene in modo che gli strati di fluido si muovano mantenendo la loro individualità. Questo comportamento può essere evidenziato inserendo piccole quantità di colorante in alcuni punti di un liquido in moto laminare; si osserva che le linee di corrente colorate procedono per un tratto sufficientemente lungo senza mescolarsi col resto del liquido.

Consideriamo un liquido compreso tra due piani; uno fisso, di equazione $y = 0$, l'altro di equazione $y = h$, mobile con velocità v_0 costante, parallela all'asse x , figura 18. Il piano mobile può essere realizzato mediante una lamina convenientemente estesa, in modo che non introduca sensibili effetti di bordo, galleggiante sul liquido. Se il liquido fosse ideale, applicando alla lamina una forza costante, il moto sarebbe uniformemente accelerato; tuttavia si osserva che per mantenere il moto uniforme occorre applicare una certa forza, atta ad equilibrare dinamicamente la forza viscosa. In altri termini il fluido esercita una forza tangenziale tendente ad ostacolare il moto della lamina. Poiché si verifica adesione completa del liquido in $y = 0$ e in $y = h$, dove le velocità assumono rispettivamente i valori zero e v_0 , si deduce che gli strati intermedi hanno velocità comprese in questo intervallo. Esiste dunque un gradiente di velocità $\partial v / \partial y \neq 0$; ciò implica che un generico strato di fluido esercita uno sforzo tangenziale sullo strato di fluido immediatamente sovrastante tendente a rallentare il moto. Dunque lo sforzo deve essere funzione di tale gradiente, in modo che

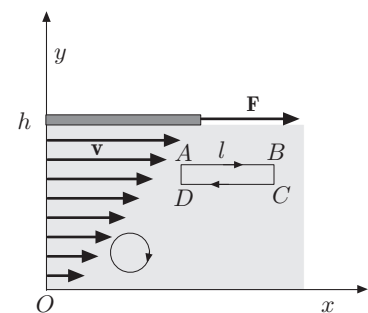


Fig. 17.18

si annulli con esso, cioè quando v è indipendente da y . Quindi si ha una relazione lineare del tipo

$$\sigma_t = -\eta \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (23)$$

dove η è il coefficiente di viscosità. Si osservi che $\partial v/\partial y$ non è altro che la derivata rispetto al tempo della deformazione di scorrimento. Lo sforzo di taglio ha verso opposto alla direzione del moto, essendo η e il gradiente della velocità quantità positive.

Poiché lo sforzo si misura in N/m^2 e il gradiente di velocità in s^{-1} , le unità del coefficiente di viscosità, nel SI , sono $N \cdot s/m^2$. Questa unità è il *decapoise*; in pratica viene usato il *poise* (P) dieci volte minore, il quale, come si può facilmente verificare, è l'unità di misura espressa nel sistema cgs . Il coefficiente di viscosità dipende dalla temperatura. Il campo delle velocità è rotazionale; non esistono vortici visibili, bensì microvortici che si compongono con un moto di insieme, irrotazionale, che determina il moto del liquido così come si è descritto. Infatti l'unico componente del vettore $\nabla \times \mathbf{v}$ è $-(\partial v/\partial y)\mathbf{k}$, diretto nel verso negativo dell'asse z ; le linee vorticosi sono cerchi ed hanno verso orario per chi guarda la figura 18. Naturalmente la circuitazione di \mathbf{v} è diversa da zero; infatti scelta la linea chiusa $ABCD$ di figura, $AB = CD = l$, si ha

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = l(v_1 - v_2).$$

Allo scopo di ottenere l'equazione della dinamica del moto laminare, possiamo introdurre le seguenti considerazioni semiquantitative. La teoria più completa verrà svolta più avanti.

Le particelle di fluido non possiedono velocità esclusivamente convettiva nella direzione x , ma anche velocità dovuta all'agitazione termica, molto maggiore di quella convettiva, e collidono tra loro scambiando quantità di moto. Un piano generico, $y = cost$, viene attraversato continuamente dalle particelle sovrastanti e da quelle sottostanti; le prime possiedono una componente della quantità di moto convettiva, nella direzione del movimento, maggiore delle altre. Pertanto, come risultato netto si ha un aumento della quantità di moto media delle molecole sottostanti al piano e una diminuzione di quantità di moto media di quelle sovrastanti. Lo sforzo di taglio al primo membro dell'equazione (23) può essere dunque interpretato come quantità di moto media convettiva, parallela all'asse x , trasferita nell'unità di tempo attraverso la superficie unitaria, che chiamiamo flusso della quantità di moto J_p ; ossia

$$\sigma_t = \frac{1}{\Delta S} \frac{\partial p}{\partial t} = J_p.$$

Consideriamo ora un elemento piano di fluido di spessore dy e superficie S . Le particelle incidenti sulla superficie superiore de-

terminano un aumento della quantità di moto media convettiva, nell'unità di tempo e per unità di superficie di tale elemento, flusso di quantità di moto incidente. D'altra parte, le particelle uscenti dalla superficie inferiore producono una perdita di tale quantità di moto, flusso di quantità di moto uscente. Pertanto, assumendo positiva la normale alla superficie volta verso l'esterno, il guadagno medio di quantità di moto nell'unità di tempo, nella direzione del moto convettivo, dell'elemento è dato da

$$\begin{aligned} [-J_p(y + dy) + J_p(y)]S &= - \left(J_p(y) + \frac{\partial J_p}{\partial y} dy \right) S + J_p(y)S \\ &= - \frac{\partial J_p}{\partial y} S dy. \end{aligned}$$

Ma, se si indica con p la quantità di moto convettiva per unità di volume del fluido, il guadagno di quantità di moto per unità di tempo dell'elemento considerato può essere scritto anche nella forma

$$\frac{\partial p}{\partial t} S dy.$$

Uguagliando le due espressioni precedenti, si ha

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial J_p}{\partial y}.$$

Il termine al primo membro è una forza per unità di volume, quindi il secondo membro può essere interpretato come forza viscosa per unità di volume. Tenuto conto che la quantità di moto per unità di volume è $p = \rho v$, dove ρ è la densità del fluido, la (23) si scrive:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (24)$$

Nelle equazioni precedenti non si è tenuto conto di altre forze di volume; per esempio, nel caso esaminato la gravità non influenza il moto orizzontale.

Le considerazioni precedenti possono essere chiarite meglio con la seguente analogia. Due treni viaggiano nella stessa direzione su binari paralleli, con velocità diverse. Da ciascun treno vengono lanciati sull'altro sacchetti di sabbia, a ritmo costante. Si verifica un trasferimento di quantità di moto tra i due treni, cosicché il treno più lento viene accelerato mentre il treno più veloce viene rallentato.

Tenendo conto delle condizioni al contorno: adesione completa del fluido con i piani $y = 0$ e $y = h$, dove le velocità sono rispettivamente 0 e v_0 , e che il moto è stazionario $\partial v / \partial t = 0$, dalla (24) si ha

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Integrando questa equazione si ottiene

$$v = C_1 y + C_2,$$

dove le costanti di integrazione vanno determinate in accordo con le condizioni al contorno fissate. Per $y = 0$, $v = 0$, dunque $C_2 = 0$; per $y = h$, $v = v_0$ e $C_1 = v_0/h$. Pertanto

$$v = \frac{v_0}{h} y.$$

Questo risultato indica che la velocità varia linearmente con l'altezza.

|| 7.2. Moto in regime di Poiseuille in un tubo di sezione circolare

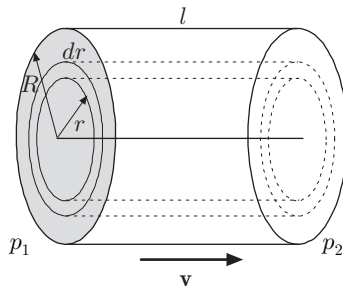


Fig. 17.19

Se si assumono condizioni al contorno di completa adesione del liquido alla parete del tubo e di moto stazionario, la distribuzione delle velocità è decrescente dall'asse del tubo verso la parete. Sia R il raggio del tubo, l la sua lunghezza e $\Delta p = p_1 - p_2$ la differenza di pressione agli estremi, che spinge il liquido a fluire, figura 19. Si divida il liquido in strati concentrici coassiali di raggio r e spessore dr ; ogni strato, in moto stazionario, è in equilibrio dinamico sotto l'azione delle forze di pressione e delle forze viscose; dunque la risultante di queste forze è nulla. Le forze di pressione agenti sulle facce estreme dello strato hanno risultante

$$(p_1 - p_2)2\pi r dr.$$

La forza viscosa agente sulla parete laterale interna, proporzionale al gradiente della velocità conformemente alla (23), in valore e segno rispetto alla direzione del moto, è data da

$$-\eta \left(2\pi l r \frac{\partial v}{\partial r} \right)_r,$$

positiva perché il gradiente della velocità è negativo; la velocità decresce verso la parete. Infatti tale forza è dovuta al liquido interno che è più veloce e tende a ritardare lo strato considerato. La forza viscosa agente sulla parete laterale esterna è ritardante ed è data da

$$\eta \left(2\pi l r \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r+dr}.$$

La forza viscosa risulta:

$$2\pi\eta l \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) dr.$$

Si ha dunque

$$2\pi r(p_1 - p_2) + 2\pi\eta l \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = 0.$$

Integrando:

$$r \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{p_1 - p_2}{\eta l} \frac{r^2}{2} + C_1, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r + \frac{C_1}{r}.$$

Integrando ancora:

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

Per $r = 0$ la precedente diverge, dunque è necessariamente $C_1 = 0$; per $r = R$ deve essere $v = 0$. Risulta pertanto

$$C_2 = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2.$$

Sostituendo si ottiene:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

La distribuzione delle velocità, per un tubo di raggio sufficientemente piccolo, capillare, ha un profilo parabolico, come mostrato in figura 20.

La portata del tubo è data da

$$P = \int_0^R 2\pi r v(r) dr;$$

sostituendo l'espressione della velocità e integrando, si ottiene:

$$P = \frac{p_1 - p_2}{8\eta l} \pi R^4.$$

Il volume di liquido che defluisce nel tempo t è dato da

$$V = Pt = \frac{p_1 - p_2}{8\eta l} \pi R^4 t, \quad (25)$$

che è la formula di Hagen-Poiseuille. Essa permette, nota la differenza di pressione, il raggio e la lunghezza del tubo, di misurare il coefficiente di viscosità. In pratica la misura di η , ad una certa temperatura, viene effettuata rispetto ad un liquido di cui è noto il coefficiente di viscosità. Sotto la stessa differenza di pressione, si misurano i tempi necessari perché dallo stesso tubo defluiscano uguali volumi dei liquidi; si ha

$$\eta_1 = \frac{\pi \Delta p R^4}{8Vl} t_1, \quad \eta_2 = \frac{\pi \Delta p R^4}{8Vl} t_2,$$

da cui:

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{t_2}{t_1}.$$

Un viscosimetro, Ostwald, usato per tale misura è mostrato in figura 21. Comprimeando in C si fa risalire il liquido di riferimento, in genere acqua, di cui è noto il coefficiente di viscosità, lungo il

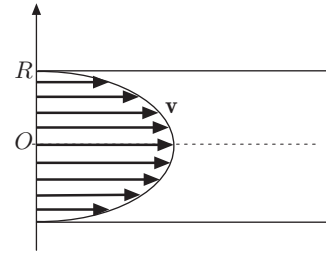


Fig. 17.20

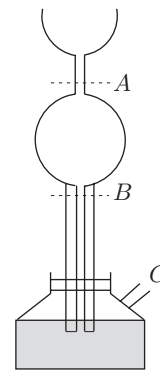


Fig. 17.21

tubo capillare fino alla sommità dell'apparecchio. Indi si misura il tempo impiegato dal liquido perché scenda dal livello A al livello B . Si ripete la misura con il liquido in esame.

8. Equazione della dinamica dei fluidi viscosi

L'equazione della dinamica dei fluidi viscosi può essere dedotta dalla teoria dell'elasticità, tenuto conto, come nell'equazione indefinita dell'equilibrio (10)-XV, dell'azione delle forze di superficie e delle forze di volume. Detta \mathbf{F} per unità di massa, l'accelerazione dell'elemento di fluido è data da:

$$\mathbf{a} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right), \quad (26)$$

la quale, in termini di componenti cartesiane, dà luogo ad equazioni:

$$a_x = X - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right), \quad (27)$$

e simili.

Nel paragrafo 5-XV si è riconosciuto che i tensori degli sforzi e delle deformazioni si possono rispettivamente scomporre in due tensori; uno costituito dai termini diagonali, sforzi e deformazioni normali, l'altro costituito dai termini non diagonali, sforzi e deformazioni di scorrimento. Dunque per il tensore degli sforzi si ha

$$\mathcal{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Il primo, a sua volta, può essere scomposto in un tensore isotropo, che in un fluido rappresenta la pressione, e in un tensore anisotropo; ossia

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} - p \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Poiché i tensori

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} - p \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & 0 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

si devono annullare se il fluido è in quiete, si deduce che devono essere proporzionali al tensore che rappresenta le velocità di deformazione del fluido, che scriviamo:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{pmatrix}.$$

Si tenga presente che nei fluidi non possono sussistere sforzi di taglio statici.

Osserviamo che, introducendo i coefficienti di Lamè, l'equazione (31)-XV, diventa:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = 2G \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} + \lambda\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In analogia, il secondo tensore della (29) può essere espresso:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} - p \end{pmatrix} = 2\eta \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_{zz} \end{pmatrix} + \beta\chi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

dove η è il coefficiente di viscosità, β un coefficiente che ha le stesse dimensioni di η e χ è dato dalla (7). Dalla (31) si deduce

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} - p &= 2\eta \dot{\epsilon}_{xx} + \beta \chi \\ \sigma_{yy} - p &= 2\eta \dot{\epsilon}_{yy} + \beta \chi \\ \sigma_{zz} - p &= 2\eta \dot{\epsilon}_{zz} + \beta \chi.\end{aligned}\quad (32)$$

Sommando e tenendo conto della (24)-XV, si ha

$$2\eta(\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz}) + 3\beta \chi = 0, \quad (2\eta + 3\beta)\chi = 0,$$

ed essendo $\chi = \nabla \cdot \mathbf{v} \neq 0$, risulta

$$\beta = -\frac{2}{3}\eta.$$

Pertanto le (32) si scrivono

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= p + 2\eta \dot{\epsilon}_{xx} - \frac{2}{3}\eta \chi \\ \sigma_{yy} &= p + 2\eta \dot{\epsilon}_{yy} - \frac{2}{3}\eta \chi \\ \sigma_{zz} &= p + 2\eta \dot{\epsilon}_{zz} - \frac{2}{3}\eta \chi.\end{aligned}\quad (33)$$

Inoltre si ha:

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & 0 \end{pmatrix} = 2\eta \begin{pmatrix} 0 & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & 0 & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & 0 \end{pmatrix},$$

da cui:

$$\sigma_{xy} = 2\eta \dot{\epsilon}_{xy}, \quad \sigma_{xz} = 2\eta \dot{\epsilon}_{xz}, \quad \sigma_{yz} = 2\eta \dot{\epsilon}_{yz}.\quad (34)$$

Tenendo conto delle (33) e (34), si ricava

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial x} + 2\eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

Sostituendo nella (27) e tenendo presente che l'ordine di derivazione può essere scambiato, si ottiene

$$a_x = X - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 v_x + \frac{1}{3}\eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right],$$

dove a_x è data dalla (12). Analoghe espressioni si ottengono per le altre componenti. In termini vettoriali:

$$\mathbf{a} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \left[\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3}\eta \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right],\quad (35)$$

dove $\nabla^2 \mathbf{v}$ è un vettore che ha per componenti $\nabla^2 v_x$, $\nabla^2 v_y$, $\nabla^2 v_z$. Si riconosce immediatamente che la (35) si riduce all'equazione della dinamica dei fluidi ideali se η è uguale a zero. È evidente che lo studio del moto di un fluido viscoso è molto complesso.

Ci limitiamo a riconsiderare i due casi di moto stazionario, rettilineo e laminare di un liquido, studiati al paragrafo 7. Poiché $\mathbf{F} = 0$ ed il moto è stazionario, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ e $\partial v / \partial t = 0$, fissato l'asse x nella direzione del moto, l'unica componente dell'equazione indefinita del moto (35) è

$$v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 v;\quad (36)$$

inoltre:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \rho = \text{cost.}$$

Si deduce che p dipende solo da x e la velocità v soltanto da y e da z . Dalla (36) si trae:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right),$$

ed essendo i due membri funzioni di variabili diverse, devono essere uguali ad una stessa costante C ; ossia

$$\frac{\partial p}{\partial x} = C, \quad \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = C.$$

Dalla prima si deduce che la pressione varia linearmente con l'ascissa x ; quindi detta p_0 la pressione in $x = 0$ e p_l la pressione in $x = l$, si ha

$$p = \frac{p_l - p_0}{l} x + p_0.$$

La seconda equazione diventa

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{p_l - p_0}{\eta l}. \quad (37)$$

Questa equazione permette il calcolo di v , una volta assegnate le condizioni al contorno. Nel caso di un liquido di superficie indefinita, compreso tra i piani $y = 0$, fisso, e $y = h$, mobile con velocità costante v_0 , la pressione in $x = 0$ e $x = l$ è la pressione atmosferica, costante. Pertanto, essendo v funzione della sola y , la (36) diventa

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

Imponendo la condizione di completa aderenza del fluido con i piani $y = 0$ e $y = h$, deve essere:

$$v(0) = 0, \quad v(h) = v_0.$$

Ne segue che in ogni punto del campo del movimento risulta:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = C_1, \quad \Rightarrow \quad v = C_1 y + C_2,$$

in cui, per le condizioni di aderenza, $C_1 = v_0/h$, $C_2 = 0$. Pertanto:

$$v(y) = \frac{v_0}{h} y.$$

La velocità aumenta linearmente con y . Inoltre, essendo

$$|\sigma_t| = \eta \dot{\epsilon}_t = \eta \frac{\partial v}{\partial y} = \eta \frac{v_0}{h},$$

segue che il coefficiente di viscosità, definito come rapporto tra lo sforzo di taglio e la velocità di deformazione di scorrimento, in conformità all'equazione (34), risulta

$$\eta = \frac{\sigma_t}{v_0/h}.$$

Consideriamo ora il deflusso di un liquido viscoso lungo un tubo rettilineo, di sezione circolare e lunghezza l , ai cui estremi agisce la differenza di pressione $p_l - p_0$. L'asse del tubo costituisce l'asse x . Detta $v(r)$ la velocità, funzione della distanza r dall'asse, si ha

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right). \quad (38)$$

Infatti essendo $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, risulta

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dv}{dr} \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{d^2 v}{dr^2} \frac{y^2}{r^2} + \frac{dv}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right).$$

Analogamente:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{d^2 v}{dr^2} \frac{z^2}{r^2} + \frac{dv}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^2} \right).$$

Sommando le precedenti, segue la (38). Pertanto la (37) diventa:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{p_1 - p_0}{\eta l} r.$$

Integrando questa equazione si ottiene il risultato trovato al paragrafo 7.

9. Moto vorticoso, numero di Reynolds

Lo studio generale del moto di un fluido reale è estremamente complicato, a parte il caso del moto laminare descritto. Questo argomento esula dai nostri limiti e va affrontato in discipline specializzate; pertanto daremo una descrizione qualitativa di alcuni suoi interessanti aspetti. Limitandoci a considerare il moto di un fluido reale in un tubo di raggio sufficientemente piccolo, in modo che il moto sia laminare, si osserva che per un certo tubo e un dato liquido, al crescere della differenza di pressione agli estremi del tubo, cresce la portata e quindi la velocità del liquido. Definendo velocità media il rapporto tra la portata e la sezione del tubo,

$$v_m = \frac{P}{\pi R^2},$$

dove R è il raggio, si osserva che se v_m raggiunge un valore critico v_c , in corrispondenza al quale il regime del moto cambia bruscamente e diventa turbolento, con vortici ben visibili. Se in queste condizioni venisse applicata la (25) il valore di η sarebbe maggiore di quello reale ed errato. La velocità critica v_c dipende dal raggio del tubo, dalla natura del liquido, cioè dalla sua densità e dal suo coefficiente di viscosità. Per tutti i tubi a sezione circolare, il rapporto:

$$N = \frac{v_c R \rho}{\eta},$$

si dice *numero di Reynolds* ed ha un valore costante di circa 1200. Questo valore dipende sensibilmente dallo stato della parete interna del tubo; con pareti ben levigate si possono raggiungere valori notevolmente maggiori di 1200. Il numero di Reynolds ha un notevole significato energetico se si considera una porzione di fluido lunga quanto il raggio R ; la sua energia cinetica è proporzionale a

$$\rho R^3 v_m^2.$$

D'altra parte, per la (23), la quantità

$$\eta v_m R^2$$

è proporzionale al lavoro delle forze di attrito. Il rapporto tra le

due precedenti espressioni

$$\frac{\rho R^3 v_m^2}{\eta v_m R^2} = \frac{\rho R v_m}{\eta},$$

è proprio uguale al numero di Reynolds. Più in generale nel moto relativo di un corpo e di un fluido viscoso, il numero di Reynolds ha l'espressione

$$N = \frac{v_m l \rho}{\eta}, \quad (39)$$

dove l è una lunghezza caratteristica del corpo; nel caso della sfera, tale lunghezza coincide col raggio.

III 10. Cenni sull'attrito nel mezzo

È indifferente supporre che il fluido in moto investa il corpo o che il corpo sia in moto nel fluido in quiete, purché si assuma che il fluido sia indefinito in modo da poter trascurare le condizioni al contorno. In realtà le esperienze volte a determinare il comportamento dinamico dei corpi, investiti da una corrente, vengono effettuate nei tunnel aerodinamici, dove si ha particolare cura che la corrente di fluido sia regolare. Nell'acqua le esperienze vengono effettuate su modelli in scala ridotta, trascinati in vasche molto grandi, in modo che il moto non perturbi la quiete esistente al contorno.

Le esperienze hanno lo scopo di determinare la resistenza del mezzo, in funzione della velocità del fluido, ossia la forza risultante e la coppia risultante equivalenti alle infinite forze elementari di superficie applicate al corpo da parte del fluido in moto. Solo in casi particolari la coppia risultante è nulla ed agisce la sola risultante delle forze d'attrito. È il caso, per esempio, di un corpo che presenta simmetria di rotazione attorno ad un asse quando la direzione della velocità del fluido coincide con esso. Allora il problema è piano, ossia può essere studiato in qualsiasi sezione del corpo in cui l'asse è contenuto. Si tenga presente, capitolo XIII, che in un problema piano l'insieme delle forze può essere rappresentato dalla sola risultante, applicata nel punto rispetto al quale il momento risultante del sistema di forze è nullo. A parte il paradosso di D'Alembert, relativo ai fluidi ideali, al quale abbiamo già accennato, prenderemo in considerazione i seguenti casi.

II 10.1. Regime a resistenza di attrito

Consideriamo un corpo che possiede un asse di simmetria di rotazione, orientato secondo la corrente; in particolare per la sfera, ogni asse è di simmetria. Lo strato di fluido aderente al corpo è

trascinato da quest'ultimo e si ha scorrimento degli strati adiacenti come in figura 15; la risultante delle forze di pressione è nulla. Come si è visto in Dinamica, si può presumere che la forza di resistenza del mezzo sia proporzionale al coefficiente di viscosità e alla velocità v . L'esperienza conferma questa ipotesi per valori piuttosto piccoli della velocità; inoltre stabilisce che per corpi simili ed ugualmente orientati rispetto alla velocità, la forza d'attrito è proporzionale ad una dimensione lineare del corpo. Nel caso particolare della sfera è possibile, con calcoli piuttosto laboriosi che omettiamo, ricavare la forza di attrito per mezzo dell'equazione generale della dinamica dei fluidi viscosi; si ottiene la *formula di Stokes*:

$$F_A = 6\pi\eta v r.$$

La forza d'attrito, per un dato fluido, è proporzionale alla velocità e al raggio della sfera. Una sferetta che cade in un fluido viscoso, come una goccia d'acqua molto piccola che cade nell'atmosfera, dopo un transitorio più o meno rapido, come s'è visto in Dinamica, raggiunge una velocità limite v_L costante. Nella situazione di equilibrio dinamico, tenendo conto della spinta di Archimede, detta ρ la densità della sfera e ρ_l la densità del fluido, si ha

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_l g - 6\pi r v_L \eta = 0,$$

Da questa espressione, formula di Stokes, è possibile ricavare il coefficiente di viscosità del fluido, osservando il moto di una sferetta nota e avendo cura che la velocità limite sia inferiore alla velocità critica.

10.2. Regime a resistenza di pressione

Consideriamo corpi che godono della simmetria di cui al punto precedente, per i quali cioè la forza di attrito è parallela ed opposta alla velocità, che in questo caso è maggiore di un certo valore critico. Il corpo in moto in un fluido, trascina dietro di sé un certo volume di fluido che si può ritenere fermo rispetto al corpo, costituendone una coda. In realtà questo volume è sorgente di vortici che, appena si formano, accompagnano il corpo o se ne distaccano, se la velocità è molto maggiore di quella critica. Questi vortici costituiscono la scia vorticoso, figura 22.

La resistenza di pressione è molto maggiore della resistenza di attrito, ed è essenzialmente dovuta alla risultante delle forze di pressione, diverse a monte e a valle del corpo, dove la pressione è minore perché, come s'è detto, il fluido adiacente è fermo rispetto al corpo. Infatti, tenendo presente il teorema di Bernoulli, con buona approssimazione, possiamo ritenere che la pressione a

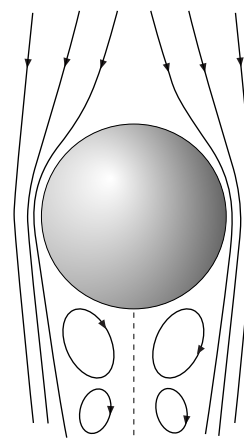


Fig. 17.22

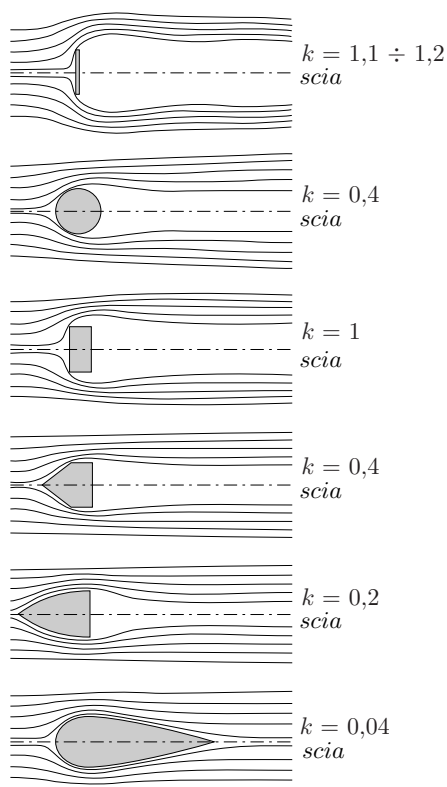


Fig. 17.23

monte del corpo sia

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2,$$

mentre quella a valle, nel fluido in quiete rispetto al corpo, è semplicemente la pressione statica p . La differenza tra queste pressioni è proprio $\rho v^2/2$. L'esperienza di fatto indica che la forza di resistenza di pressione è proporzionale al quadrato della velocità, secondo una formula del tipo:

$$F_A = \frac{1}{2}k\rho v^2 S, \quad (40)$$

dove k è una quantità adimensionata che rappresenta il coefficiente di forma ed S la sezione trasversale massima del corpo.

Ancora una giustificazione approssimata della (40), dovuta a Newton, consiste nell'osservare che la forza che il corpo deve vincere nello spostarsi, imprime al mezzo una quantità di moto nell'unità di tempo, che si può ritenere uguale al prodotto della massa di fluido spostato nell'unità di tempo, $Sv\rho$, e della velocità che assume tale massa. Se si ammette che questa velocità sia proporzionale alla velocità v del corpo, si ottiene la (40). In questa relazione si ritiene opportuno far comparire il fattore $1/2$ per metter in evidenza l'energia cinetica dell'unità di volume del fluido. La forza d'attrito dipende dal coefficiente di forma; in figura 23 è mostrato l'andamento della scia vorticoso, rilevata sperimentalmente mediante spettri aerodinamici. A parità di velocità e di sezione massima trasversale del corpo, la resistenza nel mezzo risulta proporzionale al coefficiente di forma. Da qui la necessità di studiare per i mezzi veloci, opportuni profili aerodinamici.

10.3. Resistenza del mezzo non parallela alla velocità

Nell'ipotesi che il problema sia piano, ossia che l'insieme delle forze d'attrito si riduca alla sola risultante \mathbf{R} , tale risultante può essere scomposta in una componente parallela alla velocità R_t e in una componente ortogonale R_n . La prima, comprendente la resistenza di pressione e la resistenza di attrito, quest'ultima di solito trascurabile, rappresenta propriamente l'attrito del mezzo, la seconda la portanza. Consideriamo due casi molto interessanti.

PIANO INCLINATO RISPETTO ALLA VELOCITÀ

Consideriamo un piano in moto in un fluido, inclinato di un angolo θ rispetto alla velocità \mathbf{v} . Nell'ipotesi che la velocità sia maggiore della velocità critica, si ha scia vorticoso, asimmetrica rispetto alla direzione della velocità, figura 24. Il problema può

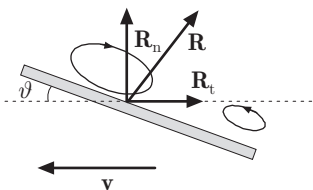


Fig. 17.24

considerarsi “piano” se il piano considerato è indefinito nella direzione normale alla figura, dunque la resistenza del mezzo è rappresentata dalla risultante. Tale risultante, comprendendo la resistenza d'attrito, è leggermente inclinata rispetto alla normale al piano ed il suo punto di applicazione è più vicino al bordo colpito per prima dal fluido. Il problema potrebbe avere scarsa rilevanza se non fosse legato allo studio del profilo delle ali di aerei, figura 25. L'angolo θ formato dalla retta r con la direzione della velocità, si chiama angolo di incidenza; per valori piccoli di θ la scia vorticososa è quasi inesistente e si ottiene la minima resistenza del mezzo. Viceversa se l'incidenza è eccessiva la scia vorticososa che si forma sulla parte superiore dell'ala, è molto ampia. Una errata manovra in volo può portare alla rottura dell'ala.

Le componenti di \mathbf{R} possono essere espresse nella forma

$$R_n = \frac{1}{2}k_n\rho v^2 S, \quad R_t = \frac{1}{2}k_t\rho v^2 S.$$

I coefficienti k_n e k_t , per un profilo assegnato, dipendono essenzialmente dall'angolo di incidenza; S è la sezione dell'ala perpendicolare al profilo e passante per la retta r . Il rapporto R_n/R_t si chiama *finezza*; in pratica si tende a rendere massimo questo rapporto. Con buoni profili di ali di aereo, si raggiunge il valore di circa 27, mentre per il piano inclinato di figura 23, la finezza non è mai superiore a 7.

EFFETTO MAGNUS

Un cilindro C è posto in rapida rotazione attorno al suo asse in presenza di una corrente di fluido, figura 26. Il teorema di Bernoulli giustifica l'esistenza di una risultante \mathbf{R}_n delle forze di pressione, trasversale alla direzione del moto del fluido. Infatti il cilindro trascina nella sua rotazione gli strati di fluido immediatamente contigui; in P la velocità del fluido e quella di trascinamento, di rotazione, si sottraggono, mentre in Q si sommano. In effetti esiste anche la risultante dell'attrito del mezzo \mathbf{R}_t , parallela alla velocità del fluido; pertanto sul cilindro agisce la somma di queste due forze.

L'effetto Magnus è responsabile delle traiettorie anomale delle palle da tennis, “tagliate” dalla racchetta o, in genere, di corpi in rapida rotazione. Dell'effetto Magnus si è tentata l'applicazione per la propulsione delle navi, rotore di Flettner, ma i risultati non sono stati incoraggianti.

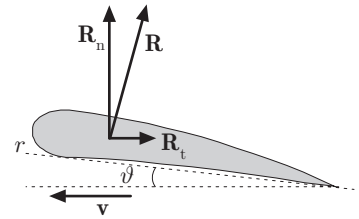


Fig. 17.25

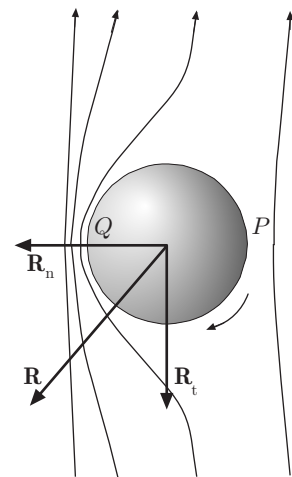


Fig. 17.26