

# 16. Statica dei fluidi

## 1. Sforzi nei fluidi in equilibrio

Col nome generico di fluidi si indicano le sostanze allo stato liquido e gassoso. Un fluido si dice *ideale* se non oppone resistenza agli sforzi di taglio; in tal caso parti di fluido possono scorrere senza attrito le une rispetto alle altre e si hanno deformazioni di scorrimento. Tali deformazioni ovviamente non richiedono lavoro. Un liquido è ideale se, oltre a godere della proprietà suddetta, non presenta variazione di volume,  $dV = 0$ , quando è soggetto a variazioni di temperatura e di pressione. Ciò implica che i coefficienti di espansione termica e di compressibilità isoterma sono nulli. In realtà nei liquidi reali, tali coefficienti sono così piccoli che in molti casi è possibile trascurarne l'effetto (liquidi incompressibili). Per quanto riguarda la definizione di gas ideale o perfetto, si rimanda alla Termodinamica. Per il momento basta osservare che il gas ideale, come il liquido ideale, non oppone resistenza agli sforzi di taglio, ma al contrario di questo, presenta coefficienti di espansione e di compressibilità isoterma diversi da zero.

In Dinamica si è già accennato al fenomeno della viscosità o attrito interno, con particolare riguardo al moto di un corpo in fluido reale. Si è trovato che la forza d'attrito viscoso e idraulico, e quindi lo sforzo di taglio corrispondente, è sempre opposta al moto, dipende dalla velocità e si manifesta appena il corpo viene posto in movimento. Analogo fenomeno si verifica in un fluido reale in moto, nel senso che parti del fluido possono trascinare altre parti dello stesso fluido in quiete che, dunque, acquistano una velocità relativa diversa da zero.

I fluidi reali sono tutti più o meno viscosi, ma non possono sostenere sforzi di taglio statici, contrariamente a quanto avviene nel caso in cui è presente l'attrito di contatto. Infatti corpi a contatto possono rimanere in equilibrio, purché la retta d'azione della forza sollecitante si trovi all'interno del cono d'attrito; il tal caso si desta una forza di attrito statico e dunque uno sforzo tangenziale in corrispondenza alla superficie di contatto. Le proprietà fondamentali dei fluidi in equilibrio derivano essenzialmente dalla scor-

revolezza delle loro parti, ed essendo questa proprietà comune ai liquidi e ai gas, le leggi dell'equilibrio sono le stesse per entrambi. L'esperienza conferma che, all'equilibrio, lo sforzo esercitato su ogni elemento di superficie del fluido è normale all'elemento stesso. Detta  $\hat{\mathbf{n}}$  la normale orientata alla superficie dell'elemento, si ha

$$\boldsymbol{\sigma} = p\hat{\mathbf{n}},$$

dove  $p$  è una grandezza scalare che chiamiamo *pressione*. La pressione, nel *SI*, si misura in *pasca* ( $Pa$ ) o  $N/m^2$ . Esistono varie unità di pressione ancora in uso:

- *atmosfera*

È la pressione esercitata dall'atmosfera al livello del mare, uguale a quella di una colonna di mercurio alta  $760\text{ mm}$ , assumendo per l'accelerazione di gravità il valore normale  $9,8066\text{ m/s}^2$  e per la densità del mercurio il valore normale  $1,395\text{ kg/m}^3$ ;

$$1\text{ atm} = \rho gh = 1,013 \cdot 10^5\text{ N/m}^2.$$

- *millimetro di mercurio, mm Hg o torr*, in onore a Torricelli;

$$1\text{ mm Hg} = 1\text{ torr} = 1/760\text{ atm}.$$

- *millibar*

$$1\text{ mbar} = 10^2\text{ N/m}^2 = 0,750\text{ mm Hg}.$$

Oltre a queste unità, va menzionata una unità usata nella tecnica: il  $kg_f/cm^2$  (kilogrammo-forza per centimetro quadrato).

Omettiamo di riportare quelle in uso nel sistema anglosassone; per esempio la *libbra-forza/pollice*<sup>2</sup> o simili.

La pressione non dipende dall'orientazione dell'elemento di superficie. Infatti, ricordando la relazione di Cauchy, equazione (3)-XV:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x \cos \alpha \mathbf{i} + \sigma_y \cos \beta \mathbf{j} + \sigma_z \cos \gamma \mathbf{k},$$

e tenendo presente che nel caso di un fluido in equilibrio si ha

$$\sigma_x = \sigma_{xx} \mathbf{i}, \quad \sigma_y = \sigma_{yy} \mathbf{j}, \quad \sigma_z = \sigma_{zz} \mathbf{k},$$

la precedente diventa:

$$\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{n}} = \sigma_{xx} \cos \alpha \mathbf{i} + \sigma_{yy} \cos \beta \mathbf{j} + \sigma_{zz} \cos \gamma \mathbf{k}.$$

Ma il versore della normale è espresso da

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k};$$

pertanto:

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\sigma}(\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}) \\ &= \sigma_{xx} \cos \alpha \mathbf{i} + \sigma_{yy} \cos \beta \mathbf{j} + \sigma_{zz} \cos \gamma \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Poiché questa uguaglianza sia verificata, si deve avere

$$\sigma = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}.$$

In un punto di un fluido in equilibrio, lo sforzo è normale e non dipende dall'orientazione dell'elemento di superficie su cui viene esercitato. Si ha dunque

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \hat{\mathbf{n}}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = p \hat{\mathbf{n}}; \quad (1)$$

dove  $p$  è la pressione dipendente dal punto, ma indipendente da  $\hat{\mathbf{n}}$ .

Il tensore degli sforzi, in un fluido in equilibrio, è caratterizzato dalla sola pressione, pertanto è isotropo e può essere rappresentato dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

### 2. Equilibrio dei fluidi

In accordo con le conclusioni del paragrafo precedente, l'equazione indefinita dell'equilibrio (10)-XV, nel caso dei fluidi, assume la forma

$$\mathbf{F} = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (2)$$

che si scrive:

$$\mathbf{F} = \nabla p. \quad (3)$$

Si tenga presente che  $\mathbf{F}$  è stata definita come forza per unità di volume.

La (2) equivale alle seguenti equazioni scalari:

$$F_x = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (4)$$

Affinché la (3) sia verificata,  $\mathbf{F}$  non può essere arbitraria, ma deve soddisfare la relazione

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0, \quad (5)$$

deve perciò esistere uno scalare di cui  $\mathbf{F}$  è il gradiente, scalare che, a meno di una costante, è uguale alla pressione del fluido in equilibrio.

In particolare, se  $\mathbf{F} = 0$ , dalla (3), si deduce che  $p = \text{cost}$  in tutti i punti del fluido. Se la (3) è verificata e  $\mathbf{F} \neq 0$ , considerato un percorso qualsiasi che va da un punto  $P_0$ , comunque prefissato, ad un punto  $P$ , la pressione in  $P$  è data dall'integrale di linea

$$p = \int_{P_0(l)}^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + p_0,$$

essendo  $p_0$  la pressione in  $P_0$  ed  $l$  la linea, arbitraria, che congiunge i due punti.

Il luogo dei punti in cui la pressione è costante è una superficie di equazione  $p(x, y, z) = \text{cost}$ , che si chiama *superficie isobarica*.

Poiché  $\mathbf{F}$  è il gradiente di  $p$ , il vettore  $\mathbf{F}$  risulta ortogonale, in ogni punto, alla superficie isobarica. Per l'equilibrio del fluido, occorre aggiungere alla (3) l'equazione (1), formulata come condizione al contorno

$$\boldsymbol{\sigma} = p \hat{\mathbf{n}}, \quad (6)$$

la quale impone che, sulla superficie limite del fluido in equilibrio, lo sforzo deve essere normale. Se la superficie limite del fluido è in contatto con un corpo rigido, come il recipiente che lo contiene completamente, allora il fluido assume la forma del contenitore e le forze esercitate dalle pareti, sono conformi alla (6), cioè ortogonali alla superficie limite.

Se il fluido presenta una parte di superficie in contatto con un altro fluido, per esempio l'aria o un altro fluido non miscibile, lungo una così detta superficie libera, la configurazione di equilibrio del fluido non è prefissabile ad arbitrio, ma deve risultare tale da verificare la (6).

Riferendo le componenti della forza all'unità di massa e indicando con  $\rho$  la densità del fluido, le (4), danno luogo alle seguenti equazioni scalari:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho F_x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho F_y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho F_z. \quad (7)$$

Se  $\mathbf{F}$  soddisfa la (5), indicando con  $U$  l'energia potenziale per unità di massa, le (7) diventano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Moltiplicando le precedenti, rispettivamente per  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , sommando e tenendo presente che

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz,$$

si ottiene:

$$dp = -\rho dU. \quad (9)$$

Se il fluido è omogeneo,  $\rho = \text{cost}$ , integrando si ha:

$$p = -\rho U + \text{cost}. \quad (10)$$

In un fluido omogeneo, in equilibrio, se  $U$  è costante, la pressione è costante. In altri termini le superfici equipotenziali coincidono con le superfici isobariche.

### III 3. Equilibrio dei fluidi soggetti alla gravità

Supponiamo che l'unica forza di volume che agisce su un fluido in equilibrio, sia la gravità. Assunto come riferimento, un asse  $z$  volto verso l'alto, la componente di tale forza è  $-\rho g$ , dove  $\rho$ , in genere è una funzione del punto e  $g$ , se l'estensione del fluido è piuttosto limitata, si può supporre costante. Allora la (5) dà luogo alle due relazioni

$$g \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad g \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Da queste si deduce che  $\rho$  dipende soltanto da  $z$ ; sullo stesso piano orizzontale la densità del fluido non varia. Dunque le (7) danno luogo all'unica relazione

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho(z),$$

dalla quale si ricava:

$$p = - \int_{z_0}^z g\rho(z) dz + p_0, \quad (11)$$

che si estende al caso di un fluido omogeneo e incompressibile,  $\rho = \text{cost}$ . D'altra parte, nel riferimento adottato, l'energia potenziale per unità di massa è

$$U = gz + U_0,$$

dunque dalla (10) si ottiene:

$$p = -\rho gz + \text{cost}. \quad (12)$$

Se il fluido è incompressibile, la relazione tra  $p$  e  $z$  è lineare; inoltre in conformità con la (9), si ha

$$dp = -\rho g dz.$$

Le superfici isobariche ed equipotenziali sono piani orizzontali; su di esse anche  $\rho$  è costante.

Dalla (11), qualunque sia la funzione  $\rho(z)$ , e in particolare dalla (12) se  $\rho = \text{cost}$ , si deduce che se due punti del fluido pesante, hanno la stessa quota, in essi la pressione è la stessa e, viceversa, se la pressione è uguale anche la quota è la stessa.

Ciò si verifica, per esempio, alla superficie di contatto di un liquido con l'atmosfera; tutti i punti di tale superficie sono allo stesso livello; lo sono anche le superfici libere di un fluido pesante in vasi comunicanti. La superficie di separazione di due fluidi non miscibili, in equilibrio, caratterizzata da una brusca variazione di densità, è una superficie isobarica ed equipotenziale orizzontale.

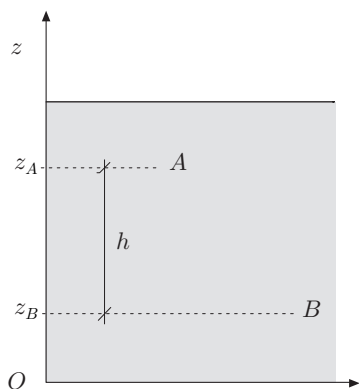


Fig. 16.1

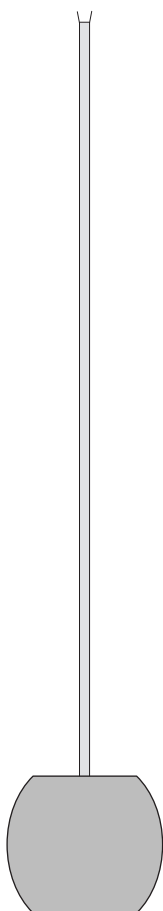


Fig. 16.2

### || 3.1. Pressione all'interno di un fluido omogeneo

Dalla (12) possiamo dedurre la pressione in un punto all'interno di un fluido omogeneo e incompressibile, soggetto all'azione della gravità, figura 1. Le pressioni, alle quote  $z_A$  e  $z_B$  sono:

$$p_A = -\rho g z_A + \text{cost}, \quad p_B = -\rho g z_B + \text{cost}.$$

Sottraendo, si ottiene

$$p_B - p_A = \rho g(z_A - z_B) = \rho g h,$$

dove  $h$  è la differenza di quota. Si ha

$$p_B = p_A + \rho g h. \quad (13)$$

La precedente esprime la *legge di Stevino* o legge fondamentale dell'idrostatica: *la differenza di pressione tra due punti di un fluido omogeneo e incompressibile è uguale al "peso" della colonna di fluido di sezione unitaria e altezza  $h = z_A - z_B$ .*

In particolare  $A$  può appartenere alla superficie libera del fluido. Che la pressione dipenda dall'altezza del liquido contenuto in un recipiente, è dimostrato dalla famosa esperienza di Pascal. Un tubo verticale, è collegato con la parete superiore di una botte completamente piena di liquido, figura 2. Versando una modesta quantità di liquido nel tubo, che ha sezione piccola rispetto a quella della botte, si osserva che, raggiunta una certa altezza, questa si rompe. Infatti la forza che si esercita sulle pareti della botte dipende dalla pressione che, a sua volta, è solo funzione dell'altezza della colonna di liquido. Se, per esempio, il tubo verticale è alto  $10\text{ m}$  ed ha sezione di  $1\text{ cm}^2$ , lo si può riempire con un litro di acqua; la sovrappressione che viene esercitata sulla botte è di circa  $10^5\text{ Pa}$ , sufficiente a causarne la rottura.

### || 3.2. Principio di Pascal

Se in un fluido è lecito trascurare le differenze di pressione dovute alla gravità, la (12) dà  $p = \text{cost}$  in tutti i punti del fluido. Nei gas, in recipienti non molto grandi, ciò si verifica con buona approssimazione; è perciò corretto definire la pressione di un gas in equilibrio. Se non si trascura l'azione della gravità,  $dp = 0$ , solo se  $dz = 0$ . Condizione necessaria e sufficiente perché  $p$  sia costante è che i punti considerati appartengano ad una stessa superficie orizzontale. Si deduce il seguente enunciato del principio di Pascal:

*La pressione in un punto  $P$  di un fluido pesante, in equilibrio, è costante in tutti i punti della superficie orizzontale passante per  $P$ .*

Supponendo  $\rho = \text{cost}$ , dalla (13) si trae che la differenza di pressione è indipendente dai valori di  $p_A$  e  $p_B$ . Se la pressione

in  $A$  viene aumentata o diminuita per qualche motivo, lo stesso aumento o diminuzione si verifica in un punto  $B$  qualsiasi. Ne discende un altro enunciato del principio di Pascal:

*In un fluido incompressibile in equilibrio, una variazione di pressione si trasmette integralmente al suo interno.*

### || 3.3. Torchio idraulico

L'applicazione più diretta del principio di Pascal è il torchio idraulico, figura 3. Due cilindri comunicanti, di sezione  $S_1$  e  $S_2$ , contenenti un liquido incompressibile, sono chiusi alla superficie libera mediante due pistoni scorrevoli. Supponendo che il sistema sia inizialmente in quiete, sul pistone di sezione  $S_1$  si eserciti una forza normale  $F_1$ ; ne segue un aumento di pressione  $\Delta p = F_1/S_1$ . Poiché la variazione di pressione si trasmette inalterata, la forza  $F_2$  che va esercitata sull'altro pistone per mantenere l'equilibrio, deve essere tale che  $\Delta p = F_2/S_2$ . Si deduce

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}, \quad F_1 = F_2 \frac{S_1}{S_2}.$$

Il sistema permette, quando  $S_2$  è molto grande rispetto a  $S_1$ , di equilibrare una forza  $F_2$  rilevante con una forza modesta.

Sistemi siffatti vengono frequentemente impiegati in sollevatori, martinetti e servomeccanismi idraulici. Naturalmente vale la *regola d'oro* delle macchine, stabilita nel capitolo XIII.

### || 3.4. Liquidi in vasi comunicanti

È noto dalla Fisica elementare che le superfici libere di un liquido pesante, contenuto in vasi comunicanti, hanno lo stesso livello rispetto al fondo. In generale, un recipiente, nel campo della gravità ha forma di vasi comunicanti se le superfici orizzontali, isobare ed equipotenziali, tagliano il recipiente lungo una sezione che costituisce un'area non connessa, cioè somma di parti distinte:  $S_A, S_B, \dots$ . È sufficiente considerare un tipico tubo ad  $U$  contenente un liquido omogeneo, come in figura 4. Assunto come riferimento un asse  $z$ , verticale discendente, con origine in  $O$ , detta  $p_C$  la pressione sul fondo, per i due rami del tubo si ha:

$$p_C - p_A = \rho g(z_C - z_A) = \rho g h_A, \quad p_C - p_B = \rho g h_B; \quad (14)$$

ma, per l'equilibrio, la pressione in  $C$  deve essere la stessa, dunque:

$$h_A + \frac{p_A}{\rho g} = h_B + \frac{p_B}{\rho g}.$$

Se le pressioni  $p_A$  e  $p_B$  sono uguali, per esempio i due rami sono in comunicazione con l'atmosfera, si ha

$$h_A = h_B = h.$$

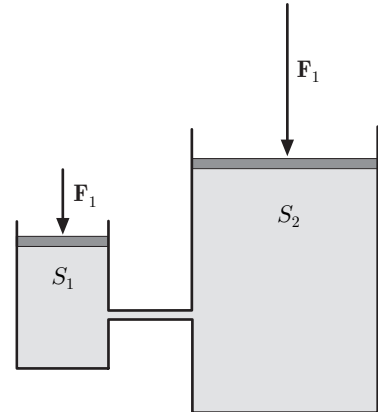


Fig. 16.3

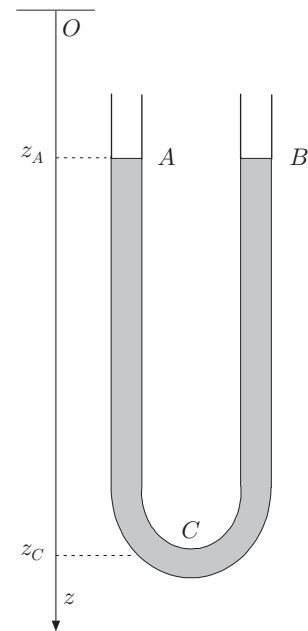


Fig. 16.4

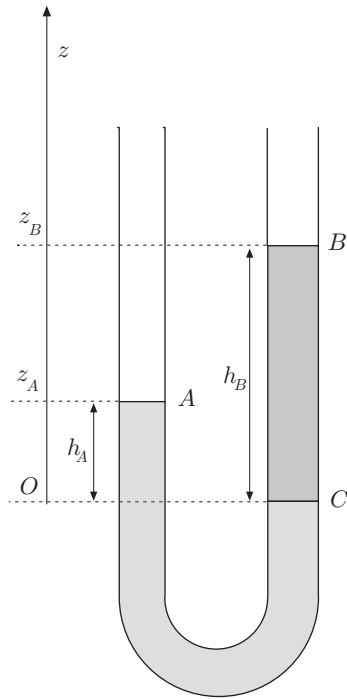


Fig. 16.5

Nel caso in cui un ramo del tubo è collegato ad un recipiente contenente un fluido a pressione  $p_B$  ignota, maggiore o minore della pressione atmosferica, e l'altro ramo comunica con l'atmosfera, si ha:

$$p_B = (h_A - h_B)\rho g + p_A.$$

In questo modo funzionano i manometri ad *aria libera*. La scelta del liquido manometrico dipende dall'intervallo di pressioni che si desidera misurare; per pressioni dell'ordine di grandezza di quella atmosferica, in genere si usa mercurio,  $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , che presenta il vantaggio di avere una tensione di vapore, a temperatura ambiente, trascurabile. Inoltre, data l'elevata densità, le dimensioni lineari del manometro non risultano eccessive. Un manometro ad acqua avrebbe dimensioni lineari circa 13 volte maggiori.

Se si usano le unità del *SI*, la (13) dà le pressioni in *pascal*. Se  $p_A$  e  $p_B$  vengono misurate in millimetri di mercurio, bisogna tener conto che  $1 \text{ mm Hg} = \rho_{Hg} g 10^{-3} \text{ Pa}$ , dunque, detta  $\rho$  la densità del liquido manometrico, si ha

$$p_B = (h_A - h_B) \frac{\rho}{\rho_{Hg}} + p_A,$$

e, se il liquido manometrico è mercurio:

$$p_B = (h_A - h_B) + p_A.$$

Supponiamo ora che i due rami del tubo ad *U* contengano liquidi differenti non miscibili, figura 5, e comunichino con l'atmosfera. Siano  $\rho_A$  e  $\rho_B$  le densità dei liquidi; si può ripetere il ragionamento precedente, pur di assumere come quota di riferimento la superficie di separazione *C* tra i due liquidi. Siccome, all'equilibrio, la pressione in *C* è la stessa e, per ipotesi, le superfici libere sono alla stessa pressione, dalle (14) si ottiene:

$$\rho_A g h_A = \rho_B g h_B, \quad \Rightarrow \quad \frac{h_A}{h_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B}.$$

Le altezze delle colonne liquide, riferite a *C*, sono inversamente proporzionali alle densità. Segue un metodo molto semplice per la misura della densità relativa di un liquido, figura 6. I rami del tubo ad *U* capovolto, pescano in due bicchieri *A* e *B* contenenti i liquidi in esame. Aspirando in *C*, i liquidi salgono nei rami del tubo; una volta chiuso il rubinetto, si attende l'equilibrio, avendo cura che il livello nei due bicchieri sia lo stesso. Per la legge di Stevino si ha

$$p_A - p_C = \rho_A g h_A, \quad p_B - p_C = \rho_B g h_B;$$

ma le pressioni  $p_A$  e  $p_B$  sono uguali perché coincidono con la

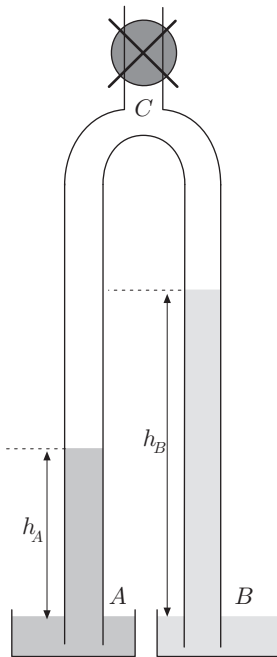


Fig. 16.6



pressione atmosferica, pertanto:

$$\rho_A g h_A = \rho_B g h_B, \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{h_B}{h_A}.$$

Dalla misura delle altezze, si ottiene la densità del liquido  $A$  relativa al liquido  $B$ ; di solito il liquido  $B$  è l'acqua.

### 3.5. Forze di pressione, peso di un liquido

La (1) stabilisce che in un fluido in equilibrio lo sforzo non dipende dall'orientazione dell'elemento di superficie  $dS$  ed è sempre normale ad esso; in particolare  $dS$  può appartenere alla superficie di contorno del fluido e alle pareti del recipiente che lo contiene. Si consideri un liquido pesante, omogeneo, contenuto in un recipiente con pareti rigide. Disposto l'asse di riferimento  $z$  verticale discendente, con origine sulla superficie libera del liquido, la pressione in un generico punto delle pareti è

$$p = \rho g z + p_0,$$

dove  $p_0$  è la pressione alla superficie del liquido, ovvero quella atmosferica. Poiché quest'ultima agisce su entrambe le facce delle pareti, la corrispondente forza di pressione ha risultante nulla; perciò la precedente diventa

$$p = \rho g z, \quad (15)$$

Dunque la forza di pressione esercitata dal liquido su un elemento  $dS$  di parete, ad una profondità  $z$  rispetto alla superficie libera, è in modulo

$$dF_p = \rho g z dS. \quad (16)$$

*Un elemento di parete  $dS$  è soggetto ad una forza di pressione ortogonale e diretta verso l'esterno, uguale al peso della colonna liquida di sezione normale  $dS$  e di altezza uguale alla profondità  $z$  dell'elemento rispetto alla superficie libera.*

Se l'elemento  $dS$  appartiene al fondo orizzontale di un vaso cilindrico, figura 7a), il peso della colonna liquida è quello che effettivamente grava su di esso e la forza totale,  $F_p$ , alla quale è soggetto il fondo è uguale al peso del liquido in esso contenuto. È evidente che le forze di pressione agenti sulle coppie di superfici laterali elementari simmetriche, danno un contributo nullo.

Ma la forza di pressione è indipendente dalla forma del vaso; si deduce che la forza  $F_p$  è la stessa per i vasi di figura 7b) e c), a condizione che il livello del liquido in essi contenuto sia lo stesso. Essa dunque è minore del peso del liquido contenuto in b), maggiore del peso del liquido contenuto in c); sul fondo dei tre recipienti, grava apparentemente lo stesso peso di liquido (*paradosso idrostatico*). La forza  $F_p$  può essere misurata in qualche maniera; per

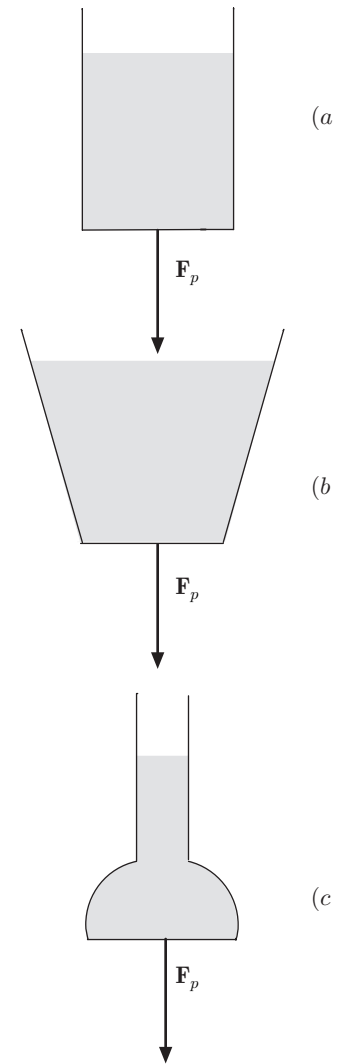


Fig. 16.7

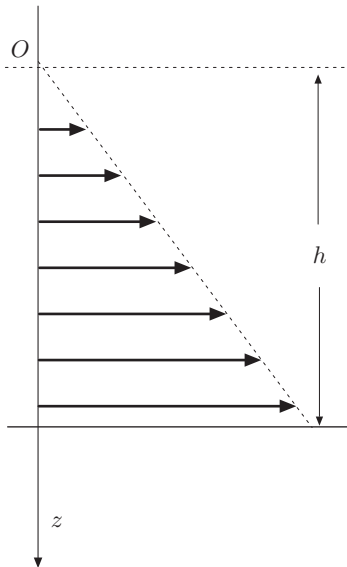


Fig. 16.8

esempio, si può fissare la parete del vaso ad un supporto rigido, mentre il fondo costituisce uno dei piatti di una bilancia che lo chiude perfettamente. In questo modo non viene misurato il peso del liquido, ma solo la forza di pressione che agisce sul fondo. Si verifica che il peso  $F_p$ , posto sull'altro piatto, è lo stesso qualunque sia la forma del vaso.

Se  $dS$  appartiene ad una parete laterale verticale, il diagramma delle forze elementari di pressione è quello mostrato in figura 8 ed ha un andamento lineare, crescente con la profondità. Consideriamo ora un elemento di parete la cui normale forma un angolo  $\theta$  con la verticale, figura 9. Nel caso a) la componente verticale di  $d\mathbf{F}_p$  è uguale al peso della colonna liquida  $ABCD$  che grava su  $dS$ , ed ha modulo  $\rho g z dS'$ , dove  $z$  è la profondità rispetto alla superficie libera e  $dS' = dS \cos \theta$  la sua sezione normale. Nel caso b) la componente verticale è negativa, verso l'alto, e rappresenta la reazione dell'elemento di parete al peso della colonna fittizia di liquido  $ABCD$ , in modo che la somma della forza  $\rho g h dS$ , che si esercita sull'elemento  $EF$ , proiezione di  $AB$  sul fondo, e della componente  $-\rho g z dS'$  sia uguale al peso della colonna liquida reale  $ABEF$ .

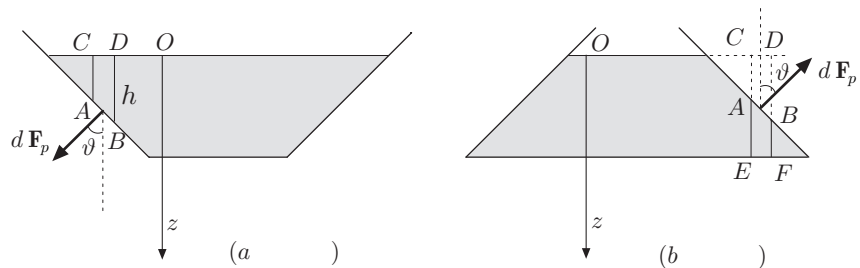


Fig. 16.9

Si comprende ora perché la forza che viene esercitata sul fondo non è uguale al peso del liquido contenuto nel vaso. Il liquido è in equilibrio sotto l'azione del suo peso e della risultante delle reazioni esercitate dalle pareti.

#### 4. Calcolo delle forze di pressione

##### PARETE PIANA VERTICALE

Si consideri un liquido pesante, omogeneo, contenuto in un recipiente con pareti rigide, piane e verticali. Detta  $L$  la larghezza di una parete e disposto l'asse di riferimento  $z$  verticale discendente, con origine in  $L/2$  sulla superficie libera del liquido, la pressione in un generico punto della parete ad una profondità  $z$  rispetto alla superficie libera, è data dalla (15) e il modulo della forza di pressione sull'elemento di superficie  $dS$ , nell'intorno di  $z$ , dalla (16).

Suddivisa la parete in elementi di superficie  $dS = Ldz$ , la forza di pressione elementare è, in modulo,  $dF_p = \rho g L z dz$ . Il diagramma di tali forze è quello di figura 8. Detta  $h$  l'altezza della superficie libera dal fondo, la risultante delle forze di pressione è

$$F_p = \int dF_p(z) = \rho g L \int_0^h z dz = \frac{1}{2} \rho g L h^2.$$

Il punto di applicazione di tale forza, centro delle forze parallele, ha coordinate

$$z_C = \frac{\int_0^h dF_p(z) z}{\int_0^h dF_p(z)} = \frac{\rho g L \int_0^h z^2 dz}{\rho g L \int_0^h z dz} = \frac{h^3/3}{h^2/2} = \frac{2}{3} h, \quad y_C = \frac{L}{2}.$$

#### PARETE PIANA OBLIQUA

Se la parete forma un angolo  $\theta$  con la verticale, come in figura 10, fissata una terna con origine sulla superficie libera, asse  $z$  discendente e asse  $x$  come in figura, la forza di pressione agente sull'elemento  $dS$ , data dalla (16), ha componenti:

$$dF_{px} = \rho g z dS \cos \theta, \quad dF_{pz} = \rho g z dS \sin \theta.$$

Essendo  $dS \cos \theta = Ldz$ , si ha

$$dF_{px} = \rho g L z dz, \quad dF_{pz} = \rho g z dS \cos \theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \rho g L \tan \theta z dz.$$

Pertanto:

$$dF_p = \sqrt{(dF_{px})^2 + (dF_{pz})^2} = \frac{\rho g L}{\cos \theta} z dz.$$

La risultante è:

$$F_p = \frac{\rho g L}{\cos \theta} \int_0^h z dz = \frac{\rho g L h^2}{\cos \theta \cdot 2}.$$

Indicando con  $b$  la lunghezza del lato obliquo, ed essendo  $\cos \theta = h/b$ , si ha anche:

$$F_p = \frac{1}{2} \rho g L b h.$$

Il punto di applicazione della risultante ha coordinate

$$x_C = \frac{\int x dF_p}{F_p}, \quad y_C = \frac{L}{2}, \quad z_C = \frac{\int z dF_p}{F_p}.$$

Detta  $a$  la distanza dell'estremo della parete obliqua dall'origine, è  $x = a(h - z)/h$ , dunque

$$x_C = \frac{\rho g L a}{\cos \theta h} \frac{\int_0^h (hz - z^2) dz}{F_p} = \frac{2}{3} a$$

$$z_C = \frac{\rho g L}{\cos \theta} \frac{\int_0^h z^2 dz}{F_p} = \frac{2}{3} h.$$

#### PARETE VERTICALE SEMICIRCOLARE

Nel caso che la parete verticale sia costituita da un semicerchio di raggio  $R$ , col diametro coincidente con la superficie libera, figura 11, detta  $2r$  la base della striscia orizzontale di altezza  $dz$ , alla profondità  $z$ , si ha

$$z = R \sin \theta, \quad dz = R \cos \theta d\theta,$$

$$dS = 2r dz = 2R \cos \theta R \cos \theta d\theta = 2R^2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta.$$

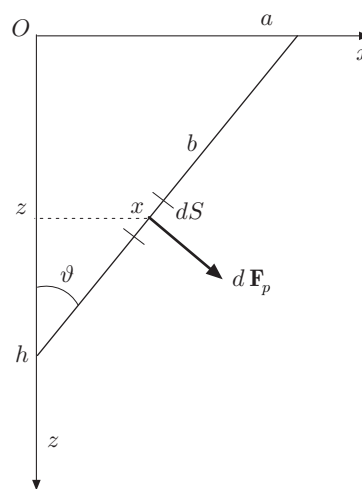


Fig. 16.10

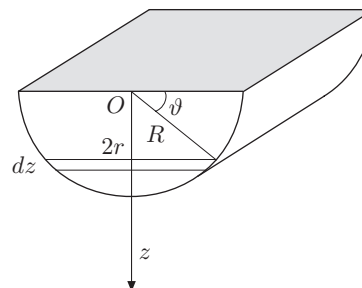


Fig. 16.11

Pertanto la (16) diventa:

$$dF_p = \rho g z dS = 2\rho g R^3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta,$$

da cui si ricava la risultante:

$$F_p = 2\rho g R^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta.$$

Posto:

$$x = \cos \theta, \quad dx = -\sin \theta d\theta,$$

si ottiene

$$F_p = -2\rho g R^3 \int_1^0 x^2 dx = \frac{2}{3} \rho g R^3.$$

Per quanto riguarda le coordinate del punto di applicazione, si ha

$$z_C = \frac{\int_0^h z dF_p(z)}{\int_0^h dF_p(z)} = \frac{2\rho g R^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta}{2\rho g R^3/3},$$

che diventa:

$$z_C = 3R \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta) \sin^2 \theta d\theta.$$

Integrando, si ottiene

$$z_C = \frac{3}{16} \pi R.$$

#### PARETE VERTICALE TRIANGOLARE

Consideriamo una parete costituita da un triangolo equilatero di lato  $l$  e altezza  $h = l\sqrt{3}/2$ , con un lato che limita la superficie libera, figura 12. Suddivisa la parete in elementi di superficie di base  $x$  e altezza  $dz$ , si ha

$$dF_p = p dS = \rho g z x dz.$$

Essendo  $x = l(h - z)/h$ , si ottiene

$$dF_p = \rho g z \left( l - \frac{l}{h} z \right) dz;$$

dunque:

$$F_p = \rho g l \left[ \int_0^h z dz - \frac{l}{h} \int_0^h z^2 dz \right] = \frac{1}{6} \rho g l h^2.$$

Tale forza è applicata alla profondità

$$z_C = \frac{\rho g l \left[ \int_0^h z^2 dz - \frac{l}{h} \int_0^h z^3 dz \right]}{\rho g l h^2/6} = \frac{1}{2} h.$$

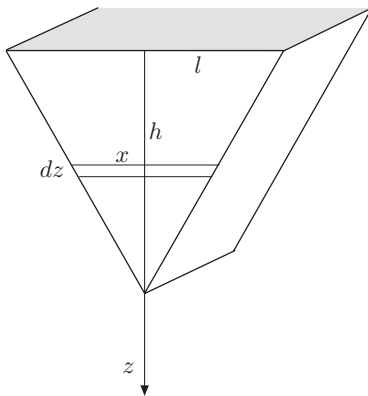


Fig. 16.12

$$\dagger \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta = \left[ \frac{3}{8} \theta - \frac{3}{16} \sin 2\theta - \frac{1}{4} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{8} \frac{\pi}{2}$$

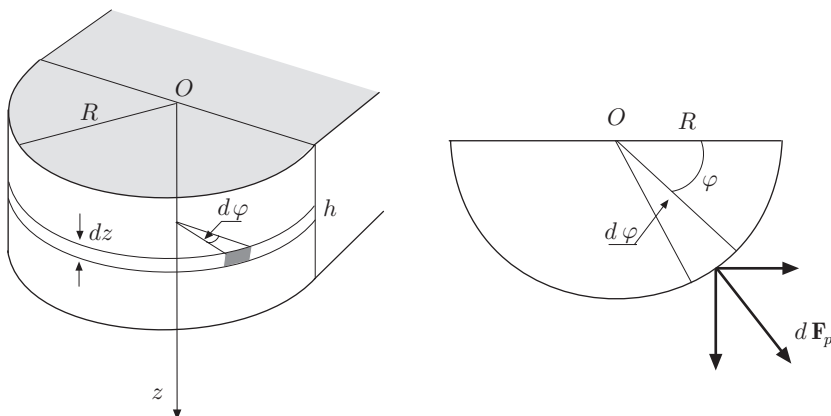


Fig. 16.13

## PARETE VERTICALE CILINDRICA

Esaminiamo il caso in cui la parete sia costituita da un semicilindro di raggio  $R$  e altezza  $h$ , figura 13. Le forze di pressione hanno tutte rette d'azione concorrenti sull'asse del cilindro. Consideriamo, alla profondità  $z$ , un elemento della parete di superficie  $dS = R d\varphi dz$ , in cui  $dz$  è l'altezza e  $R d\varphi$  la base. La forza elementare di pressione è

$$dF_p = \rho g z R d\varphi dz.$$

Si verifica facilmente che le componenti simmetriche, parallele al diametro

$$dF_{p\parallel} = \rho g z R d\varphi dz \cos \varphi,$$

danno un contributo nullo, cioè

$$\delta F_{p\parallel} = \rho g z R dz \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi = 0,$$

mentre le componenti ortogonali

$$dF_{p\perp} = \rho g z R d\varphi dz \sin \varphi,$$

danno

$$\delta F_{p\perp} = R \rho g z dz \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 2R \rho g z dz.$$

Si osservi che  $2R dz$  è la proiezione piana dell'elemento di superficie del semicilindro. Integrando tra 0 e  $h$ , si ottiene la risultante delle forze di pressione:

$$F_p = 2R \rho g \int_0^h z dz = 2R \rho g \frac{h^2}{2},$$

uguale a quella relativa alla parete piana. Analogamente, si verifica facilmente che la coordinata  $z_C$  del punto di applicazione della forza, come per la parete piana, è  $2h/3$ .

## RECIPIENTE SFERICO

Si consideri ora un recipiente sferico pieno d'acqua, di raggio  $R$  e si determini la risultante delle forze di pressione su tutta la sfera.

Si osservi anzitutto che le forze esercitate da un fluido in quiete su una parete rigida curva, non sono, in generale, equipollenti ad un'unica forza; lo sono però se la parete è sferica, poiché in questo caso le rette d'azione delle forze di pressione concorrono nel centro della sfera, analogamente a come si è verificato per la parete cilindrica, dove concorrono sull'asse.

Stabiliamo l'origine della terna di riferimento nel centro della sfera, con l'asse  $z$  positivo ascendente, figura 14. La (12) si scrive:

$$p = -\rho g z + p_0 + \rho g R = \rho g(R - z) + p_0,$$

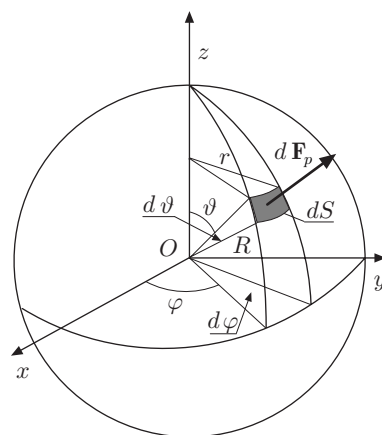


Fig. 16.14

perché, supponendo che sulla superficie della sfera agisca la pressione atmosferica  $p_0$ , la costante della (12) risulta  $cost = p_0 + \rho g R$ , e omettendo, per il motivo già detto  $p_0$ , si ha

$$p = \rho g(R - z).$$

Le forze di pressione, distribuite sulla superficie sferica, sono radiali e ortogonali all'elemento  $dS$ . La superficie di tale elemento, in coordinate sferiche, è

$$dS = r d\varphi R d\theta = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi;$$

dunque la forza elementare di pressione, in modulo, risulta:

$$dF_p = p dS = \rho g(R - z) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Ma  $z = R(1 - \cos \theta)$ , dunque:

$$dF_p = \rho g[R - R(1 - \cos \theta)] R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \rho g R^3 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Le componenti secondo gli assi coordinati di tale forza sono:

$$dF_{px} = \rho g R^3 \cos \theta \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi$$

$$dF_{py} = \rho g R^3 \cos \theta \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi$$

$$dF_{pz} = \rho g R^3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Il contributo alla risultante delle forze di pressione delle componenti  $x$  e  $y$  è nullo; infatti

$$F_{px} = \rho g R^3 \int_0^\pi \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$$

$$F_{py} = \rho g R^3 \int_0^\pi \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0.$$

a causa della simmetria di cui godono.

Integrando le componenti lungo  $z$ , si ha

$$\begin{aligned} F_{pz} &= \rho g R^3 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi \rho g R^3 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Pertanto si ottiene:

$$F_p = 2\pi \rho g R^3 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -2\pi \rho g R^3 \left[ \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi = \frac{4}{3} \pi \rho g R^3.$$

Questo risultato era prevedibile; infatti per un fluido in equilibrio, la risultante delle forze di pressione (di superficie) è uguale, in modulo, alla risultante delle forze di volume; nel nostro caso, al peso del liquido contenuto nella sfera.

Il peso di un liquido può essere determinato con le normali procedure di pesata. Si osservi che la misura, in effetti, è indiretta; il liquido contenuto in un recipiente di volume  $V$ , a causa della gravità, genera forze di pressione  $p dS \hat{n}$ , normali ad ogni elemento di superficie del recipiente, e regolate dalla leggi di Stevino e di Pascal. La risultante di tali forze è uguale alla risultante delle forze di volume; nel nostro caso al peso. Si rammenti che per l'equilibrio deve essere

$$\int_V \mathbf{F}_V dV + \int_S \mathbf{F}_S dS = 0.$$

Che la risultante delle forze di pressione sia uguale, in modulo, al peso del liquido, si può dedurre osservando che le forze di pressione elementari  $p dS \hat{n}$ , rimangono inalterate qualora il volume del liquido considerato si trovasse all'interno di un liquido di ugual natura, la cui superficie libera giunga allo stesso livello del liquido contenuto in  $V$ . Tale liquido è in equilibrio sotto l'azione del proprio peso e della risultante delle forze di pressione  $\int p dS \hat{n}$  esercitate dal fluido circostante. Questa risultante è diversa da zero, è opposta al peso del liquido ed è applicata al suo centro di massa.

RECIPIENTE TRONCOCONICO

Come ulteriore esempio, consideriamo un liquido che riempie un recipiente che ha la forma di un tronco di cono. Chiamiamo  $R_1$  e  $R_2$  i raggi della base maggiore e di quella minore,  $h$  l'altezza e  $\theta$  l'angolo che la superficie laterale forma con quest'ultima, figura 15. Stabiliamo una terna di riferimento con origine sulla superficie libera del liquido e asse  $z$  discendente. Suddividendo la superficie laterale del tronco di cono in anelli di raggio  $r$  e altezza  $dl$ , l'elemento di superficie  $dS$  della parete che occorre considerare, risulta  $dS = r d\varphi dl$ . Essendo  $dl = dz / \cos \theta$ , si ha

$$dS = r d\varphi dl = \frac{r}{\cos \theta} dz d\varphi;$$

pertanto il modulo della forza di pressione elementare è

$$dF_p = \rho g z dS = \frac{r}{\cos \theta} \rho g z dz d\varphi.$$

Poiché

$$r = R_2 + \frac{R_1 - R_2}{h} z,$$

si ottiene:

$$dF_p = \frac{1}{\cos \theta} \rho g \left( R_2 + \frac{R_1 - R_2}{h} z \right) z dz d\varphi.$$

La forza di pressione, ortogonale all'elemento  $dS$ , ha componenti:

$$dF_{px} = \frac{1}{\cos \theta} \rho g \left( R_2 + \frac{R_1 - R_2}{h} z \right) z dz \cos \theta \cos \varphi d\varphi$$

$$dF_{py} = \frac{1}{\cos \theta} \rho g \left( R_2 + \frac{R_1 - R_2}{h} z \right) z dz \cos \theta \sin \varphi d\varphi$$

$$dF_{pz} = -\frac{1}{\cos \theta} \rho g \left( R_2 + \frac{R_1 - R_2}{h} z \right) z dz \sin \theta d\varphi.$$

Il contributo delle prime due, integrando rispetto a  $\varphi$  tra 0 e  $2\pi$ , analogamente a quanto visto prima, è nullo. Per quanto riguarda le componenti verticali, osservando che il rapporto  $\sin \theta / \cos \theta$  è uguale a  $(R_1 - R_2)/h$ , l'integrazione rispetto a  $\varphi$  fornisce

$$\delta F_{pz} = -2\pi \rho g \frac{R_1 - R_2}{h} \left( R_2 z + \frac{R_1 - R_2}{h} z^2 \right) dz;$$

si noti il segno negativo della componente. Da questa si ottiene la risultante delle forze di pressione:

$$\begin{aligned} F_{pz} &= -2\pi \rho g \frac{R_1 - R_2}{h} \left( R_2 \int_0^h z dz + \frac{R_1 - R_2}{h} \int_0^h z^2 dz \right) \\ &= \frac{1}{3} \pi \rho g h (R_2^2 - 2R_1^2 + R_1 R_2). \end{aligned}$$

Sommando a questa la forza di pressione sul fondo,  $\pi R_1^2 \rho g h$ , si ottiene la forza totale di pressione:

$$F_S = \frac{1}{3} \pi \rho g h (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2).$$

Questa non è altro che la risultante delle forze di volume, cioè il peso del liquido contenuto nel tronco di cono. Se questo viene pesato, poggiando sul piatto di una bilancia prima una base e successivamente l'altra, si ha ovviamente lo stesso peso.

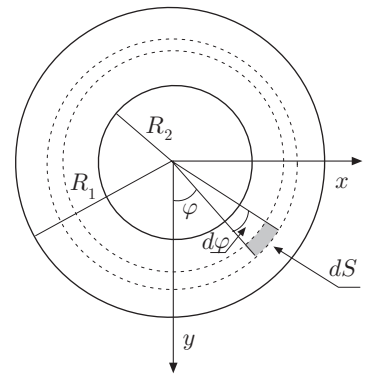
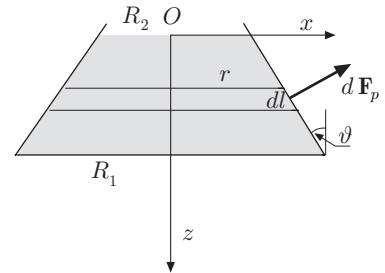


Fig. 16.15

.....

### 5. Misura delle pressioni

Gli apparecchi per la misura delle pressioni sono svariati e il loro principio di funzionamento dipende dall'intervallo di pressioni che si desidera misurare. In pratica si possono presentare fenomeni in cui la pressione può avere valori di molte migliaia di atmosfere,  $1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ Pa}$ , e valori di circa  $10^{-12} \text{ mm Hg}$ ,  $1 \text{ mm Hg} \approx 1,3 \cdot 10^2 \text{ Pa}$ . Si pensi che la pressione al centro del Sole è  $2 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$ , mentre nel vuoto più spinto ottenuto in laboratorio è dell'ordine di grandezza del limite inferiore sopra indicato.

Nel campo delle alte pressioni la misura può essere ottenuta con metodi indiretti o con manometri particolari; in quello delle basse pressioni per mezzo di vacuometri il cui funzionamento si fonda su fenomeni di conduzione termica o di ionizzazione; la descrizione di tali manometri è argomento di testi specializzati. Ci limitiamo alla descrizione di alcuni manometri per gas che, con qualche variante, possono essere impiegati anche per i liquidi.

#### 5.1. Barometro

Il barometro è un manometro assoluto che viene impiegato per la misura della pressione atmosferica (Torricelli). In figura 16 è mostrato il suo schema: la pressione atmosferica è equilibrata dalla pressione della colonna di mercurio contenuta nella canna barometrica, alla cui sommità la pressione è nulla; in effetti ivi è presente la tensione del vapore di mercurio che, a temperatura ambiente, è trascurabile. In pratica, un tubo di vetro, chiuso ad un estremo, viene riempito di mercurio e quindi capovolto in un pozzetto anch'esso contenente mercurio. La pressione atmosferica, per la legge di Stevino, è data da

$$p = \rho gh.$$

Assegnate la densità del mercurio a  $0^\circ \text{ C}$ , l'accelerazione di gravità nel luogo della misura e supponendo nulla la tensione di vapore del mercurio, la pressione è misurata nelle unità del *SI* oppure, leggendo direttamente l'altezza  $h$  su una scala graduata, in *mm Hg*. A questa misura vanno apportate alcune correzioni, che non descriviamo in dettaglio, dovute ai seguenti motivi:

-variazione della densità del mercurio alla temperatura dell'esperienza.

-tensione del vapore di mercurio nella parte superiore della canna barometrica.

-dilatazione termica della scala che, in genere, è incisa a  $0^\circ \text{ C}$ .

-variazione di  $g$  per la latitudine e la quota.

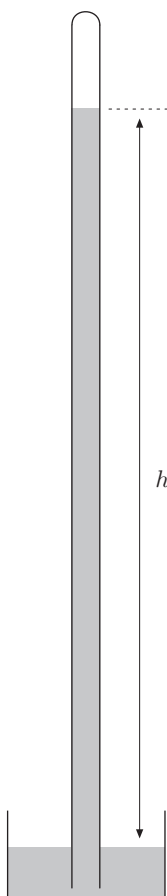


Fig. 16.16



### 5.2. Manometri metallici

I manometri metallici sono utilizzati per la misura della pressione atmosferica e per la misura di pressioni nell'ambito tecnico e industriale. Essi essenzialmente sono costituiti da una scatola metallica con pareti di conveniente spessore che vengono deformate dalla forza di pressione; la deformazione viene opportunamente amplificata, mediante un sistema di leve, collegate a un indice che può scorrere su una scala graduata. Nella versione utilizzata per la misura della pressione atmosferica la scatola è ondulata, per aumentarne la superficie, ed in essa è praticato il vuoto. La pressione schiaccerebbe la scatola se la sua parete non fosse collegata ad una robusta molla di contrasto che la tiene in equilibrio. La variazione di pressione causa lo spostamento della parete dall'equilibrio e la deformazione che ne segue viene segnalata da un indice.

In figura 17 è mostrato lo schema di principio del manometro di Bourdon. La pressione incognita agisce all'interno di un tubo metallico elastico, opportunamente sagomato. Anche in questo dispositivo, la deformazione del tubo, indicata dall'indice, è legata alla pressione da misurare.

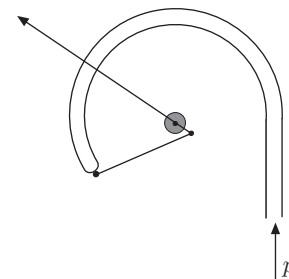


Fig. 16.17

### 5.3. Manometro di MacLeod

Serve a misurare pressioni fino a circa  $10^{-5} \text{ mm Hg}$ , in recipienti in cui è stato praticato il vuoto. In figura 18 è mostrato lo schema dell'apparecchio; l'ampolla  $A$  di volume  $V$ , sormontata da un capillare  $C_1$  chiuso all'estremo, è collegata, alla biforcazione  $B$ , al recipiente in cui la pressione è incognita e al serbatoio di mercurio  $M$ , il quale può essere spostato lungo la verticale mediante un tubo flessibile. Accanto al capillare  $C_1$  è disposto un capillare identico  $C_2$ , connesso col recipiente, in modo che gli effetti di capillarità siano compensati. Quando il mercurio è al di sotto della biforcazione, tutto l'apparecchio si trova alla pressione da misurare; il dislivello tra  $B$  e la superficie libera del mercurio è pari alla pressione atmosferica. Ora si sollevi  $M$  finché il mercurio, riempiendo  $A$ , giunga nel capillare  $C_1$ , ad un livello prefissato  $h_1$ , mentre in  $C_2$  giunge in  $h_2$ . Il volume del gas residuo in  $A$  è così ridotto ad una frazione molto piccola di  $V$ . Detta  $V_1$  tale frazione e  $p_x$  la pressione incognita, per la legge di Boyle, si ha

$$p_x V = p V_1, \quad \Rightarrow \quad p_x = p \frac{V_1}{V},$$

essendo  $p = h_2 - h_1$  la pressione in  $V_1$ , misurata in  $mm$ . Se, per esempio, il volume  $V$  è  $500 \text{ cm}^3$  e il volume  $V_1$   $1 \text{ mm}^3$ , si possono misurare pressioni fino a circa  $10^{-5} \text{ mm Hg}$ .

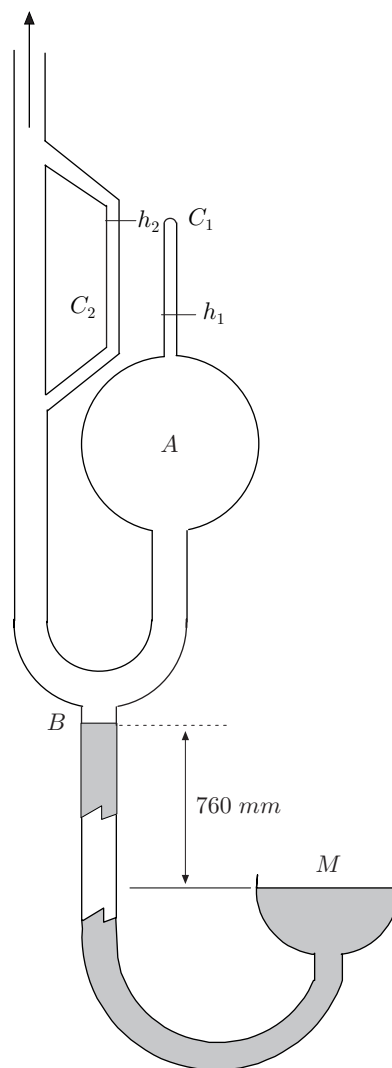


Fig. 16.18

**Esempi**

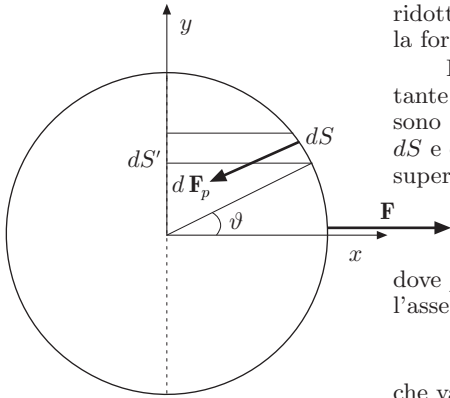


Fig. 16.19

III 1. All'interno di due emisferi rigidi, a perfetta tenuta, la pressione viene ridotta a 1/4 di quella atmosferica. Se  $R$  è il raggio degli emisferi, determinare la forza  $\mathbf{F}$  che occorre applicare a ognuno di essi per staccarli, figura 19.

La forza  $\mathbf{F}$ , nel nostro caso parallela all'asse  $x$ , deve equilibrare la risultante delle componenti, in questa direzione, delle forze di pressione. Queste sono uniformemente distribuite sulla superficie, ortogonali ad ogni elemento  $dS$  e dirette lungo il raggio, verso l'interno degli emisferi. In ogni punto della superficie la forza elementare di pressione è in modulo

$$dF_p = \left(p - \frac{1}{4}p\right) dS = \frac{3}{4}pdS,$$

dove  $p$  è la pressione atmosferica esterna. La componente di tale forza lungo l'asse  $x$  è

$$-\frac{3}{4}pdS \cos \theta,$$

che va integrata su tutta la superficie dell'emisfero:

$$F_p = -\frac{3}{4}p \int_S \cos \theta dS;$$

ma  $dS \cos \theta = dS'$ , è la proiezione dell'elemento di superficie della sfera sul cerchio massimo, pertanto:

$$F_p = -\frac{3}{4}p\pi R^2.$$

La forza minima da applicare è  $F = -F_p$ . Ponendo nella precedente  $R = 0,3\text{ m}$ , si trova che essa è notevole; si rammenti l'esperienza degli emisferi di Magdeburgo, illustrata nei testi di Fisica elementare.

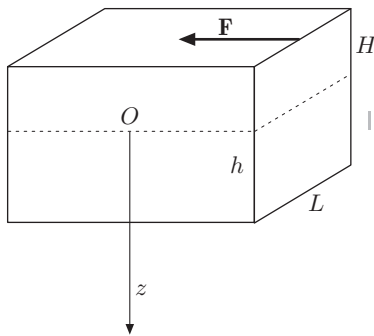


Fig. 16.20

III 2. Un recipiente, contenente acqua, è costituito da un parallelepipedo rettangolo. Una parete, alta  $H$ , è incernierata ad uno spigolo della base di lunghezza  $L$ . Essa è sostenuta in posizione verticale per mezzo di una forza  $\mathbf{F}$  orizzontale applicata alla sommità, in modo da chiudere perfettamente il recipiente. Trovare il valore minimo di  $\mathbf{F}$  per l'equilibrio, se il livello dell'acqua dal fondo è  $h$ , figura 20.

Assunto come riferimento un asse  $z$ , volto in basso, con origine in corrispondenza alla superficie libera dell'acqua, la coordinata  $z_C$  del centro delle forze di pressione, come s'è visto al paragrafo 4, è  $z_C = 2h/3$ ; si trova cioè a  $1/3$  dal fondo. In esso è applicata la risultante delle forze di pressione:

$$F_p = \rho g L \int_0^h z dz = \frac{1}{2} \rho g L h^2.$$

Per l'equilibrio, la somma dei momenti di tale forza e della forza applicata, rispetto allo spigolo di base, dev'essere nulla, ossia:

$$F_p z_C = FH, \Rightarrow F = \frac{1}{6} \rho g L \frac{h^3}{H}.$$

III 3. Due liquidi non miscibili, di densità  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , sono in equilibrio in un tubo ad U, sotto l'azione della gravità. Determinare l'altezza della colonna del liquido 1 sapendo che il dislivello tra le superfici libere dei liquidi è  $h$ , figura 21.

Le superfici libere  $A, B$ , liquidi-aria, dove agisce la pressione atmosferica  $p_0$ , e la superficie di separazione  $C$ , tra i due liquidi, sono superfici isobare. Assumendo un asse di riferimento ascendente con origine in  $C$ , si ha:

$$p_C = -\rho_1 g z_A + p_0, \quad p_C = -\rho_2 g z_B + p_0,$$

da cui

$$\rho_1 g z_A = \rho_2 g z_B, \quad \rho_1 z_A = \rho_2 (z_A - h), \Rightarrow z_A = \frac{\rho_2 h}{\rho_2 - \rho_1}.$$

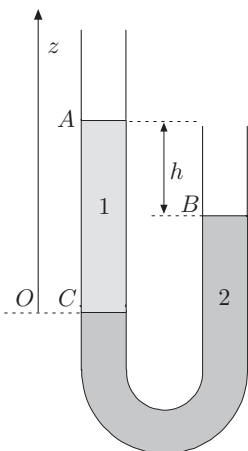


Fig. 16.21

III 4. Un tubo ad  $U$  di sezione costante contiene un liquido che, all'equilibrio, si trova allo stesso livello nei due rami. Se il liquido viene perturbato e quindi abbandonato a se stesso, compie oscillazioni; determinarne il periodo, assumendo la lunghezza della colonna di fluido uguale a  $2l$  e trascurando l'attrito.

La colonna di fluido può essere spostata dall'equilibrio per mezzo di una pressione esercitata su uno dei rami del tubo, alla quale corrisponde una forza  $\rho g 2zS$ , dove  $2z$  è lo spostamento e  $S$  la sezione del tubo. Rimossa la pressione, hanno inizio le oscillazioni; la forza di richiamo  $F = -\rho g 2zS = -kz$  agisce sulla massa di fluido,  $m = \rho S 2l$ . Dall'equazione della dinamica, si ha

$$ma = -kz, \quad \rho S 2l \ddot{z} = -\rho g S 2z;$$

cioè

$$\ddot{z} + \frac{g}{l}z = 0, \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Il periodo è uguale a quello di un pendolo semplice.

### III 6. Principio di Archimede

Limitandosi ai campi uniformi, come quello della gravità in una regione non molto estesa, consideriamo un corpo omogeneo che abbia forma di parallelepipedo rettangolo, immerso in fluido anch'esso omogeneo, figura 22. La risultante delle forze di pressione, applicate al parallelepipedo, si riduce alla forze agenti sulle basi  $AB$  e  $CD$ ; infatti le forze di pressione sulle facce laterali hanno risultante nulla, perché costituite da forze elementari  $d\mathbf{F}$  e  $d\mathbf{F}'$  a due a due opposte. Detta  $S$  l'area delle basi e assunto un asse  $z$  di riferimento, positivo verso l'alto, il modulo della risultante delle forze di pressione è

$$F_A = p_1 S - p_2 S = S(p_1 - p_2);$$

che, per la (12), si scrive

$$F_A = S\rho_L g(z_2 - z_1), \quad (17)$$

essendo  $\rho_L$  la densità del fluido. Ma  $S\rho_L(z_2 - z_1)$  è la massa di fluido occupato dal corpo; pertanto la forza risultante, verso l'alto *spinta*, è uguale al peso di fluido spostato, applicato al centro di massa.

Se il fluido non è omogeneo, si ha

$$F_A = -S \int_{z_1}^{z_2} g\rho_L(z) dz.$$

La dimostrazione si estende ad un corpo di forma qualsiasi, figura 23; infatti si supponga il corpo completamente immerso, e lo si sostituisca con il fluido spostato. Quest'ultimo, all'interno di un mezzo di ugual natura, è in equilibrio indifferente, sotto l'azione delle forze di volume, gravità, la cui risultante è applicata al centro di massa, e delle forze di superficie, esercitate dal fluido circostante. Poiché queste ultime non sono influenzate dalla natura

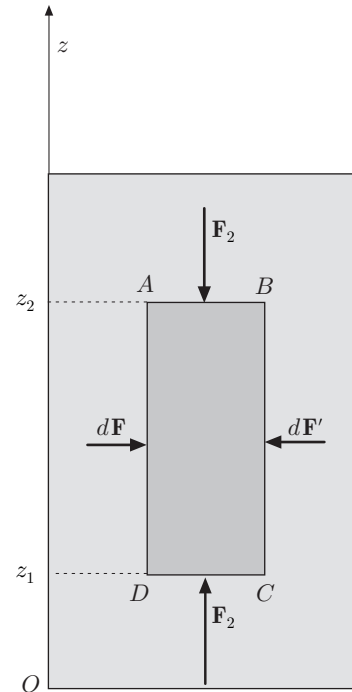


Fig. 16.22

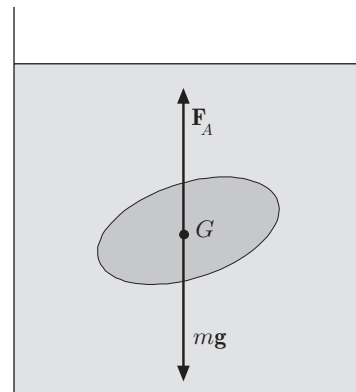


Fig. 16.23

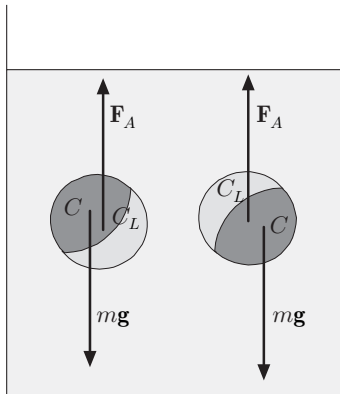


Fig. 16.24

del corpo immerso, è evidente che la loro risultante è opposta alla risultante delle forze di volume.

Un corpo immerso in un fluido, nel campo della gravità, è dunque soggetto a due forze verticali opposte: il peso proprio,  $mg$ , e la spinta di Archimede,  $\mathbf{F}_A$ ; il primo applicato al centro di massa del corpo, l'altra al centro di massa del fluido spostato. I due punti coincidono se il corpo è omogeneo, densità  $\rho_C$  costante, e se esso è completamente immerso nel fluido, supponendo quest'ultimo incompressibile, omogeneo, anch'esso di densità  $\rho_L$  costante. Detto  $V$  il volume del corpo, la forza risultante alla quale è soggetto il corpo immerso, rispetto ad un asse  $z$  orientato verso l'alto, in valore e segno, risulta:

$$F = F_A - mg = V(\rho_L - \rho_C)g, \quad (18)$$

che è verticale, volta in alto o in basso secondo che  $\rho_L > \rho_C$  oppure  $\rho_L < \rho_C$ .

In generale, i punti di applicazione della spinta e del peso non coincidono; la prima è applicata al centro di massa del fluido spostato, il secondo al centro di massa del corpo. Il corpo risulta soggetto ad una forza verticale data dalla (18) e ad una coppia. Il corpo di figura 24, costituito da due parti di densità diversa, ha peso uguale al peso del liquido spostato e può disporsi in equilibrio all'interno del liquido, dunque  $F_A = mg$ . Le posizioni del corpo, in figura, non sono di equilibrio, perché su di esso agisce la coppia costituita da  $mg$  ed  $\mathbf{F}_A$ . L'equilibrio è realizzato solo se il centro di massa  $C$  del corpo ed il centro di massa  $C_L$  del liquido spostato si trovano sulla stessa verticale; inoltre sarà stabile o instabile secondo che  $C$  si disponga sotto o sopra  $C_L$ .

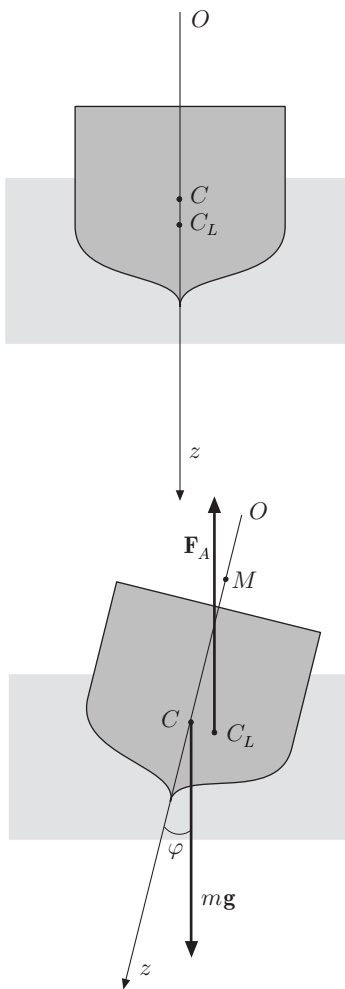


Fig. 16.25

### || 6.1. Natanti

Dalla (18) si deduce che un corpo immerso in acqua viene a galla, se la densità del liquido è maggiore della densità del corpo; esso è dunque un *galleggiante*. Si ha equilibrio quando il peso del galleggiante è uguale al peso del liquido spostato dalla porzione immersa, e se il centro di massa  $C$  del galleggiante e il centro di massa  $C_L$  del liquido spostato si trovano sulla stessa verticale, figura 25. Le forze agenti, spinta di Archimede  $\mathbf{F}_A$  e peso del corpo  $mg$ , applicate rispettivamente a  $C_L$  e  $C$ , in generale costituiscono una coppia che, per l'equilibrio, deve avere momento nullo.

L'equilibrio è stabile nei riguardi degli spostamenti verticali; infatti, essendo il peso del natante costante, uno spostamento verso l'alto diminuisce il liquido spostato e quindi la spinta; viceversa uno spostamento verso il basso aumenta la spinta. In entrambi i casi il natante è ricondotto all'equilibrio dalla risultante delle forze  $\mathbf{F}_A + mg$ . Nei riguardi delle rotazioni, si noti che al

ruotare del natante, a parità di volume immerso, cambia la forma del liquido spostato, quindi la posizione di  $C_L$ . L'asse  $z$ , solidale col natante e passante per  $C$ , ruota di un angolo  $\varphi$  rispetto alla verticale e incide sulla verticale passante per  $C_L$  in un punto, che varia al variare di  $\varphi$ , cioè con l'inclinazione del natante. Per  $\varphi$  piccolo, questo punto di incidenza tende a un punto limite  $M$  che si chiama *metacentro* del natante. Se  $M$  è più alto di  $C$ , la coppia, costituita da  $\mathbf{F}_A$  e  $m\mathbf{g}$  e generata dal rullo, tende a riportare il natante nella posizione di equilibrio stabile. Si hanno oscillazioni il cui periodo dipende dal momento d'inerzia e dal momento impresso e quindi dalla distanza  $MC$ .

Ogni natante ha un periodo proprio di oscillazione; in mare mosso, il natante tende a oscillare col periodo dell'onda; se il periodo di questa coincide col periodo proprio del natante, si ha risonanza e l'ampiezza delle oscillazioni può risultare pericolosa. Per questo motivo si tende ad aumentare il periodo proprio, diminuendo la distanza  $MC$ . Su grandi navi tale distanza è dell'ordine di alcune decine di centimetri e il periodo proprio di circa 20 s. Il periodo del moto ondoso raramente raggiunge valori di 10 s; perciò di solito si è lontani dalla risonanza.

## || 6.2. Sommergibili, Aerostati

Il sommergibile è un natante il cui volume si può ritenere costante e il suo peso variabile, perché in esso sono disposti dei serbatoi che possono essere riempiti di acqua per determinare l'immersione. Il sommergibile in immersione è in equilibrio se il suo peso e la spinta di Archimede sono uguali in modulo. In pratica, quando esso è immerso, la sua compressibilità è maggiore di quella dell'acqua circostante, perciò, essendo costante il peso, tende ad affondare. Tuttavia la quota di immersione può essere resa stabile mediante i timoni di profondità che, però, funzionano solo durante il moto.

In modo analogo si comporta un aerostato; la forza *ascensionale* è data dalla differenza tra il peso dell'aria spostata dall'involucro e quello del gas in esso racchiuso (elio, idrogeno, aria riscaldata). All'equilibrio tale forza è, in modulo, uguale al peso dell'involucro, navicella, equipaggio e materiali. In condizioni normali, cioè a  $0^\circ C$  e 1 atmosfera, la densità dell'aria è  $1,29 \text{ kg/m}^3$ ; quella dell'idrogeno  $\rho_H = 0,069 \text{ kg/m}^3$ . Pertanto la forza ascensionale per unità di volume di un aerostato pieno di idrogeno, risulta

$$g(\rho_{aria} - \rho_H) \approx 12 \text{ N/m}^3.$$

Se si trascura la tensione dell'involucro e si suppone che questo non sia completamente gonfio alla partenza, in modo da permettere l'espansione del gas durante l'ascensione, ammettendo valida

la legge di Boyle, la forza ascensionale si può ritenere costante al variare della quota. Infatti se l'aerostato sale, per esempio, dove la pressione è la metà, il suo volume viene raddoppiato; intanto la densità dell'aria e del gas nell'involucro si sono dimezzati; si è dimezzata a sua volta la forza ascensionale per unità di volume, cosicché la forza ascensionale totale rimane invariata. In pratica il volume dell'involucro non può crescere al di sopra di un certo limite perché questo si strapperebbe; ciò viene impedito da opportune valvole che lasciano sfuggire gas, determinando una diminuzione della forza ascensionale. Si potrebbe in tal modo raggiungere una certa quota di equilibrio, forza ascensionale uguale al carico, ma questo è instabile perché l'aerostato vi perviene con velocità non nulla; altro gas esce dall'involucro e la forza ascensionale diventa minore del carico, cosicché inizia la discesa. Intanto l'involucro si affloscia, ma la forza ascensionale, avendo assunto un valore minore, non è in grado di sostenere il carico. L'Aeronauta, per arrestare la discesa, può eventualmente rifornire l'involucro di altro gas di riserva, oppure lanciare zavorra; l'aerostato sale fino ad una nuova quota, che viene oltrepassata, quindi ricomincia la discesa e così via. La possibilità di percorrere distanze notevoli dipende, oltre che dai venti, dall'uso appropriato di gas e zavorra.

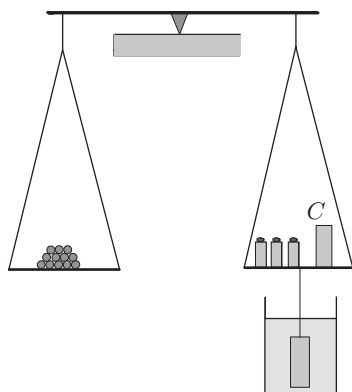


Fig. 16.26

### 7. Misure di densità

Tra vari metodi, per misurare con buona precisione la densità di un solido, si può usare la bilancia idrostatica (Archimede), schematizzata in figura 26. Come in ogni pesata di precisione, per eliminare gli errori derivanti dalla disuguaglianza dei bracci e dalla dipendenza della sensibilità della bilancia dal carico, va usato il metodo detto a carico costante. Su uno dei piatti si pongono un certo numero di masse tarate, la cui somma sia maggiore della massa più grande da determinare, e si cerca l'equilibrio ponendo sull'altro piatto della zavorra, per esempio pallini di piombo o altro. Ponendo il corpo  $C$  accanto alle masse tarate, la bilancia trabocca; si ristabilisce l'equilibrio togliendo un certo numero di masse tarate che danno dunque la massa del corpo. Quindi si lega il corpo ad un filo sottile e si immerge completamente in acqua. L'equilibrio della bilancia viene turbato; lo si ristabilisce aggiungendo delle masse tarate che misurano la spinta dell'acqua. Detta  $m_A$  la massa dell'acqua spostata e  $m$  la massa del corpo, essendo uguali i corrispondenti volumi, si ha

$$\frac{\rho}{\rho_A} = \frac{m}{m_A}, \quad \rho = \rho_A \frac{m}{m_A}$$

che dà la densità del corpo relativa all'acqua; naturalmente il corpo non dev'essere solubile. Si noti che la bilancia misura forze, peso del corpo e spinta di Archimede nei luoghi in cui l'accele-

razione di gravità ha il valore normale, ma il rapporto trovato è indipendente dal posto. Con la bilancia idrostatica di figura 26, si possono misurare le densità di liquidi relative ad un liquido di riferimento, di solito acqua.

Un corpo, comunemente un cilindro di vetro, viene sospeso, mediante un filo sottile, ad un piatto della bilancia, equilibrando con della zavorra. Si immerge completamente il cilindro in acqua e successivamente nel liquido di densità incognita, determinando le rispettive spinte con masse tarate. Essendo uguali  $g$  e il volume del corpo immerso nelle due misure, dette  $m_A$  e  $m_L$  le masse che equilibrano le spinte, il rapporto  $m_L/m_A$  fornisce la densità del liquido relativa all'acqua; anzi  $m_A$  è una costante che, ad una certa temperatura, va determinata una volta per tutte. Si tenga presente che la densità dipende dalla temperatura.

### Esempi

- III 5. Un cilindro omogeneo di raggio  $r$ , altezza  $h$  e densità  $\rho$ , galleggia su una base in uno specchio d'acqua, immerso per metà del suo volume. Determinare il minimo lavoro perché venga immerso per tutta la sua altezza, figura 27.

Poiché il cilindro galleggia su una vasta superficie, si può ritenere che, a causa dell'immersione, il livello dell'acqua non vari; inoltre poiché si richiede il lavoro minimo, si deve supporre che il cilindro venga immerso molto lentamente, velocità  $v \approx 0$ , in modo che non acquisti energia cinetica e che, inoltre, il lavoro della forza resistente, dipendente dalla velocità, sia nullo.

Sul cilindro agiscono la forza necessaria per immergerlo, il peso e le forze di pressione, distribuite sulla superficie immersa. Indicando con  $\mathcal{L}$  il lavoro della forza applicata, con  $\mathcal{L}_g$  il lavoro della forza peso, con  $\mathcal{L}_p$  quello delle forze di pressione, per il teorema dell'energia cinetica si ha

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_p = \Delta T = 0;$$

pertanto:

$$\mathcal{L} = -\mathcal{L}_g - \mathcal{L}_p.$$

Assumendo un asse di riferimento  $z$  volto in basso e con origine sulla superficie libera dell'acqua, il lavoro della forza peso è uguale alla variazione di energia potenziale  $U_C$  del cilindro, cambiata di segno

$$\mathcal{L}_g = -\Delta U_C = \rho \pi r^2 g h \frac{h}{2}.$$

Per calcolare il lavoro della forza di pressione si deve tenere conto che la pressione cresce con l'aumentare della parte immersa del cilindro. Pertanto la forza di pressione, funzione di  $z$ , risulta  $F_p(z) = \rho_A \pi r^2 g z$ , essendo  $\rho_A$  la densità dell'acqua. Si ottiene:

$$\mathcal{L}_p = -\rho_A \pi r^2 g \int_{h/2}^h z dz = -\frac{3}{8} \rho_A \pi r^2 g h^2 = -\Delta U_A.$$

Il lavoro della forza applicata, necessario per immergere il cilindro risulta:

$$\mathcal{L} = \frac{3}{8} \rho_A \pi r^2 g h^2 - \frac{1}{2} \rho \pi r^2 g h^2.$$

Avendo supposto che all'equilibrio, il cilindro emerga per metà, si deduce che  $\rho = \rho_A/2$ , perciò:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8} \rho_A \pi r^2 g h^2.$$

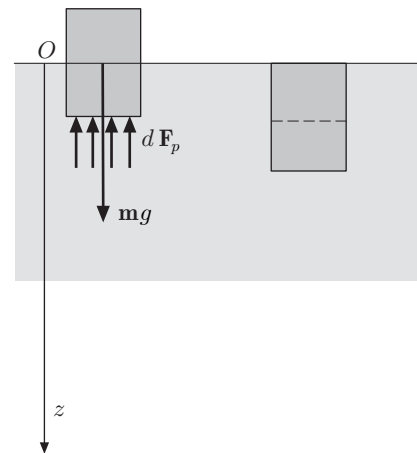


Fig. 16.27

Si osservi che il lavoro  $\mathcal{L}_p$  della forza di pressione, è uguale al lavoro del peso dell'acqua spostata dal cilindro, quando questa risale alla superficie libera. Infatti il suo peso è  $\rho_A \pi r^2 g h / 2$  e l'innalzamento del suo centro di massa  $3h/4$ ; (si è supposto che lo specchio d'acqua sia vasto). Dunque tale lavoro è uguale alla variazione dell'energia potenziale  $U_A$  della massa di acqua spostata oppure, se si vuole, poiché il resto dell'acqua non interviene nel processo, alla variazione dell'energia potenziale  $U_T$  dell'intero specchio d'acqua, cambiata di segno:

$$\mathcal{L}_p = -\Delta U_A = -\Delta U_T.$$

Perciò il lavoro che occorre effettuare è uguale alla somma delle variazioni di energia potenziale del cilindro e dell'acqua spostata:

$$\mathcal{L} = \Delta U_C + \Delta U_A.$$

Si supponga ora che il cilindro galleggi nell'acqua contenuta in un recipiente, di dimensioni finite, anch'esso cilindrico di raggio  $R > r$  e che, come prima, venga immerso molto lentamente. Poiché il recipiente ha dimensioni finite, quando il cilindro viene immerso, il livello dell'acqua aumenta di una quantità  $h_1$ . Infatti il volume dell'acqua che sale in superficie è uguale al volume di acqua spostata:

$$\pi(R^2 - r^2)h_1 = \pi r^2 \left( \frac{h}{2} - h_1 \right),$$

da cui

$$h_1 = \frac{r^2}{R^2} \frac{h}{2},$$

dunque la superficie libera assunta dall'acqua si trova alla quota  $z_0 + h_1$ . La variazione di quota del centro di massa dell'acqua spostata in superficie, durante l'immersione del cilindro, risulta

$$\frac{3}{4}h - \frac{h_1}{2} + \frac{h_1}{2} = \frac{3}{4}h,$$

(il cilindro viene immerso di una quantità  $h/2 - h_1$ ), pertanto la corrispondente variazione di energia potenziale risulta

$$\begin{aligned} \Delta U_A &= \rho_A \pi r^2 g \left( \frac{h}{2} - h_1 \right) \frac{3}{4}h = \rho_A \pi r^2 g \left( \frac{h}{2} - \frac{r^2}{R^2} \frac{h}{2} \right) \frac{3}{4}h \\ &= \frac{3}{8} \rho_A \pi r^2 g h^2 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \end{aligned}$$

La variazione di energia potenziale del cilindro è data da:

$$\begin{aligned} \Delta U_C &= -\frac{1}{2} \rho_A \pi r^2 g h \left( \frac{h}{2} - h_1 \right) = -\frac{1}{2} \rho_A \pi r^2 g h \left( \frac{h}{2} - \frac{r^2}{R^2} \frac{h}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \rho_A \pi r^2 g h^2 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \end{aligned}$$

Il lavoro minimo necessario per immergere il cilindro, come prima, è uguale alla variazione dell'energia potenziale totale,  $\Delta U_A + \Delta U_C$ , ossia:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8} \rho_A \pi r^2 g h^2 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

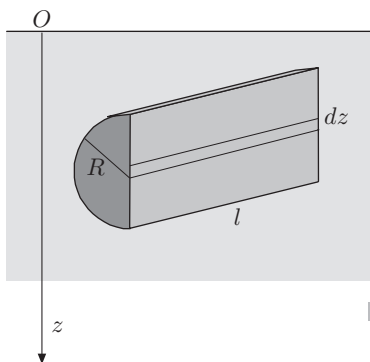


Fig. 16.28

- ||| 6. Un semicilindro omogeneo, di raggio  $R$  e lunghezza  $l$ , è immerso in acqua con l'asse disposto orizzontalmente, ed è bloccato come in figura 28. Si determini il momento risultante delle forze di pressione rispetto al suo asse.

Poiché il corpo è omogeneo, il centro di spinta coincide col centro di massa; quindi la spinta d'Archimede  $F_A$ , è applicata in esso. Essendo  $F_A = \pi R^2 l \rho_A g / 2$  e  $b = 4R / (3\pi)$  la distanza dall'asse, baricentro di una semicirconferenza di raggio  $R$ , il momento della spinta è

$$M = F_A b = \frac{2}{3} \rho_A g l R^3.$$



Tale momento può essere calcolato direttamente come somma dei momenti elementari delle forze di pressione. Osserviamo che le forze di pressione che agiscono sulla superficie curva e sulle basi hanno momento nullo; le prime perché concorrenti sull'asse, le seconde perché parallele ad esso. Resta da determinare il momento delle forze di pressione che agiscono sulla superficie piana.

Assunto come riferimento un asse  $z$  verticale discendente, con origine sulla superficie libera, per la legge di Stevino

$$p(z) = \rho_A g z + p_0,$$

la forza che agisce sull'elemento  $dz$  è  $dF = p(z)l dz$ , ed essendo  $z - R$  il braccio, risulta

$$dM = p(z)l(z - R)dz.$$

Dunque:

$$M = \int_0^{2R} p(z)l(z - R)dz = \frac{2}{3}\rho_A g l R^3.$$

### 8. Fluidi compressibili

In natura non esistono fluidi incompressibili anche se, con buona approssimazione, i liquidi possono essere considerati tali. Un volume  $V$  di fluido su cui viene esercitata una sovrappressione  $dp$ , a temperatura costante, subisce una variazione di volume  $dV$ , proporzionale alla quantità di fluido considerato, cioè al volume  $V$ . Tale variazione di volume può essere determinata attraverso il coefficiente di compressibilità isoterma, definito al paragrafo 5.1-XV,

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T. \quad (19)$$

Il coefficiente di compressibilità isoterma indica la diminuzione relativa di volume per un aumento unitario di pressione; esso si misura in  $Pa^{-1}$ . Per i liquidi il suo ordine di grandezza è di  $10^{-10} Pa^{-1}$ ; si capisce che esso determina una variazione talmente piccola da poter essere, in genere, trascurata.

In corrispondenza alla variazione di volume, si ha una variazione di densità che può essere valutata per mezzo della (19). Supponendo che  $\kappa_T$  sia circa costante nell'intervallo di pressioni considerato e detto  $V_0$  il volume alla pressione atmosferica, si ha

$$dV = -\kappa_T V_0 dp.$$

Integrando:

$$V = -\kappa_T V_0 p + C,$$

dove  $C = V_0 + \kappa_T V_0 p_0$ ; quindi

$$V = V_0 - \kappa_T V_0 (p - p_0).$$

Da questa relazione si trae:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho_0}{1 - \kappa_T (p - p_0)}, \quad (20)$$

che mostra come aumenta la densità al crescere della pressione.

Nel gas ideale  $pV = cost$ , (legge di Boyle). Differenziando, si ha

$$pdV + Vdp = 0, \quad \frac{dV}{dp} = -\frac{V}{p};$$

pertanto:

$$\kappa_T = \frac{1}{p}. \quad (21)$$

Alla pressione atmosferica si ha  $\kappa_T \approx 10^{-5} Pa^{-1}$ ; si deduce che, come ordine di grandezza, esso è  $10^5$  volte più elevato di quello dei liquidi. Va osservato che la compressione non è mai sufficientemente lenta da risultare isoterma.

Si definisce, in modo analogo, il coefficiente di compressibilità adiabatica  $\kappa_S$ . In Termodinamica si dimostra che

$$\kappa_S = \frac{\kappa_T}{\gamma}, \quad (22)$$

dove  $\gamma$  è il rapporto tra il calore molare a pressione costante e il calore molare a volume costante del gas.

### 8.1. Pressione in un liquido compressibile

Assumendo l'asse di riferimento  $z$  discendente, con origine sulla superficie libera del liquido, dalla (12), si ha

$$\frac{dp}{dz} = \rho g;$$

sostituendo a  $\rho$  la (20), si ottiene:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\rho_0 g}{1 - \kappa_T(p - p_0)}, \quad \Rightarrow \quad [1 - \kappa_T(p - p_0)]dp = \rho_0 g dz.$$

Integrando:

$$(p - p_0) - \frac{1}{2}\kappa_T(p - p_0)^2 = \rho_0 g z.$$

Il secondo termine del primo membro è piccolo rispetto al primo in quanto, come s'è detto, per i liquidi  $\kappa_T \approx 10^{-10} Pa$ . Quindi con buona approssimazione si può porre  $(p - p_0)^2 \approx (\rho_0 g z)^2$ ; si ottiene:

$$p - p_0 = \rho_0 g z + \frac{1}{2}\kappa_T(\rho_0 g z)^2 = \rho_0 g z \left( 1 + \frac{1}{2}\kappa_T \rho_0 g z \right).$$

Si deduce comunque che, a parte casi eccezionali, per il liquidi la correzione è trascurabile; per esempio, a 1000 m di profondità sotto il livello del mare, il termine correttivo è dell'ordine di grandezza di  $10^{-3}$ .

### || 8.2. Variazione della pressione atmosferica con l'altezza

Supponiamo che il campo della gravità sia uniforme,  $\mathbf{g}$  costante, l'asse di riferimento  $z$  orientato verso l'alto. Per la (12), la variazione di pressione è

$$dp = -g\rho(p)dz,$$

dove  $\rho(p)$  è la densità dell'aria, funzione della pressione e dunque dell'altezza  $z$ . Dalla precedente si ha

$$dz = -\frac{1}{\rho(p)g}dp,$$

e integrando da  $z = 0$ , dove la pressione è  $p_0$ , a  $z$ , si ottiene la *formula ipsometrica*:

$$z = -\frac{1}{g} \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho(p)} dp. \quad (23)$$

Occorre stabilire come varia la densità dell'aria con la pressione; per piccoli dislivelli, dell'ordine di alcune centinaia di metri, si può supporre che l'atmosfera sia isoterma. Allora per la legge di Boyle:

$$p_0 V_0 = pV, \quad \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0},$$

la (23) dà:

$$z = -\frac{1}{g} \int_{p_0}^p \frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{p} dp = \frac{p_0}{g\rho_0} \ln \frac{p_0}{p}. \quad (24)$$

Per dislivelli superiori a quelli considerati, l'ipotesi isoterma non è più ammissibile. Per l'integrazione della precedente, occorre stabilire una legge che dia la variazione di temperatura e dello stato igrometrico con l'altezza. Questa legge è di solito empirica e si riferisce ad una *atmosfera tipo* media della regione, su cui non insistiamo. Pertanto una legge empirica che esprime l'altezza,  $z = z(p)$ , relativa all'atmosfera convenzionale, può dare indicazioni notevolmente diverse da quelle reali. Dalla (24) si ottiene:

$$p = p_0 e^{-(g\rho_0/p_0)z}, \quad (25)$$

dove  $\rho_0$  e  $p_0$  sono rispettivamente la densità e la pressione dell'aria al livello del mare. Si può verificare che la pressione si dimezza a circa 5,4 km di altezza e si riduce a 1/4 a circa 11 km.

### ||| 9. Equilibrio relativo di masse fluide

L'equilibrio relativo di un fluido è stabilito dall'equazione (2), nella quale le forze di volume comprendono quelle reali e quelle di trascinamento. La (3) dunque si scrive:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_t = \nabla p.$$

Consideriamo un recipiente cilindrico, contenente un liquido,  $\rho = \text{cost}$ , ruotante attorno al suo asse con velocità angolare costante. Nel riferimento solidale col recipiente, l'equilibrio è soddisfatto dall'equazione

$$\rho \mathbf{g} + \rho \omega^2 \mathbf{r} = \nabla p, \quad (26)$$

dove i termini al primo membro sono la forza peso per unità di volume, reale, e la forza centrifuga per unità di volume, di trascinamento.

Assunto un riferimento cartesiano ortogonale con asse  $z$  positivo ascendente e coincidente con l'asse del recipiente, si ha

$$-\rho g \mathbf{k} = -\nabla(\rho g z), \quad \rho \omega^2 \mathbf{r} = -\nabla \left[ -\frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) \right].$$

Pertanto la (26) diventa:

$$\nabla \left[ p + \rho g z - \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) \right] = 0, \quad (27)$$

dove si può porre

$$U = \rho g z - \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2),$$

che rappresenta l'energia potenziale per unità di volume del fluido. Dalla (27) si deduce che la funzione

$$p + \rho g z - \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2),$$

è costante. Pertanto per tutti i punti di una superficie isobarica  $p = \text{cost}$ , superficie equipotenziale, si ha

$$\rho g z - \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) = \text{cost}.$$

Le superfici equipotenziali e isobariche sono paraboloidi di rotazione attorno all'asse  $z$ , figura 29. In particolare la superficie libera, costituita dal paraboloide con vertice in  $z_0$ , ha equazione:

$$g(z - z_0) = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (28)$$

essendo, in tal caso,  $\text{cost} = \rho g z_0$ .

Il valore di  $z_0$  va determinato imponendo che il volume del paraboloide sia uguale a quello del liquido contenuto nel recipiente. La differenza di pressione tra due punti  $B$  e  $A$  del liquido è data da

$$\Delta p = -\Delta U, \quad p_B - p_A = \rho g (z_A - z_B) - \frac{1}{2} \rho \omega^2 (r_A^2 - r_B^2),$$

essendo  $r^2 = x^2 + y^2$  il quadrato della distanza del punto dall'asse di rotazione.

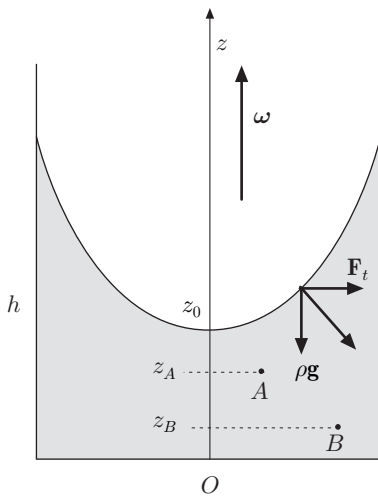


Fig. 16.29

La pressione in un punto si può ottenere anche dalla:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} = \rho \omega^2 x \mathbf{i} + \rho \omega^2 y \mathbf{j} - \rho g \mathbf{k}.$$

Si ha:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \omega^2 x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \omega^2 y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g,$$

che integrate danno la pressione nel punto desiderato.

La forza risultante  $\rho \mathbf{g} + \rho \omega^2 \mathbf{r}$  è ovviamente normale alla superficie equipotenziale. Si noti inoltre che la pressione sul fondo del recipiente, in corrispondenza all'asse, è

$$p = \rho g z_0 + p_0.$$

In corrispondenza alla parete, detta  $h$  l'altezza della colonna liquida,

$$p = p_0 + \rho g h = p_0 + \rho g \left( z_0 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{g} \omega^2 \right),$$

dove  $R$  è il raggio del recipiente. Perciò è

$$p = p_0 + \rho g z_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2,$$

somma della pressione della colonna liquida di altezza  $z_0$  e di quella dovuta alla forza centrifuga.

**Esempi** .....

||| 7. Un serbatoio a forma di parallelepipedo, contenente acqua, si muove su una superficie orizzontale con accelerazione costante, figura 30. Determinare le superfici isobariche.

Sull'acqua, agiscono la gravità e la forza di trascinamento, entrambe di volume. Nel riferimento mobile è dunque

$$\nabla p = \rho \mathbf{g} + \mathbf{F}_t = -\rho g \mathbf{k} - \rho \mathbf{a}_t;$$

avendo assunto gli assi di riferimento come in figura. Essendo

$$-\rho g \mathbf{k} = -\nabla(\rho g z), \quad -\rho \mathbf{a}_t = -\nabla(\rho a_t x),$$

la precedente diventa:

$$\nabla(p + \rho g z + \rho a_t x) = 0.$$

Ciò implica

$$p + \rho g z + \rho a_t x = cost,$$

che, per una superficie isobarica, diventa

$$\rho g z + \rho a_t x = cost.$$

In particolare, l'equazione della superficie libera è

$$\rho g z + \rho a_t x = \rho g z_0;$$

che rappresenta, come tutte le altre superfici isobariche, un piano inclinato rispetto a quello orizzontale, di un angolo fornito da

$$\tan \varphi = \frac{z_0 - z}{x} = \frac{a_t}{g}.$$

Naturalmente la forza per unità di volume, risultante di  $\rho \mathbf{g}$  e  $\mathbf{F}_t$ , è ortogonale alle superfici isobariche.

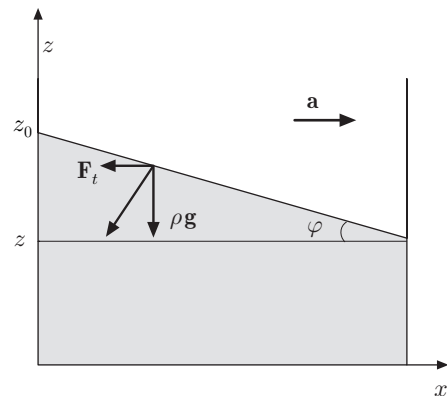


Fig. 16.30

- ||| 8. Nel serbatoio dell'esempio precedente, è immerso un corpo omogeneo, di massa  $m$  che, se il serbatoio non si muovesse di moto accelerato, verrebbe a galla. Determinate l'accelerazione del serbatoio, costante, per la quale il corpo è in equilibrio indifferente.

Nel riferimento solidale col serbatoio si ha equilibrio se

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_A = 0,$$

dove  $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$  è la forza di trascinamento e  $\mathbf{F}_A$  la spinta di Archimede. Essendo  $\mathbf{F}_t$  e  $m\mathbf{g}$  ortogonali, segue che

$$F_A^2 = m^2(g^2 + a_t^2), \quad \Rightarrow \quad a_t = \sqrt{\frac{F_A^2}{m^2} - g^2}.$$

9. Un recipiente contenente acqua scivola su un piano senza attrito, inclinato di un angolo  $\varphi$  rispetto all'orizzontale. Determinare l'angolo di inclinazione della superficie libera dell'acqua rispetto al piano.

La situazione è analoga a quella degli esempi precedenti. Nel riferimento solidale col recipiente, la risultante delle forze reali e della forza di trascinamento deve essere ortogonale alla superficie libera dell'acqua, superficie isobarica. L'unica forza reale è il peso per unità di volume, intensità  $-\rho g$ . La forza di trascinamento per unità di volume, opposta alla forza motrice, ha intensità  $-\rho a_t = -\rho g \sin \theta$ , con  $\theta$  angolo di inclinazione del piano. La risultante di tali forze è ortogonale al piano inclinato, dunque la superficie libera dell'acqua è parallela a quest'ultimo.

.....

### ||| 10. Tensione superficiale

Ogni parte omogenea di un sistema di sostanze in equilibrio costituisce una fase. In una sostanza pura come l'acqua, in presenza del suo vapore, sono presenti due fasi: l'acqua liquida ed il vapore. La superficie di contatto tra le due fasi è la superficie di separazione tra le parti del sistema, ciascuna omogenea. Il sistema costituito da una lastra di vetro su cui è posta una goccia di mercurio in aria, è un sistema costituito da tre fasi. Esiste una linea di contatto comune alle tre fasi; questa linea è il contorno comune delle superfici di contatto vetro-mercurio, vetro-aria, aria-mercurio. Per una definizione più precisa di fase, si rimanda alla Termodinamica.

I fenomeni di superficie più semplici si presentano al contatto tra le fasi di una sostanza pura; ci limiteremo perciò a considerare il sistema costituito da lamine liquide, in cui è lecito trascurare la forza peso e la forza di pressione idrostatica.

Nella materia esistono forze di coesione molecolari attrattive che, nel caso di interazione binaria, sono descritte con buona approssimazione dal potenziale di Lennard-Jones, considerato al paragrafo 6-VIII. Tali forze sono molto intense nei solidi, meno intense nei liquidi e diminuiscono fino ad annullarsi, passando dai gas reali al gas ideale. Dall'andamento del potenziale di Lennard-Jones, si deduce che la forza di interazione tende a zero all'aumentare della distanza tra le molecole e che, per ogni tipo di molecola,

si può definire un raggio di interazione molecolare  $r_m$ , pari a due o tre volte la distanza di equilibrio. Consideriamo una molecola  $M_1$  all'interno del liquido, figura 31; essa è soggetta, da parte delle molecole che si trovano all'interno della sua sfera di interazione, a forze di attrazione in tutte le direzioni che statisticamente si equilibrano. Diversa è la situazione di una molecola  $M_2$  che si trova a una distanza dalla superficie libera minore del raggio di interazione molecolare. Le molecole "mancanti" nella parte  $ABC$ , non sono equilibrate da quelle che effettivamente si trovano nella parte simmetrica  $DEF$ . La molecola è soggetta a una forza netta attrattiva verso l'interno del liquido; ne segue che per portare una molecola dall'interno del liquido sulla superficie libera, cioè per accrescere le dimensioni di tale superficie, occorre effettuare lavoro. Ciò significa che la superficie libera del liquido possiede una energia potenziale, proporzionale alla sua area, che all'equilibrio, deve essere minima. In effetti si osserva che i liquidi, in piccole quantità, tendono ad assumere la forma di gocce sferiche, che corrisponde alla minima superficie di contorno.

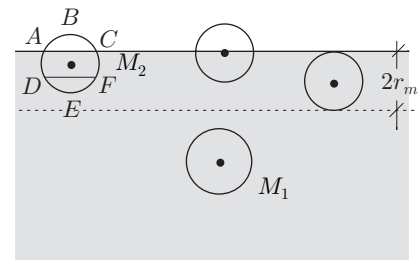


Fig. 16.31

Se immaginiamo di volere aumentare la superficie libera del liquido, esercitando una trazione ortogonale a una linea appartenente ad essa, occorre effettuare il lavoro corrispondente all'aumento dell'energia potenziale di superficie, come se si volesse aumentare la superficie di una membrana di gomma. Qualitativamente la contrattilità delle lamine superficiali si può dimostrare con lamine persistenti, per esempio di acqua saponata, adagiate su contorni di fili rigidi. La forma della lamina è sempre quella di area minima compatibile con la forma del contorno, figura 32. Un cappio di cotone, fissato ad una circonferenza rigida su cui si adagia una lamina liquida, si apre a cerchio quando viene rotta la lamina al suo interno. Infatti il cerchio ha l'area massima a parità di perimetro; ciò significa area minima della lamina ancora esistente tra il filo e il contorno esterno rigido. Questa proprietà può essere sfruttata per studiare la superficie di area minima che ha un contorno rigido prefissato, figura 33.

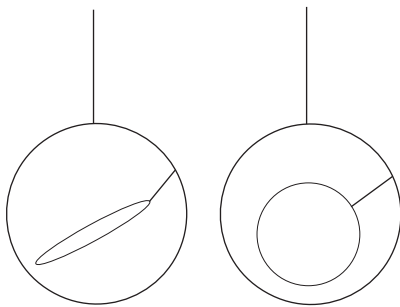


Fig. 16.32

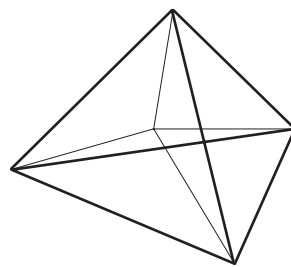
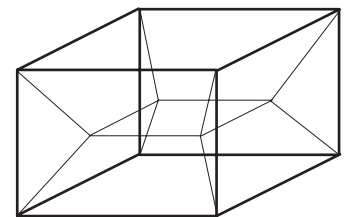


Fig. 16.33



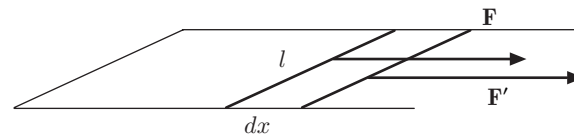


Fig. 16.34

Si consideri una lamina liquida adagiata su un contorno rigido a forma di  $U$ , con il lato di chiusura  $l$  che può scorrere senza attrito sugli altri due, figura 34. La lamina si contrae in modo da assumere la superficie minima; per tenerla in equilibrio, occorre applicare al lato  $l$  una forza  $F = 2\tau l$ , dove  $\tau$  è la tensione superficiale, definita dalla relazione

$$\tau = \frac{F}{2l}; \quad (29)$$

il fattore 2 tiene conto del fatto che la lamina ha due facce. Se si applica una forza  $F'$  leggermente superiore, la superficie della lamina aumenta e, per uno spostamento  $dx$ , il lavoro elementare della forza risulta

$$d\mathcal{L} = F'dx = 2\tau l dx = \tau dS,$$

da cui:

$$\tau = \frac{d\mathcal{L}}{dS}. \quad (30)$$

La tensione superficiale si misura in newton per metro ( $N/m$ ) oppure in joule per metro quadrato ( $J/m^2$ ). La tensione superficiale dipende dalla natura del liquido, se il gas circostante è inerte, dalla temperatura, diminuendo al crescere di questa e dipende fortemente da eventuali contaminazioni della superficie.

In accordo col teorema di conservazione dell'energia, la (30) esprime che il lavoro effettuato per estendere la lamina isotermicamente, corrisponde all'aumento dell'energia superficiale che viene restituito quando la sua superficie si contrae. La tendenza della lamina a contrarsi può essere attribuita anche ad una sorta di pressione interna o di coesione. Essa è piuttosto elevata. Una stima può essere fatta con le seguenti considerazioni.

Riferendosi alla figura 31, si deduce che la forza attrattiva è nulla quando la distanza  $x$  della molecola dalla superficie è uguale al raggio di azione molecolare  $r_m$ , e cresce quando  $x$  diminuisce fino a zero. Supponendo che  $F_m$  ne sia il valore medio,  $F_m r$  è il lavoro per portare una molecola dall'interno del liquido alla superficie. Per aumentare dell'unità di area la superficie libera del liquido, per ogni molecola occorre un lavoro uguale a circa  $F_m r/2$ , perché delle molecole costituenti la pellicola superficiale, una parte andrà a costituire la superficie esterna, l'altra quella interna. Le molecole formanti la lamina giungono nell'unità di area creata, vincendo la pressione di coesione  $p_C$  che è la risultante per unità



di area delle forze di coesione  $F_m$ . Dunque il lavoro occorrente è  $p_C r_m/2$ , ed essendo  $\tau$  definita dalla (30), si ha

$$p_C = 2 \frac{\tau}{r_m}.$$

Ne risulta una pressione interna piuttosto elevata; per l'acqua, assumendo  $\tau = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$  e  $r_m \approx 10^{-8} \text{ m}$ , si ottiene  $p_C \approx 15 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ . In effetti, non si è tenuto conto del calore che bisogna fornire al liquido perché il processo sia isoterma; per questo motivo i valori reali sono ben più elevati.

Il dispositivo di figura 35 (Terquem), permette, in linea di principio, la misura di  $\tau$ . Una lamina liquida verticale viene formata tra due asticelle orizzontali, di lunghezza  $a$  e due fili  $AC$  e  $BD$  di lunghezza  $l$ ; i fili all'equilibrio assumono la forma di archi di circonferenza di raggio  $R$ . L'asticella  $CD$ , di peso  $mg$ , è soggetta alla forza di tensione superficiale  $F = 2\tau a$  e alle componenti verticali  $2T \cos \theta$  delle tensioni  $T$  dei fili. Questi sono soggetti a forze normali, dovute alla tensione superficiale, distribuite su ogni elemento  $ds$ ,  $dF_\tau = 2\tau ds$ , ed essendo la tensione  $T$  legata al raggio di curvatura dalla relazione  $T = 2\tau R$ , paragrafo 8-VII, la condizione di equilibrio è data da

$$2\tau(a + 2R \cos \theta) = mg.$$

Osservando la figura si ha:

$$l = 2R\theta, \quad h = 2R \sin \theta, \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{h}{l}.$$

Quest'ultima relazione, una volta misurata l'altezza  $h$  che assume la lamina, permette di ricavare graficamente  $\theta$ . Ricavando  $R$  e sostituendo nell'equazione di equilibrio, si ottiene il valore di  $\tau$ . Naturalmente, esperienze del genere implicano una lamina persistente costituita, per esempio, da acqua saponata.

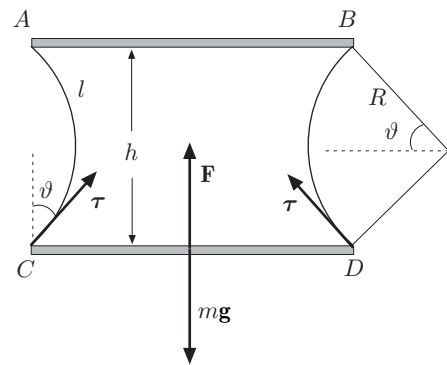


Fig. 16.35

### 10.1. Bolle di sapone

Una lamina liquida formata da una bolla di sapone, è in equilibrio sotto l'azione di forze causate dalla tensione superficiale, che tendono a contrarre la bolla e di forze di pressione che vengono esercitate sulle due superfici, interna ed esterna. Pertanto, per l'equilibrio, occorre che la pressione interna  $p$  sia maggiore di quella esterna,  $p_0$ . Per determinare la differenza di pressione  $p - p_0$ , si può applicare il principio dei lavori virtuali. In uno spostamento virtuale il raggio della bolla passa da  $R$  a  $R + \delta R$ ; la superficie totale,  $S = 8\pi R^2$ , aumenta di  $\delta S = 16\pi R \delta R$  ed il

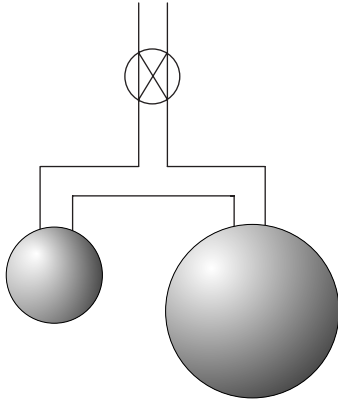


Fig. 16.36

volume,  $4\pi R^3/3$ , aumenta di  $\delta V = 4\pi R^2\delta R$ . Il lavoro della tensione superficiale è

$$\delta\mathcal{L}_1 = -\tau\delta S = -16\pi R\tau\delta R,$$

quello delle forze di pressione:

$$\delta\mathcal{L}_2 = (p - p_0)\delta V = 4\pi R^2(p - p_0)\delta R.$$

Poiché dev'essere

$$\delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 = 0,$$

segue:

$$p - p_0 = 4\frac{\tau}{R}. \tag{3}$$

La differenza di pressione tra l'interno e l'esterno della bolla è inversamente proporzionale al raggio. Se, per esempio, due bolle di sapone di raggio differente vengono soffiate agli estremi del tubo di figura 36, chiuso il rubinetto, si osserva che la bolla più piccola viene assorbita da quella più grande.

### 10.2. Formula di Laplace

Nell'intorno di un punto  $P$  della superficie libera di un liquido, di tensione superficiale  $\tau$ , si consideri un elemento d'area  $MNPQ$ ,

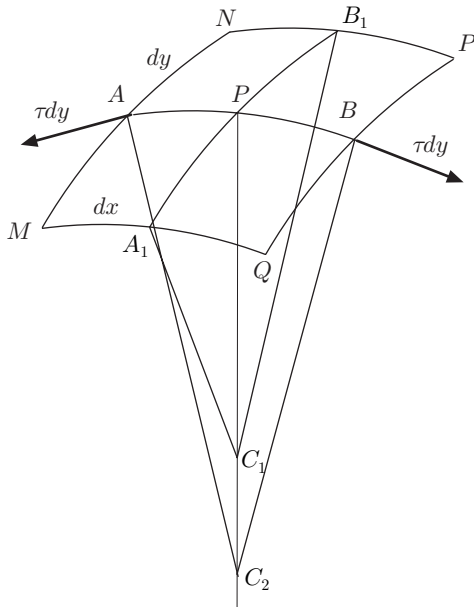


Fig. 16.37

di lati  $dx$  e  $dy$ , figura 37. Siano  $AB$  e  $A_1B_1$  due archi elementari dell'elemento, appartenenti alle circonferenze osculatrici principali in  $P$ , di raggi  $R_1$  e  $R_2$ . L'elemento  $MNPQ$ , di peso trascurabile, è in equilibrio sotto l'azione delle forze di pressione derivanti dalla differenza  $p - p_0$ , che viene esercitata sulle due facce e l'azione delle forze di contatto con gli elementi contigui. Le forze di contatto sul lato  $MN$  ammettono una risultante  $\tau dy$ , applicata nel punto di mezzo  $A$ , tangente in questo punto all'elemento di curva  $AB$ . La stessa risultante è applicata nel punto di mezzo  $B$  di  $PQ$ . Tali risultanti agiscono come se fossero applicate a un elemento di filo  $AB$ , soggetto a una tensione di modulo  $dT = \tau dy$ , pertanto, paragrafo 8-VII, ammettono una forza normale, volta verso il centro di curvatura, espressa da

$$dF_n dx = \frac{dT}{R_1} dx = \frac{\tau}{R_1} dy dx.$$

Analogo ragionamento vale per le tensioni agenti sull'elemento d'arco  $A_1B_1$ ; si ha

$$dF_n dy = \frac{dT}{R_2} dy = \frac{\tau}{R_2} dx dy.$$

Imponendo l'equilibrio di queste forze e delle forze di pressione, si ha

$$(p - p_0)dxdy = \tau \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dxdy,$$

da cui si ottiene la formula di Laplace:

$$(p - p_0) = \tau \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (32)$$

Se la superficie è sferica,  $R_1 = R_2$ , le curvature principali sono uguali, perciò  $p - p_0 = 2\tau/R$ . Si deve osservare che, nel caso di una bolla, questa differenza di pressione è quella che si ha tra il punto  $C$  dell'atmosfera interna alla bolla e il punto  $B$  della parte liquida, figura 38. La differenza di pressione tra i punti  $C$  ed  $A$  è doppia,  $4\tau/R$ , come si è trovato prima. In generale, la differenza di pressione tra le facce di una lamina sottile è

$$p - p_0 = 2\tau \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Se le due facce sono alla stessa pressione, si ha

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0;$$

le curvature sono opposte. Ciò è verificato, ad esempio, in una lamina adagiata ai bordi di due circonferenze coassiali, che assume la forma di una superficie di rotazione attorno all'asse, figura 39.

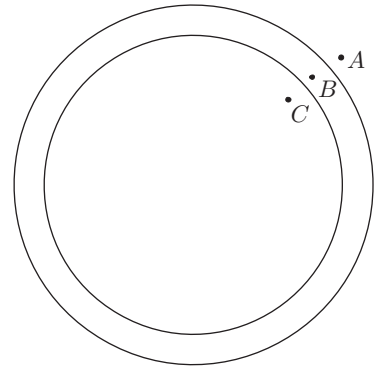


Fig. 16.38

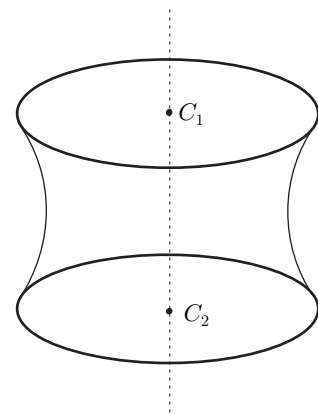


Fig. 16.39

|| 10.3. Linee di contatto

Come s'è detto, una linea di contatto è costituita dai punti comuni a tre fasi; esaminiamo alcuni casi:

GOCCIA NON MISCIBILE SU LIQUIDO

La linea di contatto della goccia è comune alle fasi, aeriforme a), liquida b) e liquida c), figura 40. Su ogni elemento  $dl$  della linea sono applicate tre forze:

$$d\mathbf{F}_{ab} = \tau_{ab}dl, \quad d\mathbf{F}_{ac} = \tau_{ac}dl, \quad d\mathbf{F}_{bc} = \tau_{bc}dl.$$

Per l'equilibrio:

$$d\mathbf{F}_{ab} + d\mathbf{F}_{ac} + d\mathbf{F}_{bc} = 0,$$

dunque:

$$\tau_{ab} + \tau_{ac} + \tau_{bc} = 0.$$

Se il liquido è l'acqua,  $\tau_{ac}$  è, di solito, molto elevata rispetto ai liquidi che su di essa possono galleggiare; grassi, idrocarburi ecc; la goccia tende ad allargarsi, fino a formare strati molto sottili, il cui spessore può raggiungere addirittura quello molecolare.

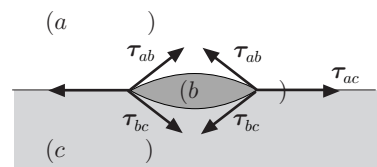


Fig. 16.40

LIQUIDO IN CONTATTO CON UNA PARETE SOLIDA

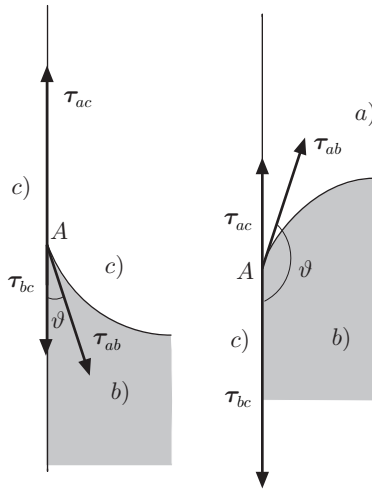


Fig. 16.41

La linea di contatto, come prima, è quella comune alle tre fasi, aeriforme a), liquida b) e solida c). Si consideri un liquido pesante a contatto con una parete verticale; la sezione verticale del liquido ha una delle due forme mostrate in figura 41, secondo che il liquido bagni o meno la parete. Questa configurazione può essere spiegata attribuendo una tensione superficiale al contatto solido aeriforme. Nel punto di contatto A, appartenente ad un elemento della linea di contatto, sono presenti tre tensioni superficiali,  $\tau_{ab}$ ,  $\tau_{ac}$  e  $\tau_{bc}$ . Per l'equilibrio la risultante

$$\mathbf{R} = \tau_{ab} + \tau_{ac} + \tau_{bc},$$

è normale alla parete. Infatti  $\mathbf{R}$  tenderebbe a staccare A dalla parete che, per il vincolo imposto, è escluso. Proiettando sulla parete, si ha

$$\tau_{ac} = \tau_{bc} + \tau_{ab} \cos \theta,$$

essendo  $\theta$  l'angolo di raccordo tra la parete e il liquido. Il  $\cos \theta$  risulta positivo o negativo se  $\theta < \pi/2$  oppure  $\theta > \pi/2$ . Nel primo caso il liquido bagna la parete, nel secondo, come il mercurio, il liquido non la bagna; solo se  $\theta = 0$  il liquido bagna perfettamente la parete.

SOLIDO A CONTATTO CON DUE LIQUIDI

In figura 41, l'aeriforme sia sostituito da un liquido a) non miscibile con b); poiché di solito è  $\theta \neq \pi/2$ , si verifica che a) bagna o meno la parete se  $\theta > \pi/2$ , oppure  $\theta < \pi/2$ ; il contrario per il liquido b).

Il caso è molto interessante se, invece di considerare la parete, il solido, sotto forma di polvere, viene mescolato con una emulsione dei due liquidi. Le particelle solide che aderiscono a uno dei liquidi, cioè sono bagnate da questo, possono essere facilmente separate. È questo, in linea di principio, il metodo della *flottazione*, che serve a separare, in una prima fase, i minerali utili dagli altri prodotti dell'estrazione. Per esempio, certi solfuri metallici sono misti a composti di quarzo. Ridotto in polvere il minerale, si mescola con una emulsione di acqua e olio. I composti di quarzo, "idrofili" sono imprigionati dall'acqua e affondano, mentre i solfuri, insieme all'olio, galleggiano.

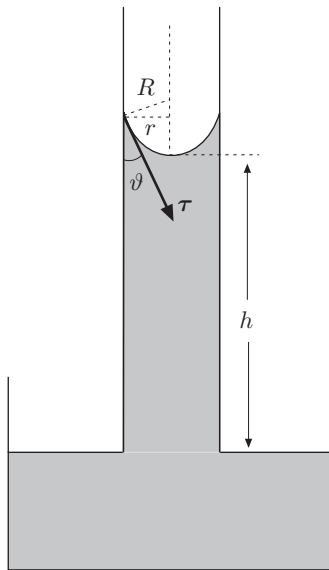


Fig. 16.42

|| 10.4. Capillarità

Immergendo un tubo di vetro capillare, di diametro interno ordinariamente inferiore al millimetro, in una vaschetta contenente un liquido che "bagna" il vetro, si osserva che il livello del liquido nel capillare è più alto di quello della vaschetta, figura 42. La tensione superficiale dà luogo ad una pressione che spinge

verso l'alto il liquido, finché non viene equilibrata dalla pressione idrostatica della colonna  $h$  di liquido. Data l'esiguità del raggio  $r$  del capillare, possiamo supporre che il menisco che si forma sia una calotta sferica ed assumere, con buona approssimazione, come altezza  $h$  della colonna liquida, la distanza tra il punto più basso di questo e la superficie libera nella vaschetta.

Detto  $r$  il raggio del capillare,  $\theta$  l'angolo di raccordo con la parete, il raggio  $R$  del menisco risulta

$$R = \frac{r}{\cos \theta}.$$

Quindi, per la formula di Laplace, essendo  $R_1 = R_2 = R$ , si ha:

$$p = 2\tau \frac{\cos \theta}{r}.$$

Questa pressione equilibra la pressione idrostatica  $\rho gh$ , pertanto:

$$\rho gh = 2\tau \frac{\cos \theta}{r}, \quad \Rightarrow \quad h = 2\tau \frac{\cos \theta}{\rho gr}. \quad (33)$$

*L'altezza della colonna di un liquido, di tensione superficiale  $\tau$ , che ascende in un capillare è inversamente proporzionale al suo raggio; (legge di Jurin).*

Nella (33) si è trascurata la pressione che la colonna d'aria, di altezza  $h$ , esercita in aggiunta alla pressione dovuta alla tensione superficiale. Pertanto, detta  $\rho_A$  la densità dell'aria e  $\rho_L$  quella del liquido, la (33) andrebbe scritta:

$$\rho_L gh - \rho_A gh = 2\tau \frac{\cos \theta}{r}.$$

Ma il termine correttivo al primo membro è talmente piccolo che può essere quasi sempre trascurato. Analogo ragionamento vale per un liquido, come il mercurio, che non bagna la parete. In questo caso nel capillare si ha un abbassamento della colonna di liquido, figura 43; si ottiene una espressione identica alla (33). Da questa formula si può ricavare il valore di  $\tau$  con una precisione migliore dell'1%.

Va osservato che la (33) è stata stabilita nell'ipotesi che  $h$  sia molto maggiore del diametro del tubo, in modo che la forma del menisco possa essere assimilata ad una calotta sferica. Se il diametro del tubo supera il centimetro, il menisco presenta una parte centrale quasi orizzontale, figura 44, di curvatura assai piccola,  $R$  molto grande, perciò la pressione  $2\tau/R$  in questa parte è molto piccola, inferiore a 1/100 di mm di mercurio. Tuttavia, in corrispondenza alla parete è presente una depressione o un innalzamento del liquido. La determinazione analitica della forma di tali superfici, come quella di una grossa goccia soggetta alla gravità va effettuata applicando la formula di Laplace.

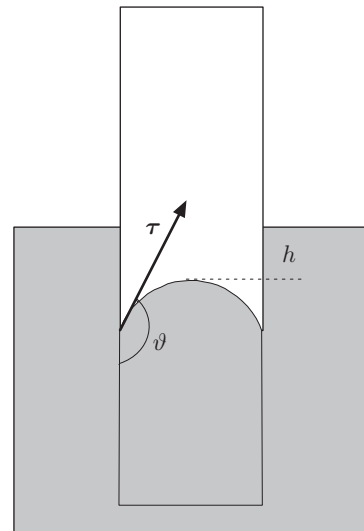


Fig. 16.43



Fig. 16.44

### 10.5. Contagocce

In un buon contagocce l'estremo è costituito da un tubo capillare a pareti spesse, in modo che le gocce si formino sul contorno ben preciso della sua sezione circolare  $AA'$ , figura 45. Premendo sul cappuccio di gomma, la goccia si ingrandisce assumendo le forme mostrate in figura, finché non cade, staccandosi in corrispondenza alla strozzatura  $BB'$ . La superficie della goccia in una configurazione di equilibrio, è di rotazione attorno all'asse del contagocce, asse  $z$  discendente del riferimento. In figura 46 è mostrata una sezione meridiana della goccia.

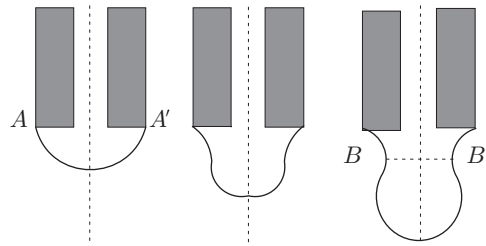


Fig. 16.45

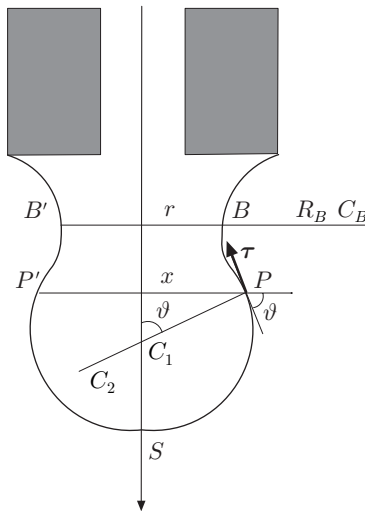


Fig. 16.46

Consideriamo la sezione trasversale  $PP'$ ; la massa di liquido al di sotto di questa sezione è in equilibrio sotto l'azione del suo peso e delle forze di contatto esercitate sulla sezione stessa; queste ultime comprendono le forze di tensione superficiale  $\tau dl$ , agenti sugli elementi della circonferenza di contorno, di raggio  $x$ , che ammettono una risultante verticale  $2\pi\tau x \sin \theta$ , e le forze di pressione  $(p_0 + p)\pi x^2$ , agenti sulla sezione. Il termine  $p_0\pi x^2$ , dovuto alla pressione atmosferica, è equilibrato dalle stesse forze agenti sulla superficie  $PSP'$ . Il termine  $p\pi x^2$  si riferisce alla pressione interna. Tenendo presente la (32), per l'equilibrio della massa si ha:

$$mg = 2\pi\tau x \sin \theta - \pi x^2\tau \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Poiché la superficie della goccia è di rotazione attorno all'asse  $z$ , dalla figura si osserva che uno dei centri principali di curvatura, che chiamiamo  $C_1$ , si trova su tale asse e il corrispondente raggio di curvatura è  $R_1 = x/\sin \theta$ ; perciò la precedente si scrive:

$$mg = 2\pi\tau x \sin \theta - \pi x^2\tau \left( \frac{\sin \theta}{x} + \frac{1}{R_2} \right) = \pi\tau x \left( \sin \theta - \frac{x}{R_2} \right).$$

In particolare, in corrispondenza alla strozzatura, si ha

$$mg = \pi\tau r \left( 1 + \frac{r}{R_B} \right), \quad (34)$$

dove  $r$  è il raggio della sezione ed  $R_B$  il raggio di curvatura in  $B$ , negativo, perché ivi la superficie presenta una concavità. La (34)

dà la massa della goccia che cade; il termine  $r/R_B$  dipende dalla natura del liquido, tuttavia poiché  $R_B$  è sempre molto grande rispetto ad  $r$ , è trascurabile; pertanto si può scrivere

$$mg \approx \pi\tau r.$$

Essendo inoltre  $r$  circa uguale al raggio esterno  $a$  del capillare, si ottiene la formula approssimata:

$$mg = \pi\tau a. \quad (35)$$

*Il peso della goccia che cade è proporzionale alla tensione superficiale e al raggio esterno del capillare (legge di Tate).*

La tensione superficiale di un liquido, rispetto ad un altro di riferimento, può essere rapidamente determinata contando il numero di gocce  $N_1$  e  $N_2$ , prodotte dallo stesso volume  $V$  dei due liquidi. Infatti, poiché  $m_1 = V/N_1$  e  $m_2 = V/N_2$ ; sostituendo nella (35) si ottiene

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}.$$