

# 14. Dinamica dei sistemi rigidi

## 1. Equazioni della dinamica

Le forze che agiscono su un corpo rigido sono la risultante e il momento risultante delle forze esterne; quest'ultimo è somma dei momenti delle singole forze, rispetto ad un polo opportunamente scelto, che può coincidere col centro di massa. Indicando con  $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$  e con  $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i$  risultante e momento risultante, le equazioni cardinali della dinamica dei corpi rigidi si scrivono

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (1)$$

Come s'è dimostrato in dinamica dei sistemi di punti materiali,  $\mathbf{p}$  è la quantità di moto del centro di massa in cui si ritiene localizzata la massa del corpo.

Queste relazioni danno luogo a sei equazioni scalari; pertanto, assegnate le condizioni iniziali, sono sufficienti a individuare il moto del corpo rispetto ad un riferimento "assoluto". Infatti la posizione di un corpo rigido è determinata dalle coordinate di tre punti non allineati, che dovendo soddisfare alle tre relazioni che esprimono l'invarianza delle loro mutue distanze, riducono a sei i gradi di libertà. Peraltro si possono assegnare le coordinate del centro di massa e gli angoli che gli assi di una terna solidale col corpo rigido, con origine nel centro di massa, formano con gli assi della terna fissa.

La prima delle (1) permette di studiare il moto del centro di massa; la seconda il movimento rotatorio del corpo rigido attorno ad un asse istantaneo di rotazione passante per l'origine della terna con esso solidale. L'atto di moto del corpo rigido libero, come si è mostrato in cinematica dei sistemi rigidi, è dunque roto-traslatorio e si può ricondurre in infiniti modi nella forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità del generico punto,  $\mathbf{v}_O$  la velocità dell'origine della terna solidale, e  $\mathbf{r}$  la posizione del punto rispetto a tale terna.

Si osservi che nelle (1) le forze agenti intervengono solo attraverso la risultante e al loro momento risultante; ne segue che il

moto del corpo rigido non subisce alterazioni se a un sistema di forze se ne sostituisce un altro equipollente, avente cioè la stessa risultante e lo stesso momento risultante. Questa operazione, lecita nella statica del corpo rigido, è valida nella dinamica di tale corpo. Per esempio, si potrà tener conto del peso di un corpo rigido mediante un unico vettore, applicato al centro di massa.

Se la risultante delle forze esterne è diversa da zero e il momento risultante è nullo, il moto del corpo rigido è governato dalla prima delle (1); tutti i punti del corpo traslano con accelerazione e velocità, ad ogni istante, uguali. Il moto del corpo rigido dunque può essere rappresentato dal moto del suo centro di massa.

### || 1.1. Corpo rigido vincolato

Un corpo rigido è vincolato se, oltre al vincolo della rigidità, sono imposti ad esso altri vincoli, come quello di avere un punto o un asse fisso, oppure di poggiare su un piano ecc. Per determinare il movimento del corpo, basta aggiungere, nelle (1), alle forze attive le reazioni vincolari. Chiamando con  $\mathbf{R}$  la risultante delle reazioni vincolari e con  $\mathbf{M}_R$  il momento risultante di queste ultime, le equazioni fondamentali si scrivono

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{M} + \mathbf{M}_R = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (2)$$

Come s'è visto in cinematica, i vincoli riducono i gradi di libertà del corpo; pertanto le equazioni scalari atte a determinare il moto sono inferiori a sei. È importante rilevare che, una volta determinato il moto, le (2) permettono di ricavare la risultante e il momento risultante delle reazioni vincolari:

$$\mathbf{R} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \mathbf{F}, \quad \mathbf{M}_R = \frac{d\mathbf{L}}{dt} - \mathbf{M}. \quad (3)$$

Si sottolinea che, durante il moto, le reazioni sono diverse da quelle in condizioni di equilibrio. Questa circostanza è fondamentale in molti problemi tecnici, come ad esempio nella valutazione degli sforzi che vengono esercitati su assi, perni ecc. che collegano una parte fissa di una macchina ad altre parti mobili.

### || 1.2. Rotazione attorno ad un asse fisso

Un corpo rigido ruotante attorno ad un asse ha un solo grado di libertà; l'angolo  $\varphi$  di rotazione è sufficiente a individuare la posizione di ogni suo punto.

Supponiamo che il corpo sia solidale con un asse che possa ruotare per mezzo di due supporti  $A$  e  $B$  fissi, che esplicano le reazioni vincolari  $\mathbf{R}_A$ ,  $\mathbf{R}_B$ . Nelle (1), oltre alla risultante  $\mathbf{F}$  delle forze attive, si deve tenere conto di tali reazioni, perciò si ha

$$\mathbf{F} + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{M} + \mathbf{r}_A \times \mathbf{R}_A + \mathbf{r}_B \times \mathbf{R}_B = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (4)$$

dove i momenti delle reazioni vincolari vanno valutati rispetto ad un punto dell'asse di rotazione. Le reazioni sono a priori incognite; per la loro determinazione torneremo nel seguito.

Proiettando la seconda delle (4) sull'asse, si ottiene

$$M_a = \frac{dL_a}{dt}, \quad (5)$$

che è una equazione scalare atta a determinare il movimento rotatorio.  $M_a$ ,  $L_a$  sono rispettivamente il momento assiale risultante e la componente del momento angolare secondo l'asse; i momenti delle reazioni vincolari hanno proiezione nulla.

La componente assiale del momento angolare ha una espressione particolarmente semplice. Consideriamo un elemento del corpo rigido di massa  $dm$ , distante  $r$  dall'asse, figura 1. Se  $v = \omega r$  è la velocità dell'elemento, il momento angolare elementare è

$$dL_a = rv \, dm = r^2 \omega \, dm;$$

pertanto per l'intero corpo si ha

$$L_a = \omega \int_m r^2 dm, \quad L_a = I\omega,$$

dove l'espressione

$$I = \int_m r^2 dm, \quad (6)$$

definisce il *momento di inerzia* del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione. Il momento di inerzia è una grandezza caratteristica del corpo; esso dipende dalla sua forma e dall'asse rispetto al quale viene determinato. Per definizione, è una grandezza estensiva e si misura in  $kg \cdot m^2$ . La (5) si può scrivere

$$M_a = I_a \frac{d\omega}{dt}, \quad (7)$$

dove  $d\omega/dt$  è l'accelerazione angolare. Si colga l'analogia formale con la prima delle (1); in quest'ultima sono presenti la risultante delle forze esterne, la massa del corpo e l'accelerazione del centro di massa; nella (7) il momento assiale, il momento d'inerzia e l'accelerazione angolare.

### 1.3. Teorema dell'energia cinetica

Essendo l'asse di rotazione fisso, i punti di applicazione delle reazioni vincolari sono fissi e non compiono lavoro; dette  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$  le forze attive che agiscono sul corpo, il lavoro elementare di tali forze è

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i dt \\ &= \left( \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \right) \cdot \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} dt, \end{aligned}$$

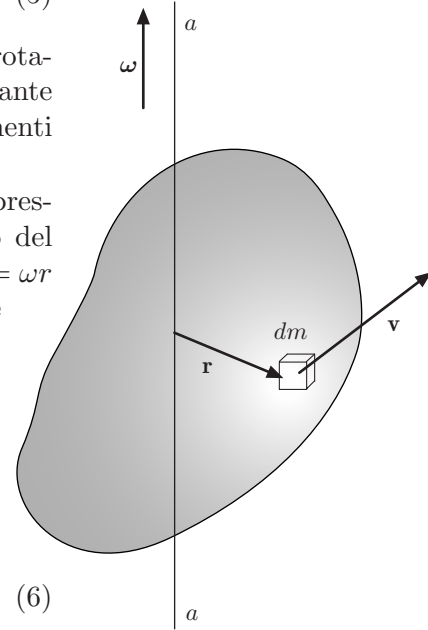


Fig. 14.1

dove  $\mathbf{M}$  è il momento risultante.

Nel caso del corpo rigido ruotante attorno ad un asse fisso, la velocità angolare è diretta lungo l'asse di rotazione, perciò il lavoro elementare risulta

$$d\mathcal{L} = M_a \omega dt = M_a d\varphi.$$

La potenza è

$$W = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = M_a \omega.$$

Il lavoro elementare è uguale alla corrispondente variazione dell'energia cinetica, pertanto:

$$d\mathcal{L} = M_a d\varphi = dT.$$

L'espressione dell'energia cinetica è una diretta conseguenza della (7); infatti, introducendo la variabile  $\varphi$ , si può scrivere:

$$M_a = I_a \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}, \quad \Rightarrow \quad M_a d\varphi = I_a \omega d\omega.$$

Integrando tra gli angoli di rotazione iniziale e finale, si ha

$$\mathcal{L} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_a d\varphi = \frac{1}{2} I_a \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_a \omega_1^2. \quad (8)$$

Definiamo energia cinetica del corpo rigido ruotante attorno all'asse fisso la quantità:

$$T = \frac{1}{2} I_a \omega^2.$$

Dunque il lavoro delle forze è uguale alla variazione dell'energia cinetica di rotazione del corpo. Si noti l'analogia formale con l'espressione dell'energia cinetica del punto materiale. Se le forze attive sono conservative, detta  $U$  l'energia potenziale, si ha

$$T + U = E = \text{cost},$$

che si può scrivere:

$$\frac{1}{2} I_a \omega^2 + U(\varphi) = E = \text{cost}. \quad (9)$$

Questa relazione costituisce l'integrale dell'energia e spesso può vantaggiosamente sostituire la (7) per il calcolo del movimento.

## ||| 2. Calcolo di momenti di inerzia

Il calcolo dei momenti d'inerzia di un corpo rigido, analogamente a quello del centro di massa, può essere eseguito facilmente sfruttando le simmetrie che il corpo eventualmente presenta e tenendo presente la proprietà additiva di cui esso gode.

Il momento d'inerzia di una massa puntiforme, rispetto ad un asse, è

$$I = mr^2,$$

dove  $r$  è la distanza della massa dall'asse. Il momento di inerzia di un sistema di punti materiali rispetto a un asse, è dato da

$$I = \sum_i m_i r_i^2.$$

Il momento di inerzia di un corpo di massa  $m$  rispetto a un asse, può essere espresso dalla relazione

$$I = mK^2,$$

dove  $K$  si chiama raggio giratore del corpo. Ciò significa che il corpo può essere assimilato a una massa puntiforme posta alla distanza  $K$  dall'asse.

È particolarmente utile, nel calcolo dei momenti di inerzia, il seguente teorema di Huygens.

*Il momento di inerzia di un corpo rispetto ad un asse, è uguale al momento di inerzia del corpo rispetto ad un asse passante per il centro di massa, parallelo al primo, più il prodotto della massa del corpo per il quadrato della distanza tra i due assi.*

Questo teorema viene chiamato anche teorema degli assi paralleli. Fissiamo una terna ortogonale con asse  $z$  passante per il centro di massa del corpo e un asse  $z'$  parallelo, di coordinate  $x = a$ ,  $y = b$ , la cui distanza da  $z$  è  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ , figura 2. Supponendo che il corpo sia omogeneo e abbia densità  $\rho$ , il momento di inerzia rispetto all'asse  $z$  è

$$I_C = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV;$$

il momento d'inerzia rispetto all'asse  $z'$  risulta:

$$\begin{aligned} I &= \rho \int_V [(x - a)^2 + (y - b)^2] dV = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV \\ &+ (a^2 + b^2) \rho \int_V dV - 2a\rho \int_V x dV - 2b\rho \int_V y dV. \end{aligned}$$

Il primo termine al secondo membro è uguale a  $I_C$ , il secondo termine è uguale alla massa del corpo per il quadrato della distanza degli assi, il terzo ed il quarto termine sono nulli. Infatti, per la definizione di centro di massa, le quantità

$$\int_V x dV, \quad \int_V y dV,$$

sono uguali al prodotto della massa del corpo e delle coordinate  $x_C$ ,  $y_C$  del centro di massa, che, per ipotesi, sono nulle. Dunque si ha

$$I = I_C + md^2. \quad (10)$$

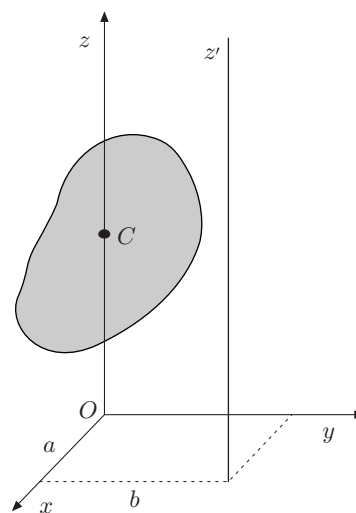


Fig. 14.2

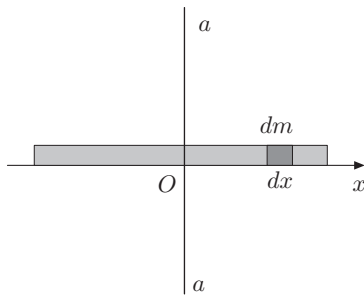


Fig. 14.3

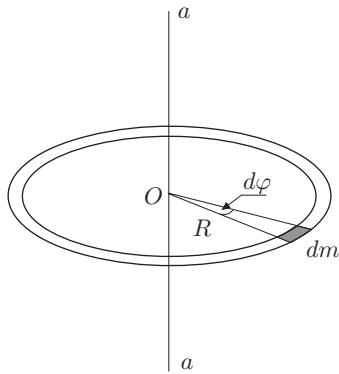


Fig. 14.4

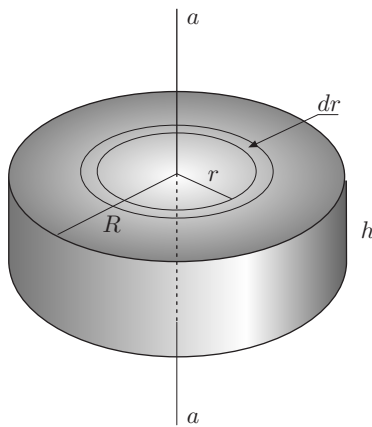


Fig. 14.5

Si noti che il risultato è indipendente dalla terna di riferimento adottata. Ecco alcuni esempi.

**MOMENTO D'INERZIA DI UNA SBARRA OMOGENEA DI SEZIONE COSTANTE RISPETTO AD UN ASSE ORTOGONALE, PASSANTE PER IL CENTRO DI MASSA**

Indichiamo con  $L$  la lunghezza della sbarra e fissiamo come origine delle coordinate il suo centro di massa. Poiché la sbarra è omogenea ed ha sezione costante, detta  $\lambda$  la sua densità lineica, la massa di un elemento di lunghezza  $dx$  posto a distanza  $x$  dall'origine è  $dm = \lambda dx$ , figura 3. Il momento d'inerzia di tale elemento rispetto all'asse assegnato è  $dI = \lambda x^2 dx$ . Sfruttando la proprietà additiva del momento d'inerzia, possiamo scrivere

$$I = 2\lambda \int_0^{L/2} x^2 dx = \lambda \frac{L^3}{12}.$$

Poiché la massa della sbarra è  $m = \lambda L$ , si ottiene

$$I = m \frac{L^2}{12}. \quad (11)$$

**MOMENTO D'INERZIA DI UN ANELLO OMOGENEO DI SEZIONE COSTANTE RISPETTO AL SUO ASSE**

Come nel caso precedente, detta  $\lambda$  la densità lineica dell'anello e indicando con  $R$  il suo raggio, la massa di un elemento di lunghezza  $dl$  è  $dm = \lambda dl = \lambda R d\varphi$ , figura 4. Il momento d'inerzia elementare è

$$dI = R^2 dm = \lambda R^3 d\varphi;$$

integrando, si ottiene

$$I = \lambda R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \lambda R^3 = m R^2, \quad (12)$$

essendo  $m = 2\pi \lambda R$  la massa dell'anello.

**MOMENTO D'INERZIA DI UN DISCO OMOGENEO, O DI UN CILINDRO, RISPETTO AL SUO ASSE**

Sia  $R$  il raggio del disco ed  $h$  l'altezza; dividiamo il disco in anelli elementari concentrici di raggio  $r$  e spessore  $dr$ , figura 5. Se  $dV = 2\pi h r dr$  è il volume di un anello elementare, detta  $\rho$  la densità del disco, la sua massa è  $dm = 2\pi \rho h r dr$ . Il momento d'inerzia elementare risulta

$$dI = 2\pi \rho h r^3 dr,$$

e il momento d'inerzia totale:

$$I = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2. \quad (13)$$

essendo  $m = \pi \rho R^2 h$  la massa del disco.

### MOMENTO D'INERZIA DI UNA SFERA OMOGENEA RISPETTO AD UN ASSE PASSANTE PER IL CENTRO

Suddividiamo la sfera in dischi di spessore  $dz$  normali all'asse che indichiamo  $z$ , figura 6. Il momento d'inerzia elementare del generico disco è

$$dI = \frac{1}{2}r^2 dm,$$

dove  $r$  è il raggio del disco e  $dm = \rho\pi r^2 dz$  la sua massa, dunque

$$dI = \frac{1}{2}\rho\pi r^4 dz.$$

Se  $R$  è il raggio della sfera, si ha  $r^2 + z^2 = R^2$ ; pertanto

$$r^4 = R^4 - 2R^2 z^2 + z^4.$$

Il momento d'inerzia elementare risulta

$$dI = \frac{1}{2}\rho\pi(R^4 - 2R^2 z^2 + z^4)dz;$$

integrando tra i limiti  $-R, +R$ , si ottiene

$$I = \int_{-R}^{+R} dI = \frac{1}{2}\rho\pi \left[ R^4 z - \frac{2}{3}R^2 z^3 + \frac{1}{5}z^5 \right]_{-R}^{+R} = \frac{8}{15}\rho\pi R^5.$$

Ma la massa della sfera è

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho R^3,$$

pertanto si ottiene

$$I = \frac{2}{5}mR^2. \quad (14)$$

Gli esempi riportati indicano possibili metodi per il calcolo dei momenti di inerzia. Il teorema di Huygens inoltre permette di determinare il momento di inerzia rispetto ad un qualunque asse parallelo ad un asse passante per il centro di massa. Le considerazioni che seguono vengono svolte in dettaglio in Meccanica Razionale; tuttavia, per comprendere le straordinarie proprietà dei corpi rigidi in rotazione, è opportuno esporre alcuni concetti essenziali.

### III 3. Momento d'inerzia di un corpo omogeneo rispetto ad assi concorrenti in un punto prefissato

Fissiamo un punto  $O$ , origine di una terna cartesiana ortogonale solidale col corpo rigido, ed un generico asse di versore  $\hat{\mathbf{u}}$  passante per esso. Detta  $d = |\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{u}}|$  la distanza da tale asse dell'elemento generico del corpo, di massa  $dm = \rho dV$ , figura 7, il momento di inerzia è espresso da

$$I = \rho \int_V |\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{u}}|^2 dV.$$

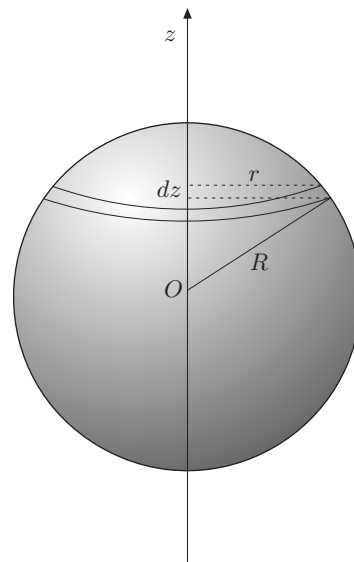


Fig. 14.6

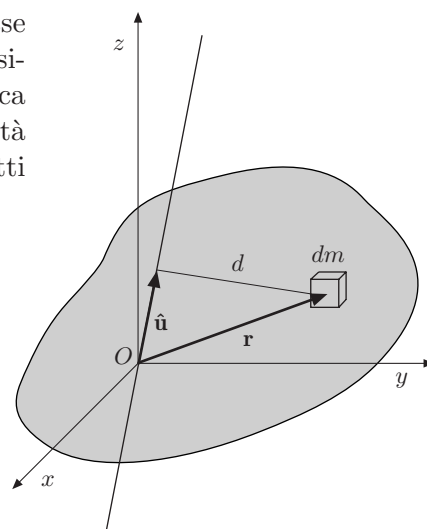


Fig. 14.7

Indicando, per brevità, con  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  i coseni direttori dell'asse, componenti secondo gli assi della terna del versore  $\hat{\mathbf{u}}$ , si ha

$$\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{u}}|^2 &= (y\gamma - z\beta)^2 + (z\alpha - x\gamma)^2 + (x\beta - y\alpha)^2 \\ &= \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(x^2 + z^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) \\ &\quad - 2\alpha\beta xy - 2\alpha\gamma xz - 2\beta\gamma yz. \end{aligned}$$

Il momento d'inerzia risulta

$$\begin{aligned} I &= \alpha^2 \rho \int_V (y^2 + z^2) dV + \beta^2 \rho \int_V (x^2 + z^2) dV + \gamma^2 \rho \int_V (x^2 + y^2) dV \\ &\quad - 2\alpha\beta \rho \int_V xy dV - 2\alpha\gamma \rho \int_V xz dV - 2\beta\gamma \rho \int_V yz dV. \end{aligned}$$

che scriviamo

$$I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{xz}\alpha\gamma + 2I_{yz}\beta\gamma. \quad (15)$$

Nella relazione precedente si è indicato con

$$I_{xx} = \rho \int_V (y^2 + z^2) dV, \quad I_{yy} = \rho \int_V (x^2 + z^2) dV, \quad I_{zz} = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV,$$

i momenti d'inerzia rispetto agli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e con

$$I_{xy} = -\rho \int_V xy dV, \quad I_{xz} = -\rho \int_V xz dV, \quad I_{yz} = -\rho \int_V yz dV,$$

i *prodotti d'inerzia*.

Consideriamo l'ellissoide con centro nell'origine  $O$  della terna, di equazione

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 + 2I_{xy}xy + 2I_{xz}xz + 2I_{yz}yz = 1. \quad (16)$$

Questo ellissoide si chiama ellissoide d'inerzia e gode della seguente proprietà. Un punto  $P$  dell'ellissoide, individuato dal vettore  $(P - O)$ , ha coordinate

$$x = \alpha|P - O|, \quad y = \beta|P - O|, \quad z = \gamma|P - O|;$$

sostituendo questi valori nella (16), si ottiene

$$\frac{1}{(P - O)^2} = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{xz}\alpha\gamma + 2I_{yz}\beta\gamma.$$

Confrontando con la (15), si ha

$$I = \frac{1}{(P - O)^2}.$$

Questa equazione, noto l'ellissoide d'inerzia ed il punto  $P$  intersecato dall'asse passante per  $O$ , permette di ricavare il momento d'inerzia del corpo rispetto a quell'asse.

Se gli assi della terna, coincidono con gli assi dell'ellissoide, come noto dalla Geometria, risultano nulli i prodotti d'inerzia. Tali assi, tra loro ortogonali, si chiamano *assi principali d'inerzia*; i momenti d'inerzia rispetto a questi assi, *momenti principali d'inerzia*. In tal caso l'equazione dell'ellissoide diventa

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 = 1, \quad (17)$$

e la (15):

$$I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 = 1, \quad (18)$$



La ricerca degli assi principali d'inerzia si effettua diagonalizzando la matrice dei coefficienti dell'ellissoide d'inerzia. Si osservi che se esistono assi di simmetria materiale del corpo, tali assi sono principali d'inerzia. In particolare può esistere una *terna di assi di simmetria materiale*, che, se il corpo è omogeneo, è una terna di simmetria geometrica; allora tale terna ha origine nel centro di massa; i momenti principali d'inerzia si dicono *momenti baricentrali d'inerzia*. Per esempio, gli assi di simmetria di un parallelepipedo rettangolo, di un cilindro rotondo, omogenei, costituiscono assi principali e baricentrali di inerzia. Si capisce subito che riferendoci agli assi di simmetria, e scambiando  $y$  in  $-y$ , oppure  $x$  in  $-x$ , che sono coordinate di elementi simmetrici, i prodotti d'inerzia sono nulli.

**Complementi** .....

- III 1. *Assi principali di una quadrica.*  
 Assegnata la quadrica

$$x^2 + 6xy - 2y^2 - 2yz + z^2 = 24;$$

sotto forma di matrice, si ha

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 24.$$

Gli autovalori di questa matrice sono dati da

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 13\lambda - 12 \\ = -(\lambda-1)(\lambda+4)(\lambda+3).$$

Quindi:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -4, \quad \lambda_3 = 3.$$

La quadrica, rispetto agli assi principali, ha equazione:

$$(X \ Y \ Z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 24,$$

ossia:

$$X^2 - 4Y^2 + 3Z^2 = 24.$$

Se si vogliono trovare le relazioni tra i due riferimenti  $x, y, z, X, Y, Z$ , occorre trovare la matrice  $C$ , esempio 9-X, le cui colonne sono costituite dalle componenti degli autovettori unitari.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

Ponendo nell'equazione precedente,  $\lambda_1 = 1$ , poi  $\lambda_2 = -4$  e infine  $\lambda_3 = 3$ , come nell'esempio citato, le componenti degli autovettori unitari risultano:

$$\frac{1}{\sqrt{10}}, \quad 0, \quad \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad -\frac{3}{\sqrt{35}}, \quad \frac{5}{\sqrt{35}}, \quad \frac{1}{\sqrt{35}}, \quad \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Dunque la matrice rotazione risulta:

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{35} & 3/\sqrt{14} \\ 0 & 5/\sqrt{35} & 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{35} & -1/\sqrt{14} \end{pmatrix}.$$

Gli elementi della matrice costituiscono i nove coseni direttori tra gli assi  $X, Y, Z$  e  $x, y, z$ .

I momenti principali d'inerzia godono della seguente proprietà: la loro somma è isotropa rispetto all'origine delle coordinate. Infatti

$$\begin{aligned} I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} &= \rho \int_V [(y^2 + z^2) + (x^2 + z^2) + (x^2 + y^2)] dV \\ &= 2\rho \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dV = 2\rho \int_V r^2 dV. \end{aligned} \quad (19)$$

Questo risultato offre notevoli vantaggi se il corpo presenta particolari simmetrie. Per esempio, nel caso della sfera è  $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ , perciò, indicando con  $I$  il suo momento d'inerzia, si ha

$$3I = 2\rho \int_V r^2 dV, \quad I = \frac{2}{3}\rho \int_V r^2 dV.$$

Suddividendo la sfera in gusci sferici concentrici di spessore  $dr$ , è  $dV = 4\pi r^2 dr$ . Pertanto

$$I = \frac{2}{3}4\pi\rho \int_0^R r^4 dr = \frac{2}{3}4\pi\rho \frac{R^5}{5}.$$

ed essendo

$$\rho = \frac{m}{4\pi R^3/3},$$

dove  $m$  è la massa della sfera, si ottiene

$$I = \frac{2}{5}mR^2,$$

come si è trovato prima.

Per i corpi omogenei e simmetrici, che si estendono nel piano  $x-y$ , dischi, lamine, ecc..., assunti gli assi di simmetria come assi della terna, si ottengono le seguenti relazioni

$$I_{xx} = \sigma \int_S y^2 dx dy, \quad I_{yy} = \sigma \int_S x^2 dx dy, \quad I_{zz} = \sigma \int_S (x^2 + y^2) dx dy,$$

dove  $\sigma$  è la densità areica di massa. Risulta immediatamente

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}. \quad (20)$$

## Esempi

- ||| 2. *Momento d'inerzia di un disco rispetto a un suo diametro.*

Poiché è  $I_{zz} = mR^2/2$ , ed essendo  $I_{xx} = I_{yy}$  per ogni diametro, risulta

$$2I = I_{zz} = \frac{1}{2}mR^2, \quad I = \frac{1}{4}mR^2.$$

- ||| 3. *Momento d'inerzia di un guscio sferico di raggio  $R$ , rispetto a un asse passante per il centro.*

È  $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ . Dalla (19), si ha

$$3I = 2\sigma R^2 \int_S dS = 8\sigma\pi R^4, \quad I = \frac{8}{3}\pi\sigma R^4,$$

ed essendo  $\sigma = m/(4\pi R^2)$ , si ottiene

$$I = \frac{2}{3}mR^2.$$

Da questa espressione si può ricavare ancora il momento d'inerzia della sfera, ritenendola suddivisa in gusci sferici concentrici, ciascuno di momento d'inerzia elementare  $2dmr^2/3$ , e integrando tra 0 e  $R$ . Si lascia al lettore la verifica.

- ||| 4. Determinare i momenti principali di inerzia, i momenti d'inerzia rispetto ai lati e alle diagonali, di una piastra rettangolare omogenea di densità areica  $\sigma$ , lati  $a$  e  $b$ , figura 8.

Fissato un riferimento con origine nel centro di massa e assi  $x$ - $y$  paralleli ai lati, tenendo presente la (20), si ha:

$$I_{xx} = \sigma \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 a \, dy = \sigma a \frac{b^3}{12} = m \frac{b^2}{12}$$

$$I_{yy} = \sigma \int_{-a/2}^{+a/2} x^2 b \, dx = \sigma b \frac{a^3}{12} = m \frac{a^2}{12}$$

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = m \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

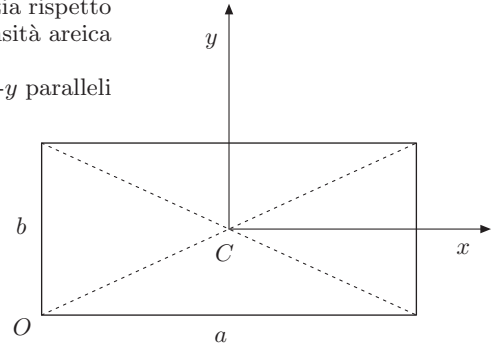


Fig. 14.8

Il momento d'inerzia rispetto alla diagonale di coseni direttori

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \gamma = 0,$$

per la (18), è

$$I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 = \frac{1}{6}m \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Assumiamo ora un riferimento con origine nel vertice  $O$  e assi,  $x$  coincidente col lato  $a$ ,  $y$  con  $b$  e  $z$  ortogonale a questi, i momenti d'inerzia rispetto a tali assi, per il teorema degli assi paralleli, sono:

$$I'_{xx} = I_{xx} + m \frac{b^2}{4} = m \frac{b^2}{3}$$

$$I'_{yy} = I_{yy} + m \frac{a^2}{4} = m \frac{a^2}{3}$$

$$I'_{zz} = I_{zz} + m \frac{a^2 + b^2}{4} = m \frac{a^2 + b^2}{3}.$$

I prodotti d'inerzia risultano

$$I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = 0, \quad I_{yx} = -\sigma \int_0^b y \, dy \int_0^a x \, dx = -m \frac{ab}{4}.$$

Noti questi elementi si può anche scrivere l'equazione dell'ellissoide d'inerzia (16), relativo al vertice  $O$ .

- ||| 5. Determinare i tre momenti principali d'inerzia di una lamina triangolare omogenea isoscele di massa  $m$ , relativi al vertice  $O$  dove concorrono i lati uguali.

Gli assi principali d'inerzia, nel piano della lamina, sono l'asse  $y$  di simmetria, l'asse  $x$  ortogonale a  $y$ , passanti per  $O$  e l'asse  $z$  ortogonale ai precedenti. Indichiamo con  $\sigma$  la densità areica, con  $a$  la lunghezza del lato opposto ad  $O$  e con  $h$  la corrispondente altezza. Per calcolare il momento principale d'inerzia rispetto all'asse  $x$ , suddividiamo il triangolo in tanti elementi paralleli a detto asse, di spessore  $dy$ , figura 9; risulta:

$$I_{xx} = \sigma \int_S y^2 dS = \sigma \int_0^h y^2 x \, dy;$$

ma  $x = ya/h$ , dunque

$$I_{xx} = \sigma \frac{a}{h} \int_0^h y^3 \, dy = \sigma a \frac{h^3}{4} = \frac{1}{2} m h^2.$$

In maniera analoga si procede per il calcolo di  $I_{yy}$ ; suddividiamo il triangolo in elementi paralleli all'asse  $y$  di spessore  $dx$ , figura 9; si ha

$$I_{yy} = \sigma \int_S x^2 dS = 2\sigma \int_0^{a/2} x^2 (h - y) \, dx;$$

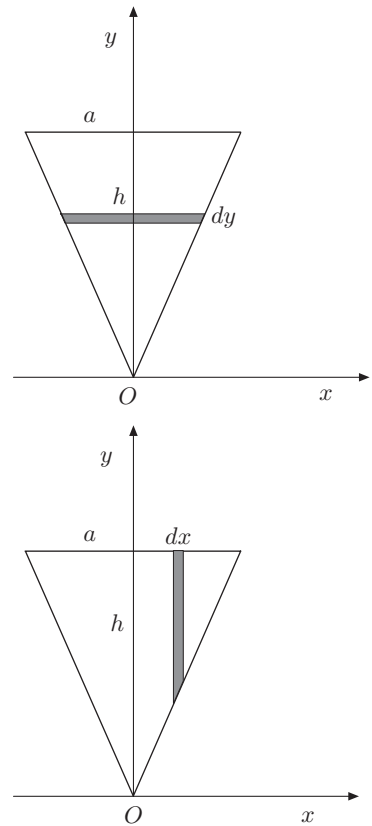


Fig. 14.9

ma  $h - y = h - 2hx/a$ , pertanto:

$$I_{yy} = 2\sigma \int_0^{a/2} \left( hx^2 - 2\frac{h}{a}x^3 \right) dx = \frac{1}{48}\sigma ha^3 = \frac{1}{24}ma^2.$$

Si ha inoltre:

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = m \left( \frac{h^2}{2} + \frac{a^2}{24} \right).$$

Si verifica immediatamente che i prodotti d'inerzia rispetto agli assi  $x$ ,  $y$  sono nulli; dunque gli assi prescelti sono assi principali d'inerzia.

#### 4. Momento angolare di un corpo rigido omogeneo

Determiniamo ora il momento angolare di un corpo rigido omogeneo rispetto ad un asse passante per un polo  $O$ , origine del riferimento con esso solidale. Detta  $\rho$  la densità del corpo ed  $\mathbf{r}$  il vettore che individua la posizione dell'elemento di massa  $dm$ , si ha

$$\mathbf{L} = \rho \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = \rho \int_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dV. \quad (21)$$

Poiché  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , è

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x;$$

dunque

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \omega_y z - \omega_z y & \omega_z x - \omega_x z & \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix}.$$

Tenendo presente la (15), si deducono le componenti del momento angolare. Per la componente  $L_x$  si ottiene

$$\begin{aligned} L_x &= \rho \int_V [(y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z] dV \\ &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z. \end{aligned}$$

Analogamente per le altre.

Complessivamente si ha

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yz}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned} \quad (22)$$

La matrice dei coefficienti del sistema precedente è simmetrica, e si chiama matrice d'inerzia. Gli elementi diagonali sono i momenti principali d'inerzia; quelli non diagonali, i prodotti d'inerzia, definiti nel paragrafo precedente. Il momento angolare del corpo rigido è dunque dato dall'espressione

$$\mathbf{L} = L_x \mathbf{i} + L_y \mathbf{j} + L_z \mathbf{k}. \quad (23)$$

Ebbene, si deduce immediatamente che, in generale, il momento angolare non è parallelo ad  $\boldsymbol{\omega}$ ; a meno che il corpo non ruoti attorno a uno degli assi principali d'inerzia. Per questo motivo, tali assi si chiamano anche *assi spontanei di rotazione*. Per esempio, se un parallelepipedo rettangolo ruota attorno ad un asse di simmetria,  $\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$ ; la rotazione avverrà di preferenza attorno all'asse per il quale  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  oppure  $I_{zz}$  è più elevato. Una sfera ha  $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ ; il momento angolare rispetto a qualunque asse, passante per il centro, è parallelo alla velocità angolare.

### 5. Energia cinetica

L'energia cinetica di rotazione di un corpo rigido omogeneo, attorno ad un asse passante per l'origine  $O$  del riferimento con esso solidale, con la solita notazione, è data da

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV.$$

Essendo

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{pmatrix} \\ &= (\omega_y z - \omega_z y) \mathbf{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \mathbf{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

si ha

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2.$$

Pertanto si ottiene

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I_{xx} \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2 \\ &\quad + I_{xy} \omega_x \omega_y + I_{xz} \omega_x \omega_z + I_{yz} \omega_y \omega_z. \end{aligned} \quad (24)$$

Con considerazioni analoghe a quelle fatte per il momento angolare, si deduce che, se gli assi del riferimento coincidono con gli assi principali d'inerzia, i prodotti d'inerzia sono nulli. Inoltre se il corpo ruota attorno ad uno di tali assi, sopravvive un solo termine della (24).

In generale, l'energia cinetica di rotazione si può scrivere

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}. \quad (25)$$

Per un corpo rigido libero, l'atto di moto è rototraslatorio; se assumiamo il centro di massa come origine del riferimento solidale col corpo, e gli assi di tale riferimento coincidenti con gli assi principali d'inerzia, l'energia cinetica, per il teorema di König, è

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2). \quad (26)$$

Inoltre, detta  $\mathbf{F}$  la risultante delle forze e  $\mathbf{M}_C$  il momento risultante, rispetto al centro di massa, la potenza è data da

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}_C \cdot \boldsymbol{\omega}. \tag{27}$$

Se il moto del corpo rigido è piano, la velocità angolare è sempre ortogonale al piano direttore; allora detto  $I_C$  il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa e ortogonale al piano direttore, la (26) diventa

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2. \tag{28}$$

È importante osservare che, mentre per un sistema generico il teorema dell'energia cinetica è indipendente dalle equazioni che esprimono il teorema della quantità di moto e il teorema del momento angolare, nel caso del corpo rigido le (26) e (27) sono una diretta conseguenza delle equazioni (1). Infatti moltiplicando scalarmente la prima delle (1) per  $\mathbf{v}_C$ , la seconda per  $\boldsymbol{\omega}$  e sommando, si ha

$$W = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v}_C + \frac{d\mathbf{L}}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Ricordando che  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C$ , si ha

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v}_C = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_C^2 \right).$$

Inoltre essendo

$$\mathbf{L} = I_{xx} \omega_x \mathbf{i} + I_{yy} \omega_y \mathbf{j} + I_{zz} \omega_z \mathbf{k}.$$

e tenendo presente, nella derivazione rispetto al tempo, le formule di Poisson, si deduce:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= I_{xx} \dot{\omega}_x \mathbf{i} + I_{yy} \dot{\omega}_y \mathbf{j} + I_{zz} \dot{\omega}_z \mathbf{k} \\ &+ I_{xx} \omega_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + I_{yy} \omega_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + I_{zz} \omega_z \frac{d\mathbf{k}}{dt} \\ &= I_{xx} \dot{\omega}_x \mathbf{i} + I_{yy} \dot{\omega}_y \mathbf{j} + I_{zz} \dot{\omega}_z \mathbf{k} \\ &+ \boldsymbol{\omega} \times (I_{xx} \omega_x \mathbf{i} + I_{yy} \omega_y \mathbf{j} + I_{zz} \omega_z \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2).$$

**Complementi ed esempi** .....

- III 6. Due sfere  $A$  e  $B$  identiche sono fissate agli estremi di una sbarretta, di massa trascurabile, solidale con un'asta verticale, passante per il suo centro  $O$ . L'asta forma con la sbarretta un angolo  $\theta$  e ruota con velocità angolare costante mediante due supporti, privi di attrito, disposti ai suoi estremi, figura 10. Determinare il momento angolare del sistema.

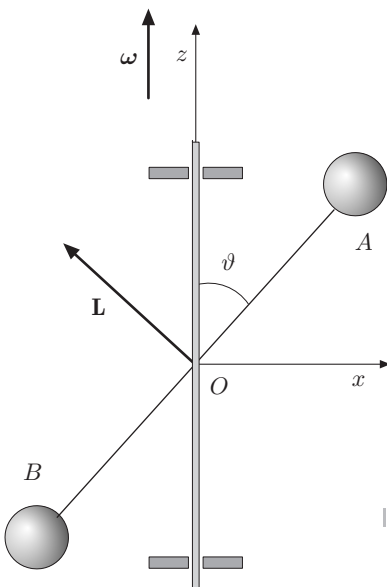


Fig. 14.10

Detta  $2l$  la lunghezza della sbarretta e  $\omega$  la velocità angolare, la velocità di rotazione delle sfere è  $\omega l \sin \theta$ . Il momento angolare delle sfere, rispetto ad  $O$ , è in modulo  $L = 2ml^2\omega \sin \theta$ , costante. Poiché l'asse di rotazione non è un asse di simmetria del sistema, il vettore  $\mathbf{L}$  forma con  $\boldsymbol{\omega}$  un angolo  $\beta = \pi/2 - \theta$ . Esso ruota o *precede* attorno all'asse di rotazione con la stessa velocità angolare del sistema. La componente di  $\mathbf{L}$  secondo questo asse è

$$L_a = L \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = 2ml^2\omega \sin^2 \theta = I_a\omega.$$

dove  $I_a = 2ml^2 \sin^2 \theta$  è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse.

Il vettore momento angolare non è costante poiché cambia continuamente di direzione. Si deve concludere che, per la seconda delle (1), sul sistema deve agire un momento esterno. Tale momento è quello delle reazioni vincolari  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$  esercitate dai supporti. Il modulo del momento, figura 11, è dato da

$$M = \left| \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right| = \frac{d\varphi L \sin \theta}{dt} = \omega L \sin \beta,$$

dove  $d\varphi$  è l'angolo infinitesimo di precessione che, in questo caso è anche l'angolo di rotazione del sistema.

Si osservi che il momento delle reazioni vincolari cambia continuamente di direzione come  $\mathbf{L}$ . Tuttavia  $\mathbf{M}$  è sempre ortogonale al piano definito da  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{L}$ . Le reazioni vincolari, se il sistema ruotante non è perfettamente bilanciato, esercitano sempre un momento. Infatti l'asse di rotazione non è un asse di simmetria; velocità angolare e momento angolare non sono allineati.

Diamo ora una soluzione del problema conforme a quanto esposto nel paragrafo 4. Assumiamo un riferimento, solidale con la sbarretta, che abbia origine nel centro di massa  $O$ , asse  $x$  coincidente con quest'ultima e asse  $z$  ortogonale ad essa, figura 12. Le componenti della velocità angolare, in tale riferimento, sono

$$\omega_x = \omega \cos \theta, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega \sin \theta.$$

Poiché gli assi del riferimento sono assi di simmetria, i prodotti di inerzia, come si può facilmente verificare, sono nulli; mentre i momenti principali d'inerzia risultano:

$$I_{xx} = 0, \quad I_{yy} = 2m(x^2 + z^2) = 2ml^2, \quad I_{zz} = 2m(x^2 + y^2) = 2ml^2.$$

Pertanto, per le (22) e (23) si ottiene

$$\mathbf{L} = 2ml^2\omega \sin \theta \mathbf{k}.$$

Il momento esercitato dalle reazioni vincolari, rispetto ad un osservatore inerziale, è

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 2ml^2\omega \sin \theta \frac{d\mathbf{k}}{dt},$$

che, per le formule di Poisson, si scrive

$$\mathbf{M} = 2ml^2\omega \sin \theta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}.$$

Il momento è un vettore ortogonale al piano definito da  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{k}$ ; il suo modulo è

$$M = 2ml^2\omega^2 \sin \theta \sin \beta = \omega L \sin \beta,$$

come si è trovato prima.

Se si assume un riferimento con asse  $z$  coincidente con l'asse di rotazione, come in figura 10, dette

$$x_A = l \sin \theta, \quad z_A = l \cos \theta; \quad x_B = -l \sin \theta, \quad z_B = -l \cos \theta,$$

le coordinate delle sfere, i momenti principali d'inerzia risultano:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= 2m(y^2 + z^2) = 2ml^2 \cos^2 \theta \\ I_{yy} &= 2m(x^2 + z^2) = 2m(l^2 \sin^2 \theta + l^2 \cos^2 \theta) = 2ml^2 \\ I_{zz} &= 2m(x^2 + y^2) = 2ml^2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

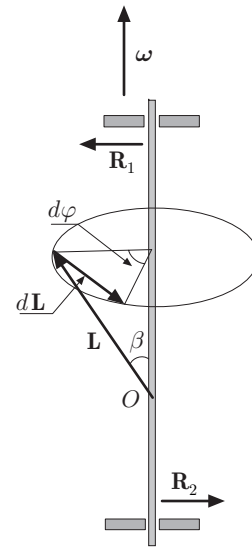


Fig. 14.11

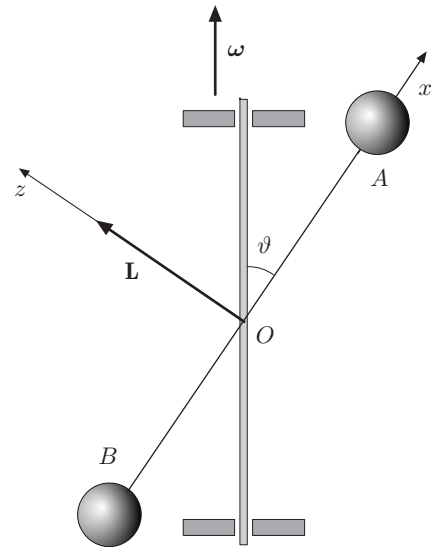


Fig. 14.12

e i prodotti d'inerzia:

$$I_{xy} = 0, \quad I_{xz} = -m x_A z_A - m x_B y_B = -2ml^2 \sin \theta \cos \theta, \quad I_{yz} = 0.$$

Poiché

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega,$$

dalle (22) e (23), si ottiene

$$\mathbf{L} = -2ml^2 \omega \sin \theta \cos \theta \mathbf{i} + 2ml^2 \omega \sin^2 \theta \mathbf{k}.$$

Il modulo di  $\mathbf{L}$  è

$$L = 2ml^2 \omega \sin \theta,$$

come si è già trovato. Si constata dunque che se gli assi del riferimento non coincidono con gli assi di simmetria del sistema, i calcoli risultano più complessi.

- ||| 7. Un disco omogeneo, di massa  $m$  e raggio  $R$ , è sostenuto da un'asta passante per il centro  $O$ , in modo da formare un angolo  $\theta$  con l'asse  $z$  della terna cartesiana ortogonale con esso solidale. L'asta, disposta verticalmente, ruota con velocità angolare costante mediante due supporti, privi di attrito, disposti agli estremi, figura 13. Gli assi di simmetria del disco sono l'asse  $z$  e due qualsiasi assi  $x$  e  $y$ , giacenti nel piano del disco. Determinare il momento angolare del sistema.

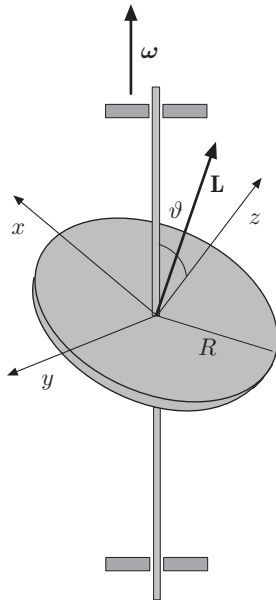


Fig. 14.13

Il problema è analogo al precedente. Scegliendo gli assi  $x$  e  $y$  in modo che le componenti della velocità angolare, parallela all'asse di rotazione, si ha:

$$\omega_x = \omega \sin \theta, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega \cos \theta.$$

Detti:

$$I_{zz} = \frac{1}{2} m R^2, \quad I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} m R^2,$$

i momenti principali d'inerzia del disco, il momento angolare espresso da

$$\mathbf{L} = I_{xx} \omega_x \mathbf{i} + I_{yy} \omega_y \mathbf{j} + I_{zz} \omega_z \mathbf{k},$$

risulta:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} m R^2 \omega \left( \frac{1}{2} \sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{k} \right).$$

Il suo modulo è

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \frac{1}{4} m^2 R^2 \omega \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}.$$

Si noti che il momento angolare del disco ha componenti lungo l'asse  $x$  e lungo l'asse  $z$  del riferimento con esso solidale; esso non ha direzione costante e precede con la velocità angolare del sistema. I supporti esercitano le reazioni vincolari il cui momento è responsabile della precessione, come si è visto nell'esempio precedente.

- ||| 8. Un disco omogeneo può ruotare attorno al suo asse, disposto orizzontalmente; al bordo è fissata una massa  $m$  puntiforme che, in condizioni di equilibrio, si trova lungo la verticale. Studiare il moto del sistema quando viene perturbato dalla posizione di equilibrio.

Nella posizione di equilibrio la massa  $m$  si trova lungo la verticale passante per  $O$ , traccia dell'asse di rotazione, figura 14. Nella posizione perturbata il raggio del disco, passante per  $m$  forma un angolo  $\theta$  con la verticale. Detta  $M$  la massa del disco e  $R$  il suo raggio, l'unica equazione atta a individuare il moto è la (7):

$$M_a = I_a \frac{d\omega}{dt},$$

dove  $M_a$ ,  $I_a$  sono il momento della forza peso e il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse. Il momento della reazione vincolare, rispetto all'asse è nullo. La precedente diventa

$$-mgR \sin \theta = I_a \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad I_a \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mgR \sin \theta = 0,$$

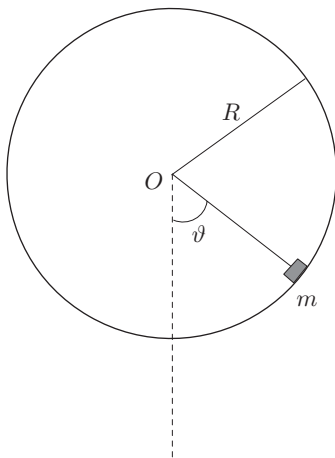


Fig. 14.14



in cui il momento d'inerzia del sistema è

$$I_a = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2.$$

L'equazione ottenuta è analoga a quella del pendolo, e per piccoli spostamenti angolari si può scrivere

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgR}{I_a} \theta = 0.$$

Il sistema oscilla attorno alla posizione di equilibrio con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I_a}}.$$

### 9. Pendolo composto.

Il sistema dell'esempio precedente costituisce un pendolo composto. In generale, un corpo rigido girevole attorno a un asse fisso orizzontale, non passante per il centro di massa e soggetto, oltre che alla reazione vincolare esercitata dall'asse, al solo peso, è un pendolo composto, figura 15. L'unica equazione scalare atta a determinarne il moto è la (7):

$$M = I \frac{d\omega}{dt},$$

dove  $M$  ed  $I$  sono rispettivamente il momento della forza peso e il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione. Detta  $d$  la distanza del centro di massa dall'asse di rotazione, dalla precedente si ha

$$-mgd \sin \theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \sin \theta = 0.$$

Se  $\theta$  è tale che  $\sin \theta \approx \theta$ , la precedente è l'equazione di un pendolo semplice, in cui

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I},$$

che oscilla con periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_e}{g}},$$

dove con  $l_e = I/md$  si è indicata la *lunghezza equivalente* del pendolo composto; ossia la lunghezza di un pendolo semplice di ugual periodo.

Un sistema siffatto gode delle seguenti proprietà. Osserviamo che, per il teorema degli assi paralleli, il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione, può essere espresso come  $I = I_C + md^2$ , pertanto il periodo si scrive:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_C + md^2}{mgd}}.$$

Si riconosce che tutti gli infiniti assi, distanti  $d$  dal centro di massa e che costituiscono le generatrici di un cilindro di raggio  $d$ , sono assi di rotazione o assi di sospensione, rispetto ai quali il pendolo composto oscilla con lo stesso periodo.

Esiste un altro insieme di assi di sospensione, distanti  $d_1$  dal centro di massa, rispetto ai quali il periodo è lo stesso. Infatti perché questa circostanza si verifichi, deve essere:

$$\frac{I_C + md^2}{mgd} = \frac{I_C + md_1^2}{mgd_1},$$

da cui si trae

$$I_C(d_1 - d) = mdd_1(d_1 - d), \quad d_1 = \frac{I_C}{md}.$$

La lunghezza equivalente del pendolo risulta

$$l_e = \frac{I_C + md^2}{md} = \frac{I_C}{md} + d = d_1 + d.$$

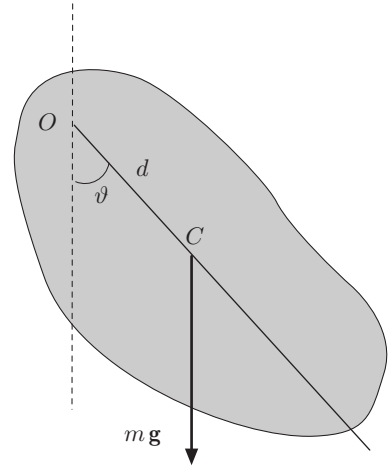


Fig. 14.15

Una misura molto accurata dell'accelerazione di gravità, come è richiesta nelle prospezioni geologiche, può essere effettuata mediante un pendolo composto. Senza entrare in dettagli, la ricerca sperimentale degli assi di sospensione (assi coniugati) rispetto ai quali le oscillazioni del pendolo hanno lo stesso periodo, permette di definire esattamente la lunghezza equivalente.

||| **10.** *Reazioni vincolari relative a un corpo rigido girevole attorno ad un asse fisso.*

Le reazioni vincolari vanno determinate mediante le (3). Consideriamo una terna cartesiana ortogonale, solidale col corpo, con origine in  $O$ , traccia dell'asse di rotazione, ed asse  $x$  coincidente con quest'ultimo. La velocità angolare è dunque  $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i}$ . Indicando con  $\mathbf{r}_C$  la posizione del centro di massa nel riferimento mobile, la quantità di moto è

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C = m\omega_x \mathbf{i} \times \mathbf{r}_C = m\omega_x (y_C \mathbf{k} - z_C \mathbf{j}).$$

Il momento angolare, tenendo presente le (22) dove  $\omega_y = 0$ ,  $\omega_z = 0$ , risulta:

$$\mathbf{L} = \omega_x (I_{xx} \mathbf{i} + I_{yx} \mathbf{j} + I_{zx} \mathbf{k}).$$

Derivando rispetto al tempo la quantità di moto, si ha

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\dot{\omega}_x (y_C \mathbf{k} - z_C \mathbf{j}) + m\omega_x \left( y_C \frac{d\mathbf{k}}{dt} - z_C \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right);$$

ma, per le formule di Poisson, è

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} = \omega_x \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\omega_x \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} = \omega_x \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \omega_x \mathbf{k},$$

pertanto la precedente diventa:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\dot{\omega}_x (y_C \mathbf{k} - z_C \mathbf{j}) - m\omega_x^2 (y_C \mathbf{j} + z_C \mathbf{k}).$$

Analogamente si ricava la derivata rispetto al tempo del momento angolare:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\omega}_x (I_{xx} \mathbf{i} + I_{yx} \mathbf{j} + I_{zx} \mathbf{k}) + \omega_x \left( I_{xx} \frac{d\mathbf{i}}{dt} + I_{yx} \frac{d\mathbf{j}}{dt} + I_{zx} \frac{d\mathbf{k}}{dt} \right).$$

Tenendo presente le formule di Poisson, come prima, si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\omega}_x (I_{xx} \mathbf{i} + I_{yx} \mathbf{j} + I_{zx} \mathbf{k}) + \omega_x^2 (I_{yx} \mathbf{k} - I_{zx} \mathbf{j}).$$

Essendo inoltre  $\dot{\omega}_x = M_x/I_{xx}$ , con questi elementi possiamo scrivere le componenti delle (3):

$$\begin{aligned} R_x &= -F_x \\ R_y &= -F_y - m \left( \frac{M_x}{I_{xx}} z_C + \omega_x^2 y_C \right) \\ R_z &= -F_z + m \left( \frac{M_x}{I_{xx}} y_C - \omega_x^2 z_C \right). \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} M_{Rx} &= 0 \\ M_{Ry} &= -M_y + \frac{I_{yx}}{I_{xx}} M_x - I_{zx} \omega_x^2 \\ M_{Rx} &= -M_z + \frac{I_{zx}}{I_{xx}} M_x + I_{yx} \omega_x^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Si noti che le reazioni vincolari e loro momenti, equazioni (29) e (30), sono riferite agli assi solidali col corpo; le forze esercitate sull'asse fisso, che hanno risultante e momento opposti, sollecitano a vibrazione i supporti e tendono a flettere l'asse. Se l'asse di rotazione passa per il centro di massa ed è principale d'inerzia, si deduce immediatamente che le reazioni e i loro momenti coincidono con le reazioni e i momenti statici. Se l'asse è principale d'inerzia ma non passa per il centro di massa, tale coincidenza si verifica per le reazioni

ma non per i momenti. Anche se le forze attive fossero nulle, moto rotatorio uniforme, le sollecitazioni sarebbero diverse da zero; infatti:

$$R_x = 0, \quad R_y = -m y_C \omega_x^2, \quad R_z = -m z_C \omega_x^2,$$

$$M_{R_x} = 0, \quad M_{R_y} = -I_{z_x} \omega_x^2, \quad M_{R_z} = I_{y_x} \omega_x^2.$$

Nelle masse ruotanti i valori delle sollecitazioni possono raggiungere valori intollerabili. Da qui la necessità di assumere come assi di rotazione, gli assi principali d'inerzia. Ciò si consegue con opportuni interventi di equilibratura dinamica.

- III 11. Una piastra rettangolare omogenea di massa  $m$ , lati  $a$  e  $b$ , soggetta alla sola azione del peso, può ruotare attorno al lato  $a$  che costituisce l'asse fisso orizzontale di rotazione. Determinare le reazioni esercitate dall'asse e il loro momenti, quando la piastra oscilla attorno alla posizione verticale, di equilibrio.

Stabiliamo un riferimento  $Oxyz$ , solidale con la piastra; asse  $x$  coincidente con l'asse di rotazione e asse  $y$  passante per il centro di massa  $C$ , figura 16. Detta  $y_C$  la coordinata del centro di massa e  $\theta$  l'angolo di rotazione rispetto alla verticale, essendo

$$F_y = mg \cos \theta, \quad F_z = -mg \sin \theta, \quad M_x = -mg y_C \sin \theta,$$

e, tenendo presente l'esempio 4,

$$I_{x_x} = \frac{1}{3} m b^2, \quad I_{y_x} = -\frac{1}{4} m a b$$

dalle (29), si ottiene

$$R_x = 0$$

$$R_y = -mg \cos \theta - m y_C \omega_x^2 = -mg \cos \theta - \frac{1}{2} m b \omega_x^2$$

$$R_z = mg \sin \theta + m \frac{M_x}{I_{x_x}} y_C = \frac{1}{4} m g \sin \theta.$$

e dalle (30):

$$M_{R_x} = 0$$

$$M_{R_y} = M_x \frac{I_{y_x}}{I_{x_x}} = \frac{3}{8} m g a \sin \theta$$

$$M_{R_z} = I_{y_x} \omega_x^2 = -\frac{1}{4} m a b \omega_x^2.$$

Si deduce che  $R_y$  è minima nei punti di inversione del moto oscillatorio, massima nel punto di transito con la verticale, dove  $R_z$  è nulla. Le componenti dei momenti tendono a torcere l'asse di rotazione; in particolare  $M_{R_y}$  e  $M_{R_z}$  sono rispettivamente nulli, per  $\theta = 0$  e nei punti di inversione del moto. Se la dimensione  $a$  della piastra è piccola rispetto a  $b$ , sbarra girevole attorno a un estremo, i momenti  $M_{R_y}$ ,  $M_{R_z}$  sono trascurabili; sussistono solo le reazioni  $R_y$ ,  $R_z$ .

Nel caso di una sbarra omogenea girevole attorno a un estremo, le reazioni vincolari possono essere ricavate senza ricorrere alle (29) e (30). Le forze agenti sono la gravità e la reazione vincolare; dalla prima equazione cardinale

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R} = m\mathbf{a}_C,$$

proiettando sulla tangente e sulla normale alla traiettoria, circolare, del centro di massa e assumendo positive la rotazione antioraria e la direzione centripeta della sbarra, si ha

$$m a_t = -mg \sin \theta + R_t, \quad m a_n = -mg \cos \theta + R_n. \quad (31)$$

L'accelerazione tangenziale si ottiene con l'ausilio della seconda equazione cardinale:

$$-mg \frac{b}{2} \sin \theta = I \frac{d\omega}{dt} = \frac{a_t}{b/2}.$$

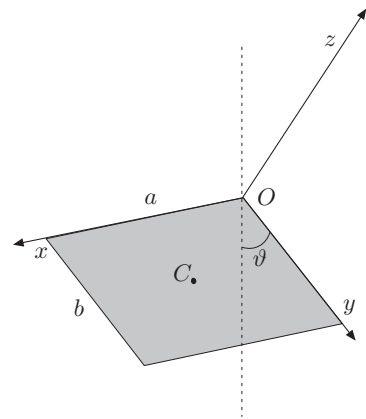


Fig. 14.16

Poiché il momento d'inerzia della sbarra rispetto all'asse di rotazione è

$$I = m \frac{b^2}{12} + m \frac{b^2}{4} = \frac{1}{3} m b^2,$$

risulta:

$$-mg \frac{b}{2} \sin \theta = \frac{2}{3} m b^2 \frac{a_t}{b}, \quad a_t = -\frac{3}{4} g \sin \theta.$$

Dalla prima delle (31) si ha

$$-\frac{3}{4} m g \sin \theta = -m g \sin \theta + R_t, \quad \Rightarrow \quad R_t = \frac{1}{4} m g \sin \theta;$$

dalla seconda:

$$\frac{1}{2} m b \omega^2 = -m g \cos \theta + R_n, \quad \Rightarrow \quad R_n = m g \cos \theta + \frac{1}{2} m b \omega^2.$$

- ||| 12. Una piastra omogenea quadrata, di lato  $a$  e massa  $m$ , ruota con velocità angolare costante, attorno ad un lato che costituisce un asse fisso verticale di rotazione, figura 17. Determinare le reazioni vincolari ed i loro momenti.

Essendo

$$F_x = -m g, \quad F_y = F_z = 0, \quad M_x = M_y = 0, \quad M_z = \frac{1}{2} m g a,$$

$$I_{yx} = -\frac{1}{4} m a^2, \quad I_{zx} = 0,$$

dalle (29) si ottiene

$$R_x = m g, \quad R_y = -\frac{1}{2} m \omega_x^2, \quad R_z = 0;$$

e dalle (30)

$$M_{Rx} = 0, \quad M_{Ry} = 0, \quad M_{Rz} = -\frac{1}{2} m g a - \frac{1}{4} m a^2 \omega_x^2.$$

- ||| 13. Un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $l$ , cade in modo che i suoi estremi striscino su una parete verticale e sul suolo, che supponiamo privi di attrito, figura 18. Determinare il movimento sapendo che, inizialmente, l'asta è disposta verticalmente e viene rimossa da questa posizione a causa di una lieve perturbazione.

Le forze che agiscono sull'asta sono il peso  $\mathbf{p}$  e le reazioni vincolari  $\mathbf{R}_A$ ,  $\mathbf{R}_B$ , nei punti d'appoggio  $A$  e  $B$ ; queste ultime, non essendoci attrito, sono ortogonali ai vincoli. Il problema può essere risolto per mezzo delle equazioni della dinamica dei corpi rigidi; tuttavia, poiché per questa via si incontra qualche difficoltà matematica, è preferibile svolgere il problema mediante la conservazione dell'energia, anche perché le reazioni vincolari non compiono lavoro. Esse comunque vanno calcolate poiché assumono un ruolo importante ai fini del movimento.

Fissato un riferimento  $x, y$  e chiamando  $\theta$  l'angolo che l'asta forma con l'asse  $x$ , le coordinate del centro di massa, in una posizione generica dell'asta, sono

$$x_C = \frac{l}{2} \cos \theta, \quad y_C = \frac{l}{2} \sin \theta,$$

dove  $\theta$  è funzione del tempo. Finché l'estremo  $B$  dell'asta non abbandona la parete, l'atto di moto sarà rotatorio attorno ad un centro istantaneo di rotazione  $Q$ , intersezione delle normali ai vincoli, passanti per  $A$  e  $B$ . Per la conservazione dell'energia, si ha

$$m g \frac{l}{2} = \frac{1}{2} I \omega^2 + m g \frac{l}{2} \sin \theta,$$

dove  $I$  è il momento d'inerzia dell'asta rispetto a  $Q$ :

$$I = m \frac{l^2}{12} + m \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} m l^2.$$

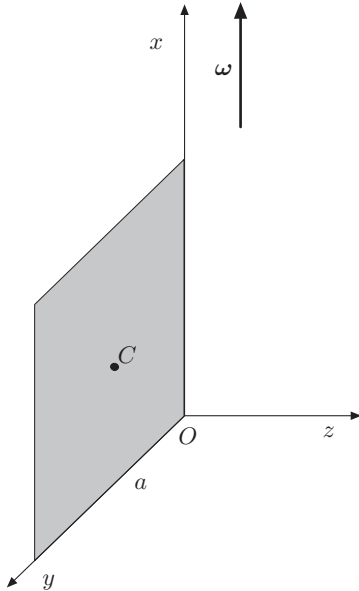


Fig. 14.17

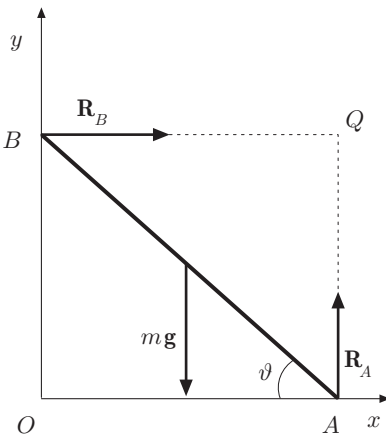


Fig. 14.18

Si ottiene dunque:

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + mgy_C = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + mg\frac{l}{2}\sin\theta,$$

da cui:

$$\dot{\theta}^2 = 3\frac{g}{l}(1 - \sin\theta). \quad (32)$$

Derivando,

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\theta = 0. \quad (33)$$

Si può anche assumere che il moto dell'asta sia rototraslatorio, cioè composto dalla traslazione del centro di massa e dalla rotazione attorno ad un asse passante per quest'ultimo e ortogonale al piano del moto. Allora, l'energia cinetica risulta

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2;$$

i risultati che ne seguono sono ovviamente identici.

Le reazioni vincolari si ricavano dalle:

$$m\ddot{x}_C = R_B, \quad \ddot{y}_C = -mg + R_A,$$

da cui:

$$R_A = mg + m\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{l}{2}\sin\theta\right)$$

$$R_B = m\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{l}{2}\cos\theta\right),$$

alle quali bisogna dare forma esplicita. Si ha

$$\frac{d}{dt}(\sin\theta) = \dot{\theta}\cos\theta,$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sin\theta) = \ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta.$$

Sostituendo le (32) e (33), si ottiene

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sin\theta) = -\frac{3g}{2l}\cos^2\theta - \frac{3g}{l}\sin\theta + \frac{3g}{l}\sin^2\theta.$$

Pertanto è

$$R_A = mg + \frac{3}{2}mg\left(-\frac{1}{2}\cos^2\theta - \sin\theta + \sin^2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4}mg(1 + 9\sin^2\theta - 6\sin\theta) = \frac{1}{4}mg(1 - 3\sin\theta)^2.$$

Per determinare  $R_B$ , osserviamo che

$$\frac{d}{dt}(\cos\theta) = -\dot{\theta}\sin\theta, \quad \frac{d^2}{dt^2}(\cos\theta) = -\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta;$$

sostituendo le (32) e (33), si ha

$$\frac{d^2}{dt^2}(\cos\theta) = -\frac{3g}{l}\cos\theta + \frac{9g}{2l}\sin\theta\cos\theta.$$

Infine:

$$R_B = \frac{1}{4}mg(9\sin\theta - 6)\cos\theta.$$

Si conclude che  $R_A$  non è mai negativa, mentre  $R_B$  diventa negativa per  $\sin\theta < 2/3$ . Poiché la parete non può esercitare una reazione negativa, l'asta scorre col suo estremo  $B$  lungo questa finché  $\sin\theta = 2/3$ ,  $\theta \approx 41^\circ$ ; successivamente l'asta si stacca dalla parete e continua a cadere. Le componenti della velocità del centro di massa prima del distacco dalla parete sono

$$\dot{x}_C = -\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{y}_C = \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta;$$

il modulo:

$$v_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2} = \dot{\theta} \frac{l}{2}.$$

Dopo il distacco la componente orizzontale si mantiene costante, mentre quella verticale è quella relativa alla caduta con accelerazione costante. La traiettoria del centro di massa è parabolica.

Se l'asta inizialmente è verticale, le forze che agiscono sono il peso e la reazione nel punto di appoggio  $A$ . Essendo queste forze dirette lungo la verticale, il moto del centro di massa, una volta che l'asta abbandona la posizione di equilibrio instabile, sarà anch'esso verticale. Per la conservazione dell'energia, nelle posizioni estreme, si ha

$$mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I \omega^2,$$

dove  $I$  è il momento d'inerzia della sbarra rispetto al centro di massa. Durante la caduta, detto  $\theta$  l'angolo che forma l'asta con l'orizzontale, la coordinata del centro di massa è  $y_C = l \sin \theta / 2$ , che derivata rispetto al tempo ne dà la velocità:

$$v_C = \dot{y}_C = \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos \theta, \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \omega = 2 \frac{v_C}{l \cos \theta}.$$

Dunque la conservazione dell'energia si scrive:

$$mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} m \frac{l^2}{12} \left( \frac{2v_C}{l \cos \theta} \right)^2 + mg \frac{l}{2} \sin \theta,$$

$$gl(1 - \sin \theta) = v_C^2 \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{\cos^2 \theta} \right),$$

che permette di ricavare  $v_C$ . In particolare, per  $\theta = 0$ , si ha velocità di impatto col suolo:

$$v_C = \frac{1}{2} \sqrt{3gl}.$$

La reazione vincolare va determinata come nell'esempio precedente.

- ||| 14. Una sbarretta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $l$  in quiete, è appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito. Determinare l'energia cinetica acquistata dalla sbarretta in seguito ad un impulso di modulo  $J = 4 \text{ N/s}$  applicato normalmente, a una distanza  $l/4$  da un estremo.

L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I \omega^2,$$

con  $I = ml^2/12$ . Essendo:

$$J = m v_C, \quad J \frac{l}{4} = I \omega,$$

dalla precedente si ottiene:

$$T = \frac{1}{2} \frac{J^2}{m} + \frac{1}{2} \frac{J^2 l^2}{16I} = \frac{7}{8} \frac{J^2}{m}.$$

- ||| 15. Il sistema di figura 19 è costituito da una carrucola di massa  $m$  e raggio  $R$  che può ruotare senza attrito attorno al suo asse, disposto orizzontalmente, e da due masse  $m_1, m_2$  collegate agli estremi di un filo, inestensibile e di massa trascurabile, che passa lungo la gola della carrucola senza slittare. Supponendo che  $m_1 > m_2$ , determinare il movimento del sistema. Si tratta della macchina di Atwood, studiata nell'ipotesi che la massa della carrucola fosse trascurabile, esempio 13-VII. Questa volta, a causa del momento d'inerzia della carrucola, le tensioni applicate al bordo dalla carrucola hanno modulo diverso. Le forze che agiscono sul sistema sono: le tensioni  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ , trasmesse dal filo, forze interne, i pesi e la reazione vincolare sull'asse della carrucola.

Esaminiamo il problema mediante le equazioni della dinamica, applicate alle singole parti del sistema. Poiché il filo è inestensibile, possiamo assumere

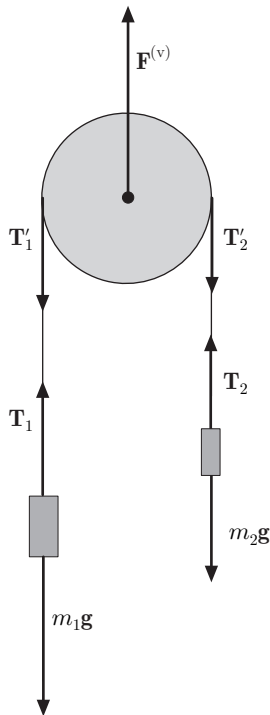


Fig. 14.19

che il modulo dell'accelerazione  $a$  sia lo stesso in ogni parte del sistema e, in particolare, che l'accelerazione angolare  $\alpha$  della carrucola soddisfi la condizione  $a = \alpha R$ . Fissato un asse  $x$  di riferimento volto verso il basso, per le due masse si ha

$$m_1 a = m_1 g - T_1, \quad -m_2 a = m_2 g - T_2. \quad (34)$$

Per la carrucola, dalla seconda equazione cardinale si ha

$$(T_1 - T_2)R = I \frac{d\omega}{dt}. \quad (35)$$

Dalle (34) si ottiene

$$T_1 - T_2 = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a;$$

perciò la (35) diventa

$$[(m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a]R = \frac{1}{2}mR^2 \frac{a}{R}.$$

Da questa si trae

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m/2}g,$$

e

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2}m \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m/2}g.$$

Quest'ultima mostra che se la massa  $m$  della carrucola è  $m \ll m_1, m_2$ , le tensioni risultano circa uguali,  $T_1 \approx T_2$ , come si è assunto nell'esempio citato. Il moto delle parti del sistema avviene con accelerazione costante che può essere stabilita scegliendo opportunamente la differenza  $m_1 - m_2$  tra le masse.

Il problema può essere svolto mediante la conservazione dell'energia, tenendo conto che le tensioni non compiono lavoro. Infatti l'accelerazione delle parti del sistema è costante; le tensioni  $\mathbf{T}_1$  e  $-\mathbf{T}_1$  applicate alla carrucola e alla massa  $m_1$  sono opposte e gli spostamenti dei loro punti di applicazione sono uguali. Lo stesso si può dire per la tensione  $\mathbf{T}_2$ .

Tenuto conto che le velocità delle masse, in ogni istante, sono uguali in modulo, la conservazione dell'energia si esprime:

$$-g(m_1 x_1 - m_2 x_2) + \frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = cost,$$

dove  $x_1$  e  $x_2$  sono le quote raggiunte dalle masse rispetto alla posizione in cui sono allineate. Poiché  $I = mR^2/2$  e  $\omega = v/R$ , si ha

$$-g(m_1 x_1 - m_2 x_2) = \frac{1}{2} \left( m_1 + m_2 + \frac{m}{2} \right) v^2 = cost;$$

derivando rispetto al tempo:

$$-g(m_1 - m_2)v + \left( m_1 + m_2 + \frac{m}{2} \right) v \frac{dv}{dt} = 0,$$

da cui:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m/2}g.$$

Il problema può essere risolto esclusivamente mediante le equazioni cardinali dei sistemi, tenendo presente che, in questa formulazione, intervengono le sole forze esterne, pesi e reazione vincolare; le tensioni sono forze interne. In questo modo possiamo altresì determinare la reazione vincolare  $\mathbf{F}^{(v)}$ . Scriveremo dunque

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}^{(v)} = (m_1 + m_2 + m)\mathbf{a}_C, \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (36)$$

Notiamo che l'accelerazione del centro di massa è diretta lungo la verticale e sappiamo che l'accelerazione delle due masse è uguale in modulo, mentre quella della carrucola è nulla. Dunque è

$$a_C = \frac{m_1 a - m_2 a}{m_1 + m_2 + m} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m}a.$$

Dalla prima delle (36), proiettata lungo l'asse di riferimento, si ottiene

$$(m_1 + m_2 + m)g + F^{(v)} = (m_1 + m_2 + m)a_C = (m_1 - m_2)a,$$

$$F^{(v)} = (m_1 - m_2)a - (m_1 + m_2 + m)g.$$

La reazione ha segno negativo, quindi è volta verso l'alto.

Il momento angolare del sistema, proiettato lungo l'asse di rotazione, risulta

$$L = I\omega + m_1 Rv + m_2 Rv,$$

pertanto la seconda delle (36) diventa

$$m_1 g R - m_2 g R = \frac{d}{dt}(I\omega + m_1 Rv + m_2 Rv)$$

$$(m_1 - m_2)gR = I\dot{\omega} + (m_1 + m_2)aR,$$

dalla quale, essendo  $\dot{\omega} = a/R$ , si ottiene l'accelerazione.

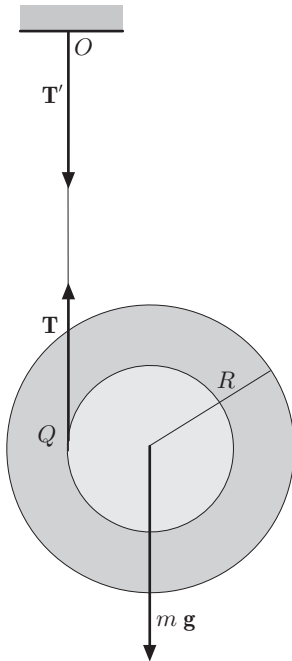


Fig. 14.20

- III 16. Un rocchetto è costituito da tre dischi omogenei coassiali ognuno di massa  $m$ ; i due esterni hanno raggio  $R$ , mentre quello interno ha raggio  $R/2$ , figura 20. Sul disco interno è avvolto un filo, inestendibile e di massa trascurabile, il cui estremo è fissato in un punto  $O$ . Determinare il moto di caduta del rocchetto e la tensione del filo, sapendo che inizialmente il suo centro è al livello di  $O$  e che la velocità iniziale è nulla.

Il moto è rototraslatorio; rotazione attorno all'asse del rocchetto e traslazione del centro di massa. È anche di pura rotazione attorno all'asse istantaneo di rotazione, passante per il punto di tangenza del filo col disco interno, che ha come traccia  $Q$ . Le forze agenti sono il peso e la tensione del filo; fissato un asse di riferimento con origine in  $O$  e volto verso il basso, dalla prima equazione cardinale, si ha

$$3mg - T = 3ma_C, \quad (37)$$

dove  $a_C$  è l'accelerazione del centro di massa.

Dalla seconda equazione cardinale:

$$T \frac{R}{2} = I_C \frac{d\omega}{dt}, \quad (38)$$

con

$$I_C = \frac{1}{2}m \frac{R^2}{4} + mR^2.$$

Poiché  $a_C = \alpha R/2$ , essendo  $\alpha$  l'accelerazione angolare, combinando le (37) e (38), si ottiene

$$a_C = \frac{3m}{3m + 4I_C/R^2} g = \frac{2}{5}g, \quad T = 3m(g - a_C).$$

Se si considera il moto come pura rotazione attorno all'asse istantaneo passante per  $Q$ , dalla seconda equazione cardinale:

$$3mg \frac{R}{2} = I_Q \frac{d\omega}{dt},$$

essendo  $I_Q = I_C + 3m(R/2)^2$ , si ha:

$$a_C = \frac{d\omega}{dt} \frac{R}{2} = \frac{3mR^2}{4I_Q} g = \frac{2}{5}g.$$

Il problema può essere risolto mediante la conservazione dell'energia, tenendo presente che la tensione  $\mathbf{T}$  non compie lavoro, poiché è applicata in  $Q$  la cui velocità è istantaneamente nulla.

Assumendo costante e pari a zero, l'energia totale in  $O$ , si può scrivere

$$\frac{1}{2}3mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 - 3mgx_C = \text{cost} = 0,$$



essendo  $x_C$  la coordinata del centro di massa. L'energia cinetica può essere considerata di pura rotazione attorno all'asse istantaneo di rotazione.

Derivando rispetto al tempo:

$$\frac{1}{2}3m2v_C \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{2}I_C 2\omega \frac{d\omega}{dt} - 3mgv_C = 0.$$

Da questa relazione, tenendo conto che  $v_C = \omega R/2$  e  $a_C = \dot{\omega}R/2$ , si ottiene

$$3mv_C a_C + 4 \frac{I_C}{R^2} v_C a_C - 3mgv_C = 0,$$

dalla quale si ricava  $a_C$ . Una volta che il filo si è svolto completamente, si verifica uno strappo durante il quale, in assenza di attriti, l'energia cinetica non varia, ma la velocità del centro di massa cambia verso. Il rocchetto risale nella posizione iniziale, realizzando un moto oscillatorio (pendolo di Maxwell, yo-yo).

## 6. Rotolamento

Il moto di rotolamento, descritto in cinematica, è un moto piano in cui la ruota o il disco e il piano su cui rotola, sono in contatto lungo una generatrice coincidente con l'asse istantaneo di rotazione che ha come traccia un punto  $Q$ . Dinamicamente tale moto non può verificarsi senza la presenza di attrito e poiché la generatrice di contatto è istantaneamente ferma, non c'è dissipazione di energia; l'attrito che interviene è quello statico, caratterizzato dal coefficiente  $\mu_s$ . Ciò che spinge un autoveicolo è la forza di attrito; infatti il motore può esplicare solo forze interne e il moto del centro di massa dell'autoveicolo, non può variare senza l'ausilio di forze esterne.

### 6.1. Rotolamento con forza motrice

Consideriamo una ruota di raggio  $R$  appoggiata su un piano orizzontale, lungo una generatrice che ha come traccia il punto  $Q$ . Nel centro  $O$  gravi il peso, proprio ed esterno, e agisca una forza orizzontale  $\mathbf{F}$  costante; in  $Q$  sia applicata la forza di attrito statico  $\mathbf{F}_A$ , figura 21.

Il problema del moto può essere risolto mediante le equazioni cardinali della dinamica dei corpi rigidi,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{M} = I \frac{d\omega}{dt}.$$

Proiettiamo la prima lungo la direzione del moto orizzontale, e riferiamo i momenti rispetto al centro  $O$  del disco. La reazione normale e il peso si equilibrano; dunque si ha

$$F - F_A = m_T a, \quad F_A R = I \frac{d\omega}{dt}, \quad (39)$$

dove  $m_T$  è la massa totale, somma della massa esterna e della ruota.

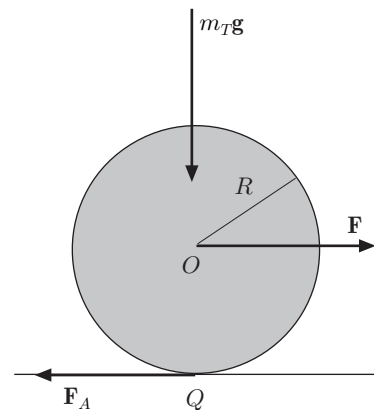


Fig. 14.21

Poiché supponiamo che il moto sia di puro rotolamento, essendo

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R},$$

e la velocità  $\mathbf{v}_Q$  istantanea per istante nulla, è  $v_O = \omega R$ . Dunque  $d\omega/dt = a/R$ , dove  $a$  è l'accelerazione del centro di massa. La seconda delle (39) diventa

$$F_A R = I \frac{a}{R},$$

ed essendo il momento d'inerzia della ruota rispetto al suo asse  $I = mR^2/2$ , con  $m$  massa della ruota, si ottiene

$$F_A = \frac{1}{2}ma.$$

Sostituendo nella prima delle (39) si ricava:

$$a = \frac{F}{m_T + m/2}.$$

Inoltre si ottiene:

$$F_A = \frac{F}{2m_T/m + 1}.$$

Se sulla ruota non grava alcun peso aggiuntivo,  $m_T = m$ , si ha

$$F_A = \frac{1}{3}F, \quad a = \frac{2}{3}\frac{F}{m}.$$

Per ottenere la condizione di puro rotolamento, osserviamo che deve essere  $F_A \leq \mu_s R_n$ , dunque il coefficiente di attrito statico dovrà soddisfare la condizione

$$\mu_s \geq \frac{F_A}{m_T g} = \frac{1}{m_T g} \frac{F}{2m_T/m + 1}.$$

Se  $\mu_s$  risulta minore, la ruota rotola e striscia. Per ottenere il puro rotolamento anche con valori piccoli di  $\mu_s$ , occorre ridurre  $F$  oppure aumentare la massa.

Si osservi che in questa schematizzazione non intervengono forze dissipative; il problema può essere risolto per mezzo del teorema dell'energia cinetica. Supponendo, per semplicità, che sulla ruota non gravi alcun peso aggiuntivo, il lavoro della forza è uguale alla variazione di energia cinetica della ruota. Assumendo che la velocità iniziale sia nulla e chiamando con  $x$  lo spazio percorso dal centro di massa, si ha

$$Fx = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Essendo la forza costante, risulta

$$x = \frac{1}{2}at^2, \quad v = at, \quad \omega = \frac{v}{R}.$$

Sostituendo nella precedente, per la forza d'attrito e l'accelerazione si ottengono le stesse espressioni.

### 6.2. Rotolamento con coppia motrice

Consideriamo una ruota motrice soggetta ad una coppia di momento  $\mathbf{M}$  costante, diretto come l'asse della ruota, alla forza d'attrito statico  $\mathbf{F}_A$  ed al peso, proprio ed esterno. Si noti che, in questo caso, la forza d'attrito ha la direzione del moto, figura 22. Proiettando le equazioni cardinali della dinamica dei corpi rigidi lungo la direzione del moto e assumendo come polo il centro  $O$  della ruota, si ha

$$F_A = m_T a, \quad M - F_A R = I \frac{d\omega}{dt}.$$

Supponendo che il moto sia di puro rotolamento,  $d\omega/dt = a/R$ , e sostituendo la prima equazione nella seconda, si ha

$$M - m_T a R = I \frac{a}{R}.$$

Si ottiene:

$$a = \frac{M}{R(m_T + m/2)}, \quad F_A = \frac{M}{R(1 + m/2m_T)}.$$

Se sulla ruota non grava alcun peso aggiuntivo, si ricava

$$a = \frac{2}{3} \frac{M}{mR}, \quad F_A = \frac{2}{3} \frac{M}{R}.$$

In ogni caso, per ottenere accelerazioni elevate occorre aumentare il momento  $M$ , oppure diminuire la massa e/o il raggio. Tuttavia occorre tener presente la condizione che l'attrito impone. Le considerazioni sono analoghe a quelle già fatte:

$$F_A \leq \mu_s R_n, \quad \mu_s \geq \frac{F_A}{m_T g} = \frac{M}{R(1 + m/2m_T)} \frac{1}{m_T g}.$$

Se si vuole ottenere puro rotolamento con bassi valori di  $\mu_s$ , bisogna ridurre il momento motore oppure aumentare la massa e/o il raggio.

Si osservi che la forza di attrito assume il ruolo di forza di trazione; ciò si può capire dalla figura 23. Infatti il veicolo che grava sulla ruota/ruote è soggetto a una trazione  $\mathbf{T}$  ed esercita, a sua volta, una reazione  $-\mathbf{T}$ , opposta a  $\mathbf{F}_A$ , sulla ruota. Questa, come abbiamo visto, è soggetta alla coppia motrice di momento  $\mathbf{M}$  e alla coppia  $-\mathbf{T}$  e  $\mathbf{F}_A$ , di momento equivalente a quello della forza di attrito  $F_A R$ . L'intensità della forza di trazione di cui è capace la ruota non può superare la frazione  $\mu_s$  del peso che su di essa grava. Per esempio, allo scopo di ottenere forti trazioni, è necessario aumentare il peso dei locomotori.

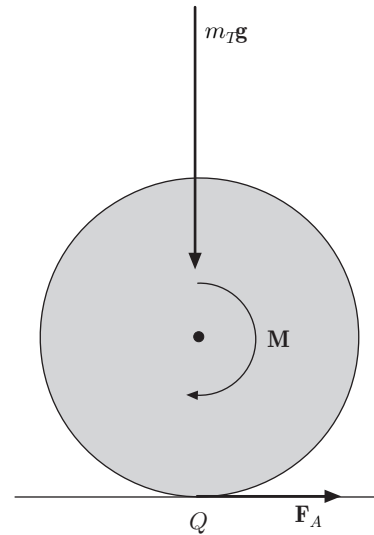


Fig. 14.22

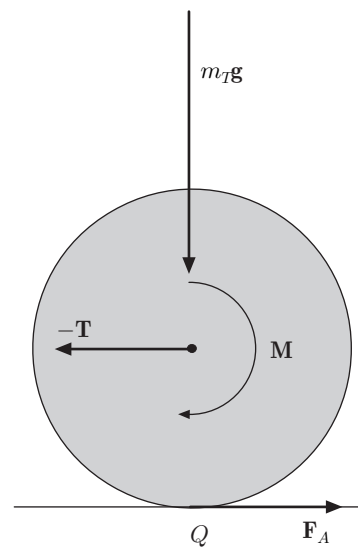


Fig. 14.23

Anche in questo caso non è presente dissipazione di energia; dunque si può usare il teorema dell'energia cinetica. Supponendo che sulla ruota agisca soltanto il peso proprio e che la sua velocità iniziale sia nulla, il lavoro della coppia di momento  $M$ , costante, è uguale alla variazione di energia cinetica della ruota:

$$M\varphi = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Nelle condizioni di puro rotolamento è  $\varphi = x/R$ ,  $x = at^2/2$  e  $v = at$ . Sostituendo nella precedente si hanno i risultati già ottenuti.

### 6.3. Attrito di rotolamento

L'osservazione più semplice indica che nel moto di puro rotolamento è sempre presente una forma di attrito, diversa dall'attrito statico e dinamico, che ostacola il moto del corpo. Una palla di biliardo o qualsiasi altro oggetto che rotola su un piano, progressivamente si ferma. Ciò è dovuto a complicati processi di interazione non elastica tra le superfici a contatto, dipendenti dalle proprietà dei materiali. Finora si è fatta l'ipotesi che la ruota, schematizzata come un disco, poggi su un piano orizzontale lungo una generatrice; in realtà, a causa delle deformazioni prodotte dal peso proprio e da quello che grava su di essa, viene prodotta una superficie di contatto più o meno deformata, su cui sono distribuite le reazioni vincolari. Tali reazioni costituiscono un sistema di forze che possono sempre essere ridotte ad una risultante applicata nel punto  $Q$ , traccia della generatrice di contatto, e ad una coppia. La reazione risultante si scompone nella forza tangenziale di attrito e nella reazione normale. Il momento della coppia si scompone in un componente  $M_t$  tangente e in un componente  $M_n$  ortogonale alle superfici in contatto, figura 24; il primo è dovuto all'*attrito di rotolamento*, il secondo all'*attrito di giro*; quest'ultimo ostacola la rotazione della ruota o dei corpi attorno ad un asse ortogonale alle superfici a contatto.

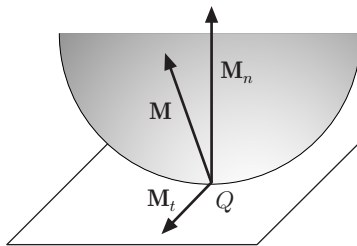


Fig. 14.24

Lo studio dell'attrito di rotolamento va fatto mediante esperienze analoghe a quelle relative all'attrito statico e cinetico. Le esperienze di Coulomb mostrano che i momenti, tangente e ortogonale, sono proporzionali alla reazione normale e che per l'equilibrio della ruota si devono verificare le condizioni:

$$M_t \leq hR_n, \quad M_n \leq kR_n, \quad (40)$$

dove  $R_n$  è il modulo della reazione normale;  $h$  e  $k$  sono due parametri positivi aventi, a differenza del coefficiente d'attrito  $\mu$ , che è un numero puro, le dimensioni di una lunghezza. Questi parametri dipendono, come s'è detto, dalla natura del materiale delle superfici a contatto; l'uno è detto *parametro di attrito di rotolamento*, l'altro *parametro di attrito di giro*; quest'ultimo, in genere,

è minore del precedente. Nel nostro caso interessa il primo parametro; il secondo riguarda essenzialmente sistemi ruotanti attorno ad un asse munito di perni e simili, poggiati su supporti.

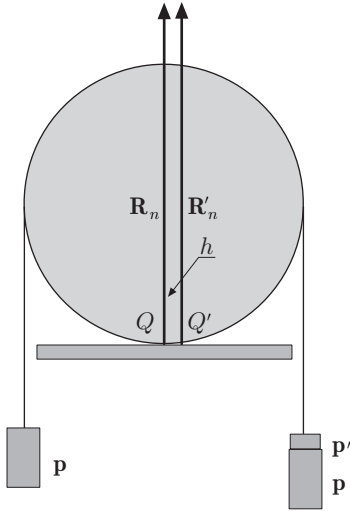


Fig. 14.25

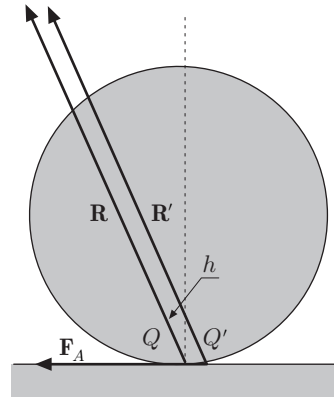


Fig. 14.26

Si consideri una ruota poggiata su un piano orizzontale, come in figura 25. Il sistema è in equilibrio sotto l'azione dei momenti di due pesi  $\mathbf{p}$  uguali, rispetto all'asse passante per  $Q$ , oppure rispetto all'asse del cilindro. I due pesi sono posti agli estremi di un filo avvolto, senza che slitti, alla periferia della ruota. Se si pone un peso  $\mathbf{p}'$  aggiuntivo a un estremo del filo, finché il suo momento  $\mathbf{M}$  è sufficientemente piccolo, si osserva che la ruota è in equilibrio. Ciò significa che il modulo del momento di resistenza al rotolamento  $M_t$ , è maggiore di  $M$ ; allorché quest'ultimo raggiunge un certo valore, si osserva che la ruota inizia a rotolare. L'esperienza mostra che l'intensità di  $M_t$  è proporzionale alla somma del peso della ruota e di quelli applicati  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p} + \mathbf{p}'$ , cioè alla reazione normale; allora, in conformità con la prima delle (40), si ha

$$M_t \leq hR_n.$$

Il sistema formato dalla reazione normale  $R_n$  e dal momento di intensità  $M_t = hR_n$  che si oppone alla rotazione, è equivalente ad una forza normale  $R'_n$  applicata in un punto  $Q'$  distante  $h$  da  $Q$ , nel verso del moto. Se si vuole tenere conto anche della forza di attrito statico  $F_A$ , è sufficiente comporre quest'ultima con  $\mathbf{R}'_n$ . La reazione totale, tenuto conto della resistenza di rotolamento, si ottiene dunque spostando  $\mathbf{R}_n$  di una quantità  $h$  nella direzione del moto, figura 26; pertanto è

$$\mathbf{R}' = \mathbf{F}_A + \mathbf{R}'_n.$$

Si sottolinea che se il cilindro rotola senza strisciare, si deve tener presente l'esistenza della forza di attrito statico; infatti è proprio questa che determina il rotolamento, opponendosi allo slittamento delle superfici a contatto. Il valore di  $h$ , ordinariamente, è piuttosto piccolo; per ruote di vagoni ferroviari su rotaie è compreso tra 0,5 e 1 mm; per ruote di vetture su pavé è compreso tra 18 e 25 mm.

#### 6.4. Equilibrio di una ruota soggetta a forza motrice

Consideriamo una ruota di raggio  $R$ , appoggiata su un piano orizzontale, figura 27. Su essa gravi il peso proprio ed esterno e agisca una forza orizzontale  $\mathbf{F}$  nel piano della ruota e applicata al centro. Detti  $R_n$ ,  $R_t$  le componenti normale e tangenziale della reazione,  $M_t$  il modulo del momento di attrito volvente, riferito al polo  $Q$ ; all'equilibrio, si deve avere

$$F - R_t = 0, \quad mg - R_n = 0, \quad FR - M_t = 0.$$

Per la prima delle (40), è necessario e sufficiente che sia:

$$F \leq \mu_s mg, \quad F \leq \frac{h}{R} mg.$$

Se il vincolo è liscio,  $\mu_s = 0$ ,  $h = 0$ , l'equilibrio non è possibile con  $\mathbf{F} \neq 0$ . Non è neanche possibile se, pur essendo  $\mu_s > 0$ , fosse  $h = 0$ , se cioè non ci fosse attrito volvente, perché in tal caso non sarebbe possibile, con  $F > 0$ , soddisfare la seconda condizione. Se è soddisfatta la condizione più restrittiva, che è la seconda, l'equilibrio è verificato. Per esempio, se  $R = 50 \text{ cm}$ ,  $h = 1 \text{ cm}$ ,  $\mu_s = 0,2$ , la prima condizione impone a  $F$  di non superare  $1/5$  del peso, la seconda di non superare  $1/50$  del peso. Se  $F = hmg/R$ , il moto di rotolamento risulta uniforme; allora  $F$  è uguale alla forza di resistenza di rotolamento. Tale forza è proporzionale al peso e inversamente proporzionale al raggio.

La determinazione di  $h$  può essere fatta studiando il moto della ruota lungo un piano inclinato. Supponiamo che la ruota sia inizialmente in quiete su un piano orizzontale e sia  $\mu_s$  il coefficiente di attrito statico. Se si inclina gradualmente il piano di appoggio rispetto all'orizzontale, indicando con  $\varphi$  l'angolo di inclinazione, l'equilibrio è soddisfatto dalla più restrittiva delle seguenti condizioni

$$mg \sin \varphi \leq \mu_s mg \cos \varphi, \quad mg \sin \varphi \leq \frac{h}{R} mg \cos \varphi.$$

Se  $h/R \leq \mu_s$ , la ruota è in equilibrio finché  $\tan \varphi \leq h/R$ ; in particolare per  $\tan \varphi = h/R$ , il moto di rotolamento risulta uniforme. Superato questo limite essa rotola senza strisciare con accelerazione costante. Se fosse  $h/R > \mu_s$ , la ruota resterebbe in equilibrio finché  $\tan \varphi \leq \mu_s$ ; superato questo limite, essa si muove

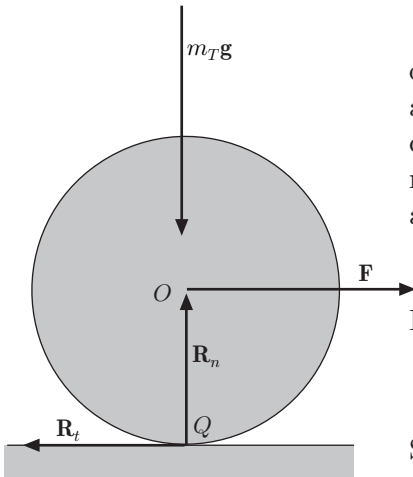


Fig. 14.27

strisciando senza rotolare. Se infine fosse  $h/R = \mu_s$ , la ruota resterebbe in equilibrio finché  $\tan \varphi \leq h/R = \mu_s$ ; superato tale limite, essa si muove rotolando e strisciando.

### 6.5. Equilibrio di una ruota soggetta a coppia motrice

Una ruota motrice di un veicolo, figura 28, è appoggiata su un piano orizzontale. Essa è soggetta alla coppia motrice di momento  $\mathbf{M}$ , al peso proprio, ad un carico esterno e alla reazione  $-\mathbf{T}$ , esercitata dal veicolo. Le reazioni vincolari sono:  $\mathbf{R}$  applicata in  $Q$ , somma di  $\mathbf{R}_n$ , e  $\mathbf{R}_t$ , e al momento di resistenza di attrito volvente  $\mathbf{M}_t$ . Assumendo come polo  $Q$ , per l'equilibrio, si deve avere

$$mg - R_n = 0, \quad T - F_A = 0, \quad M - TR - M_t = 0.$$

Allora le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio sono:

$$T \leq \mu_s mg, \quad M - TR \leq hmg.$$

L'equilibrio si ottiene se è soddisfatta la più restrittiva di queste condizioni, cioè la seconda.

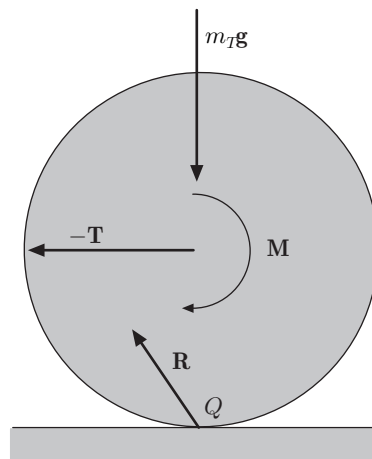


Fig. 14.28

### Esempi

17. Un disco rotola senza strisciare lungo un piano inclinato di un angolo  $\varphi$  rispetto all'orizzontale. Trascurando l'attrito di rotolamento, determinare l'accelerazione del centro di massa del disco e la velocità con cui giunge alla fine del piano inclinato.

Le forze che agiscono su disco sono il peso  $mg$ , la reazione normale al piano  $\mathbf{R}_n$  e la forza di attrito statico  $\mathbf{F}_A$ , figura 29. Le equazioni cardinali si scrivono:

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{R}_n + mg = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{M} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

Proiettiamo la prima lungo il piano inclinato, assumendo positivo il verso discendente, e valutiamo i momenti rispetto all'asse del disco; si ha

$$-F_A + mg \sin \varphi = ma, \quad F_A R = I \frac{d\omega}{dt}.$$

Ricavando  $F_A$  dalla seconda e sostituendo nella prima:

$$mg \sin \varphi - \frac{I}{R} \frac{d\omega}{dt} = ma;$$

ma, poiché il moto è di puro rotolamento, è

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{a}{R},$$

ed essendo  $I = mR^2/2$ , si ottiene

$$mg \sin \varphi - \frac{1}{2}ma = ma, \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}g \sin \varphi.$$

In generale, l'accelerazione dipende dal momento d'inerzia del corpo che rotola poiché

$$a = \frac{mg \sin \varphi}{m + I/R^2}.$$

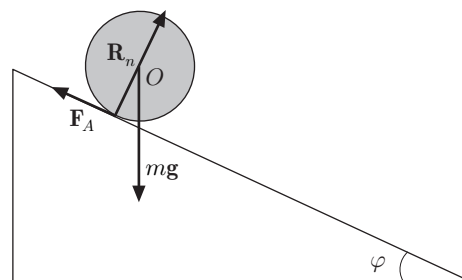


Fig. 14.29

Infatti, se alla sommità del piano inclinato, un disco e un anello sono lasciati liberi nello stesso istante, il disco giunge alla base per primo, indipendentemente dalla massa e dal raggio, come si può verificare mediante la relazione precedente, sostituendo il momento d'inerzia del disco,  $mR^2/2$ , e dell'anello  $I = mR^2$ . Analogamente, una sfera giungerà alla base del piano inclinato prima del disco poiché il suo momento d'inerzia è  $I = 2mR^2/5$ . Il moto avviene con accelerazione costante.

Supponendo che la velocità iniziale del disco sia nulla, la velocità alla fine del piano inclinato, detta  $l$  la sua lunghezza, è

$$v = \sqrt{2al} = \sqrt{\frac{4}{3}gl \sin \varphi}.$$

Si osservi che il problema può essere risolto per mezzo della conservazione dell'energia; infatti il punto di applicazione della forza di attrito è istante per istante in quiete, pertanto, avendo trascurato l'attrito di rotolamento, la forza di attrito statico non compie lavoro dissipativo. L'energia cinetica si può esprimere come somma dell'energia cinetica di rotazione attorno all'asse del disco e dell'energia cinetica di traslazione del centro di massa oppure, se si vuole, come energia cinetica di rotazione attorno all'asse istantaneo di rotazione, coincidente con la generatrice del cilindro in contatto col piano. Si ha dunque

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 = mgh.$$

Osservando che  $\omega = v/R$  e sostituendo, nella precedente, l'espressione del momento d'inerzia, si ottiene

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} mR^2 \frac{v_C^2}{R^2} + \frac{1}{2} mv_C^2 = mgh, \quad v_C = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = \sqrt{\frac{4}{3}gl \sin \varphi}.$$

Studiamo ora le condizioni perché si verifichi il rotolamento. Il modulo della forza di attrito è

$$|F_A| = I \frac{a}{R^2} = \frac{1}{3}mg \sin \varphi;$$

pertanto, se

$$\left| \frac{F_A}{R_n} \right| = \frac{1}{3} \frac{mg \sin \varphi}{mg \cos \varphi} = \frac{1}{3} \tan \varphi \leq \mu_s, \quad \tan \varphi \leq 3\mu_s,$$

il moto sarà di puro rotolamento. Se invece  $\tan \varphi > 3\mu_s$ , il disco si muove strisciando e rotolando.

In tal caso il disco ruota attorno al proprio asse, ma l'angolo di rotazione  $\theta$ , contato positivamente in verso orario, non è uguale al rapporto tra la distanza percorsa  $x$  e il raggio  $R$ , come se il disco rotolasse senza strisciare. Detto  $\mu < \mu_s$  il coefficiente di attrito dinamico ed essendo  $F_A = -\mu mg \cos \varphi$ , la prima equazione cardinale fornisce l'accelerazione del centro di massa del disco:

$$a = g(\sin \varphi - \mu \cos \varphi).$$

Dalla seconda equazione cardinale si deduce:

$$\frac{1}{2}mR^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}mR^2 \ddot{\theta} = -RF_A = R\mu g \cos \varphi.$$

Ne segue:

$$\ddot{\theta} = \frac{2\mu g \cos \varphi}{R},$$

che corrisponde a un moto rotatorio uniformemente accelerato. Accelerazione e velocità del punto di contatto  $Q$  col piano inclinato, sono

$$\ddot{x} - R\ddot{\theta} = g(\sin \varphi - 3\mu \cos \varphi), \quad \dot{x} - R\dot{\theta} = g(\sin \varphi - 3\mu \cos \varphi)t.$$

Essendo  $\mu < \mu_s$  e  $\tan \varphi > 3\mu_s$ , accelerazione e velocità hanno sempre segno positivo.



- ||| 18. Una palla da biliardo di massa  $m$  e raggio  $R$ , in quiete, viene colpita dalla stecca in modo che la direzione dell'impulso trasmesso, orizzontale, passi per il centro di massa, figura 30. Supponendo che la palla in seguito all'impulso, acquisti una velocità iniziale  $v_0$  e che il coefficiente di attrito cinetico con il tavolo sia  $\mu$ , determinare la distanza  $d$  percorsa dalla palla prima che abbia inizio il moto di puro rotolamento. Trascurare l'attrito di rotolamento.

L'impulso trasmesso alla palla passa per il centro di massa, dunque il momento angolare, rispetto a questo polo è zero. Viceversa il momento della forza di attrito è

$$M_A = F_A R = \mu mg R.$$

L'accelerazione angolare della palla risulta:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M_A}{I_C} = \frac{\mu mg R}{I_C} = \frac{\mu mg R}{\frac{2mR^2}{5}} = \frac{5}{2}\mu \frac{g}{R}.$$

La forza di attrito determina un moto ritardato con accelerazione

$$a_C = -\frac{F_A}{m} = -\frac{\mu mg}{M} = -\mu g.$$

Integrando le due relazioni precedenti si ottiene

$$\omega = \int \alpha dt = \frac{5}{2}\mu \frac{g}{R} t, \quad v_C = \int a_C dt = v_0 - \mu g t.$$

L'istante in cui si verifica il puro rotolamento si ottiene dalla condizione  $v_C = \omega R$ , cioè

$$v_0 - \mu g t = \frac{5}{2}\mu g t, \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{7}{2}\mu g t, \quad t = \frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu g}.$$

Integrando l'espressione della velocità

$$\int v_C dt = v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2,$$

e sostituendo il valore di  $t$  trovato, si ottiene

$$d = \frac{2}{7} \frac{v_0^2}{\mu g} - \frac{2}{49} \frac{v_0^2}{2\mu g} = \frac{12}{49} \frac{v_0^2}{\mu g}.$$

In figura 31 è mostrato l'andamento della velocità del centro di massa e di  $\omega R$  in funzione del tempo; all'istante  $t = (2v_0/\mu g)/7$  inizia il rotolamento puro.

Se la palla viene colpita ad un'altezza  $b$  rispetto al centro, essa assume un momento angolare  $mv_0 b = I\omega$  e, oltre alla velocità  $v_0$ , ha una velocità angolare

$$\omega = \frac{mv_0 b}{I_C} = \frac{5}{2} \frac{b}{R^2} v_0.$$

Pertanto se  $b = 2R/5$  si ottiene subito un moto di puro rotolamento. In questo caso, prescindendo dall'attrito di rotolamento, non si ha dissipazione di energia.

L'energia dissipata, fino all'istante in cui si ha puro rotolamento, è data da

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \frac{1}{2}m(v_0 - \mu g t)^2 + \frac{1}{2}I \left( \frac{5}{2} \frac{\mu g}{R} t \right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2. \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione del tempo trovata, si ottiene:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{2}{7} \left( \frac{1}{2}mv_0^2 \right).$$

- ||| 19. Un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$ , ruota inizialmente con velocità angolare  $\omega_0$  uniforme attorno al suo asse disposto orizzontalmente; quindi il

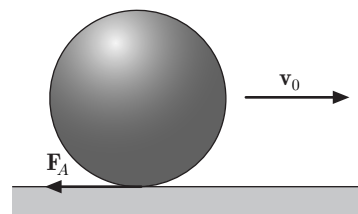


Fig. 14.30

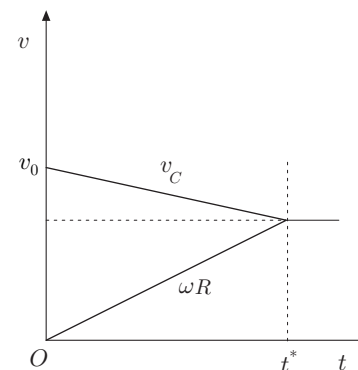


Fig. 14.31

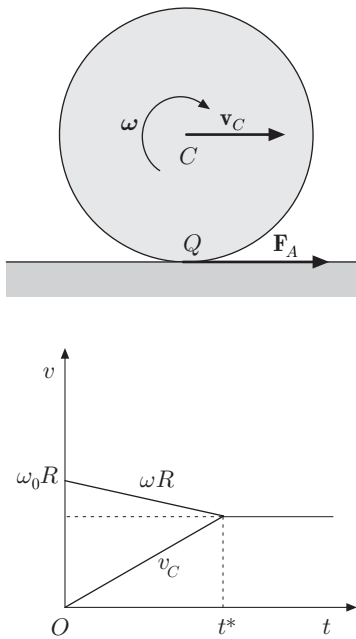


Fig. 14.32

suo bordo viene posto in contatto con un piano orizzontale scabro. Studiarne il movimento trascurando l'attrito di rotolamento.

Subito dopo il contatto il disco striscia sul piano perché, essendo la velocità del centro di massa nulla, non è soddisfatta la condizione  $v_C = \omega R$ . Dalle equazioni cardinali della dinamica si ha

$$F_A = ma_C, \quad -F_A R = I_C \frac{d\omega}{dt},$$

dove  $F_A$  è la forza di attrito dinamico, il cui verso è tale da contrastare la rotazione iniziale. Integrando le relazioni precedenti, si ottiene

$$v_C = \frac{F_A}{m} t, \quad \omega = \omega_0 - \frac{F_A R}{I_C} t.$$

Il centro di massa acquista velocità nel verso di  $F_A$  e la velocità angolare diminuisce finché non sono realizzate le condizioni di puro rotolamento, figura 32.

Dalle precedenti si ottiene l'istante in cui si verifica il rotolamento puro. Imponendo la condizione  $v_C = \omega R$ , si ha

$$\frac{F_A}{m} t = \omega_0 R - \frac{F_A}{I_C} R^2 t,$$

ed essendo  $F_A = \mu mg$  e  $I_C = mR^2/2$ , si ottiene:

$$t_1 = \frac{1}{3} \frac{\omega_0 R}{mg}.$$

La velocità del centro di massa a tale istante risulta

$$v_C = \frac{F_A}{m} t = \frac{1}{3} \omega_0 R.$$

La velocità della generatrice di contatto, per  $t < t_1$ , è

$$v = \omega R = \omega_0 R - \frac{F_A R^2}{I_C} t = \omega_0 R - 2v_C.$$

L'energia dissipata fino a che non si instaura il rotolamento puro è data da

$$\mathcal{L}_A = \left( \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \right) - \frac{1}{2} I_C \omega_0^2.$$

Tenuto conto delle relazioni stabilite e operando come nell'esempio precedente, si ottiene

$$\mathcal{L}_A = -\frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} I_C \omega_0^2 \right).$$

Durante il rotolamento, prescindendo dalla corrispondente forma di attrito, l'energia cinetica si mantiene costante.

- ||| 20. Un rocchetto di massa  $m$ , raggio interno  $r$  e raggio esterno  $R$ , è in quiete su un piano orizzontale. All'estremo libero del filo su di esso avvolto, inestendibile e di massa trascurabile, è applicata una forza  $\mathbf{F}$  orizzontale costante, figura 33. Studiare il moto del rocchetto quando rotola senza strisciare, prescindendo dall'attrito di rotolamento.

Detto  $\varphi$  l'angolo di rotazione del rocchetto e  $a_C$  l'accelerazione del suo centro di massa, è  $a_C = R\ddot{\varphi}$ . Il moto è rotatorio attorno all'asse istantaneo di rotazione che ha come traccia  $Q$ . Assumendo come polo  $Q$ , per la seconda equazione cardinale è

$$F(R - r) = I_Q \ddot{\varphi},$$

da cui segue

$$a_C = \frac{FR(R - r)}{I_Q}, \quad x_C = \frac{FR(R - r)}{I_Q} \frac{t^2}{2}.$$

Il moto del centro di massa è uniformemente accelerato e avviene nella direzione di  $\mathbf{F}$ . Dalla prima equazione cardinale, si ha

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_A = m\mathbf{a}_C.$$

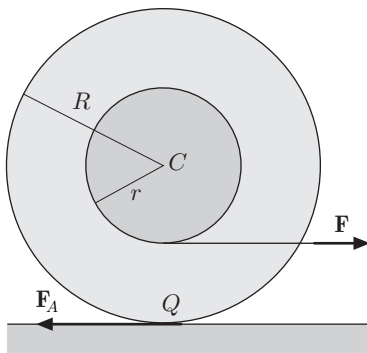


Fig. 14.33

Proiettando nella direzione del moto:

$$F + F_A = ma_C, \quad F_A = ma_C - F = \frac{mR(R-r) - I_Q}{I_Q} F,$$

che scriviamo

$$F_A = \frac{mR(R-r) - (I_C + mR^2)}{I_C + mR^2} F = -\frac{I_C + mRr}{I_C + mR^2} F.$$

La direzione della forza di attrito, componente orizzontale della reazione, è opposta a  $F$ .

Detto  $mg$  il modulo della reazione normale, il moto è di puro rotolamento, se è soddisfatta la condizione:

$$\frac{I_C + mRr}{I_C + mR^2} F \leq \mu_s mg.$$

Se la forza forma un angolo  $\theta$  con l'orizzontale, figura 34, essendo  $R \cos \theta - r$  la distanza tra la retta d'azione della forza e la retta parallela passante per  $Q$ , il momento rispetto a  $Q$  è  $F(R \cos \theta - r)$ , pertanto, procedendo come più sopra, si ottiene

$$x_C = \frac{FR(R \cos \theta - r)}{I_Q} \frac{t^2}{2}.$$

Il moto è uniformemente accelerato, ma la direzione dipende dall'angolo  $\theta$ . Infatti, se  $\cos \theta > r/R$ , il moto avviene nel verso positivo dell'asse  $x$ ; se  $\cos \theta < r/R$  nel verso opposto; se infine  $\cos \theta = r/R$ , il rocchetto resta in quiete. Perché il rocchetto non abbandoni l'appoggio, deve essere

$$mg \geq F \sin \theta.$$

Infine la condizione perchè il moto sia di puro rotolamento è

$$\frac{I_C F \cos \theta + mRrF}{I_C + mR^2} \leq \mu_s (mg - F \sin \theta).$$

- III 21. Il sistema di figura 35, costituito da due dischi omogenei coassiali, di uguale spessore, raggi  $R$  e  $2R$ , rigidamente collegati, è girevole attorno all'asse orizzontale fisso. Sulla periferia del disco più piccolo si avvolge un filo inestendibile e di massa trascurabile, il quale reca all'estremo una massa  $m$ . Sulla periferia del disco più grande agisce una forza tangenziale  $F$  costante. Determinare il movimento sapendo che la velocità angolare iniziale è  $\omega_0$ .

Detta  $M$  la massa complessiva, il momento d'inerzia dei dischi è  $17MR^2/10$ . Assumendo come unica coordinata l'angolo  $\varphi$  di rotazione, dal teorema dell'energia si ha:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{17}{10} M + m \right) R^2 (\omega^2 - \omega_0^2) = mgR\varphi - 2RF\varphi.$$

I dischi si muovono di moto rotatorio uniformemente accelerato/ritardato, con accelerazione angolare

$$\dot{\omega} = \frac{mg - 2F}{(17M/10 + m)R},$$

Se  $mg > 2F$  il moto rotatorio è uniformemente accelerato. Se  $mg = 2F$  il moto è uniforme, con velocità angolare  $\omega_0$ . Se  $mg < 2F$  il moto è ritardato e il sistema raggiunge la quiete all'istante

$$t = \frac{17M/10 + m}{2F - mg} R\omega_0.$$

Soluzione analoga hanno i problemi in cui si considerano verricelli, carrucole e sistemi simili.

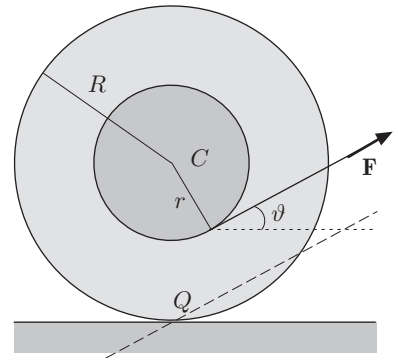


Fig. 14.34

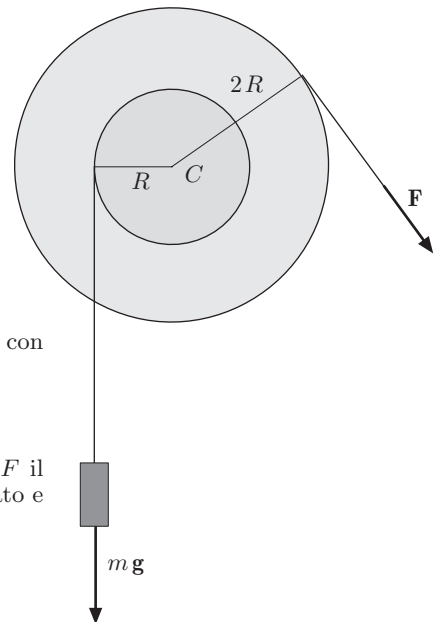


Fig. 14.35

### 7.7. Corpo rigido con un punto fisso

Consideriamo un corpo rigido con un punto  $O$  fisso, che assumiamo come polo. Il movimento è polare attorno a tale punto, nel quale viene esercitata una reazione  $\mathbf{R}$ , a priori incognita. Le equazioni cardinali della dinamica, nella terna “fissa”, sono

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (41)$$

La prima, introducendo l’accelerazione del centro di massa, permette di determinare, se interessa, la reazione vincolare,

$$\mathbf{R} = -\mathbf{F} + m\mathbf{a}_C.$$

La seconda è l’unica equazione atta a determinare il moto.

Consideriamo la terna cartesiana mobile, solidale col corpo rigido con origine in  $O$  e costituita da tre assi principali d’inerzia. Nella terna fissa l’espressione del momento angolare, rispetto ad  $O$ , è

$$\mathbf{L} = I_{xx}\omega_x \mathbf{i} + I_{yy}\omega_y \mathbf{j} + I_{zz}\omega_z \mathbf{k}, \quad (42)$$

che derivata rispetto al tempo dà:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= I_{xx}\dot{\omega}_x \mathbf{i} + I_{yy}\dot{\omega}_y \mathbf{j} + I_{zz}\dot{\omega}_z \mathbf{k} \\ &+ I_{xx}\omega_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + I_{yy}\omega_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + I_{zz}\omega_z \frac{d\mathbf{k}}{dt}. \end{aligned}$$

Ricordando le formule di Poisson, si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = I_{xx}\dot{\omega}_x \mathbf{i} + I_{yy}\dot{\omega}_y \mathbf{j} + I_{zz}\dot{\omega}_z \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}.$$

Questa espressione, denotando con  $(d\mathbf{L}/dt)_m$  la derivata temporale del momento angolare rispetto alla terna mobile, si può scrivere:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left( \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}.$$

Si osservi che

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ I_{xx}\omega_x & I_{yy}\omega_y & I_{zz}\omega_z \end{pmatrix},$$

ovvero:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z \mathbf{i} + (I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z \mathbf{j} + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y \mathbf{k}.$$

Dunque la seconda delle (41) equivale alle seguenti tre equazioni scalari:

$$\begin{aligned} I_{xx}\dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z &= M_x \\ I_{yy}\dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z &= M_y \\ I_{zz}\dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y &= M_z. \end{aligned} \quad (43)$$

Queste relazioni si chiamano *equazioni di Eulero*.

In generale, assegnato il momento risultante, note velocità angolare e posizione iniziali, tali equazioni sono atte a determinare il movimento polare del corpo. Osserviamo inoltre che la reazione vincolare non compie lavoro perché applicata al punto fisso, dunque nel teorema dell'energia cinetica intervengono solo le forze attive.

Se la sollecitazione è conservativa,  $T + U = E = cost$ , con

$$T = \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2),$$

e  $U$  funzione delle coordinate prescelte. La soluzione del sistema (43) non è semplice e richiede l'uso di concetti svolti in Meccanica Razionale; pertanto ci limiteremo a considerare alcuni aspetti fisici estremamente interessanti e suggestivi.

### || 7.1. Moto per inerzia

Supponiamo nulle le forze attive o, in generale, nullo il momento risultante, rispetto a un punto fisso  $O$ ; come avviene, ad esempio, per un corpo soggetto solamente al proprio peso e fissato nel centro di massa. La seconda delle (41) diventa

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = cost.$$

Rispetto ad un osservatore inerziale (fisso), il momento angolare è vettorialmente costante; si ha *conservazione del momento angolare*.

Essendo nullo il lavoro delle forze attive, si ha anche conservazione dell'energia cinetica:

$$I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 = 2T = cost.$$

Consideriamo il caso particolare in cui

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I;$$

l'ellissoide d'inerzia si riduce a una sfera. Si deduce che

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = cost.$$

Il moto per inerzia, rispetto a un osservatore inerziale, è rotatorio uniforme attorno ad un asse; la velocità angolare mantiene modulo e direzione iniziali.

Un secondo notevole caso particolare è quello in cui

$$I_{xx} = I_{yy} \neq I_{zz};$$

l'ellissoide d'inerzia è di rotazione attorno all'asse  $z$  della terna solidale col corpo. Si dice che il corpo ha struttura giroscopica. È il caso, per esempio, di un disco o di un volano che possono ruotare

attorno al centro di massa. Dalla terza delle (43), si deduce che  $\omega_z = \text{cost}$ . La componente della velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  secondo l'asse  $z$ , asse giroscopico, è costante. La (42) diventa:

$$\mathbf{L} = I_{xx}(\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j}) + I_{zz} \omega_z \mathbf{k},$$

pertanto:

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \frac{L^2 - I_{zz}^2 \omega_z^2}{I_{xx}^2}.$$

Ma  $L^2 = \text{cost}$ , dunque

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{cost}.$$

Infine, poiché  $\omega_z = \text{cost}$ , si deduce:

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \text{cost};$$

la velocità angolare ha modulo costante.

Il vettore velocità angolare però non è allineato col vettore momento angolare, a meno che la rotazione non avvenga attorno ad uno degli assi principali d'inerzia. Osserviamo che  $\boldsymbol{\omega}$  forma un angolo  $\theta$  costante col vettore  $\mathbf{L}$ , e un angolo  $\varphi$  anch'esso costante con l'asse  $z$  della terna solidale col corpo. Infatti, figura 36, è

$$\cos \theta = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{\omega L} = \frac{I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2}{\omega L}.$$

Questa espressione è il rapporto tra il doppio dell'energia cinetica e il prodotto  $L\omega$ , entrambi costanti, per quanto visto prima. Siccome  $\cos \theta$  è costante, lo è anche  $\theta$ . Analogamente:

$$\cos \varphi = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}}{\omega} = \frac{\omega_z}{\omega};$$

si conclude che anche  $\varphi$  è costante.

Pertanto  $\boldsymbol{\omega}$  è un vettore di modulo costante che forma, rispetto a un osservatore inerziale, un angolo  $\theta$ , costante, con la direzione di  $\mathbf{L}$  e un angolo  $\varphi$ , costante, con l'asse  $z$ , solidale col corpo mobile. In figura 36, per comodità, si è assunto l'asse  $\zeta$  della terna fissa coincidente con  $\mathbf{L}$ . Il luogo degli assi istantanei di rotazione, visti dall'osservatore fisso, è un cono rotondo di vertice  $O$  e semiapertura  $\theta$ ; mentre il luogo di questi assi, visti dall'osservatore solidale col corpo mobile, è un cono rotondo di vertice  $O$  e semiapertura  $\varphi$ . Questi due coni si chiamano *coni di Poincaré*; il movimento polare avviene come se il cono mobile rotolasse senza strisciare sul cono fisso, con velocità angolare  $\Omega$  di modulo costante. Il moto si dice di *precessione regolare*. Ponendo

$$\Omega = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{xx}} \omega_z,$$

le (43) diventano

$$\dot{\omega}_x + \Omega \omega_y = 0, \quad \dot{\omega}_y - \Omega \omega_x = 0.$$

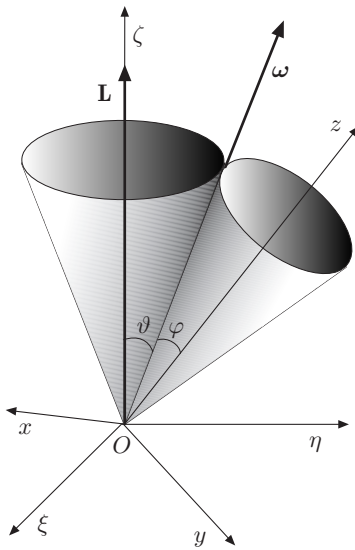


Fig. 14.36

Queste relazioni si integrano facilmente; derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\ddot{\omega}_x + \Omega \dot{\omega}_y = 0, \quad \ddot{\omega}_y - \Omega \dot{\omega}_x = 0.$$

Sostituendo le espressioni di  $\dot{\omega}_x$ ,  $\dot{\omega}_y$ , si ottengono equazioni del tipo armonico, le cui soluzioni sono

$$\omega_x = A \cos \Omega t, \quad \omega_y = A \sin \Omega t,$$

con  $A$  costante. Dunque le componenti secondo  $x$  e  $y$  della velocità angolare descrivono una circonferenza con velocità angolare uguale a  $\Omega$ , *velocità angolare di precessione*.

Se l'asse di rotazione coincide con un asse principale d'inerzia, la velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  è parallela al momento angolare  $\mathbf{L}$ ; ovviamente non si ha moto di precessione. Se l'ellissoide d'inerzia ha tre assi distinti il problema risulta piuttosto complesso; si rimanda dunque ai testi di Meccanica Razionale.

## || 7.2. Assi permanenti di rotazione

Dimostriamo ora che tra gli infiniti moti per inerzia di un corpo rigido con un punto fisso, ve ne sono certi per i quali la velocità angolare è un vettore costante e parallelo al momento angolare. Nel caso che il corpo abbia struttura giroscopica,

$$I_{xx} = I_{yy} \neq I_{zz},$$

poiché  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  sono costanti, dalle (43) si deduce che dev'essere  $\omega_z = 0$ , oppure  $\omega_x = \omega_y = 0$ . Sia nel primo che nel secondo caso  $\boldsymbol{\omega}$  è diretto lungo un asse principale d'inerzia, e risultando  $\mathbf{L}$  proporzionale alla velocità angolare, si deduce che  $\boldsymbol{\omega}$  è un vettore costante. Il moto è rotatorio uniforme attorno a un asse principale d'inerzia che rimane fisso rispetto all'osservatore inerziale.

Questa conclusione è ovviamente valida se

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz},$$

Nel caso che i momenti d'inerzia principali siano distinti, la conclusione è la stessa. Infatti, per  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  costanti, in assenza di momenti esterni, dalle (43) si deduce:

$$\omega_y \omega_z = \omega_z \omega_x = \omega_x \omega_y = 0,$$

ossia due delle tre componenti della velocità angolare devono essere nulle. Dunque la velocità angolare ha modulo costante ed è diretta lungo un asse principale di inerzia. Se, per esempio, quest'asse è quello  $z$ , sarà  $\mathbf{L} = I_{zz} \omega_z \mathbf{k}$ . Ma  $\mathbf{L}$  è costante, quindi  $\mathbf{k}$  dovrà essere costante. Possiamo affermare dunque che, in ogni caso, le rotazioni uniformi attorno agli assi principali d'inerzia,

fissi rispetto ad un osservatore inerziale, sono *permanenti* e permanenti si dicono i rispettivi assi.

### || 7.3. Giroscopio

Un giroscopio, costituito da un corpo rigido che può liberamente ruotare attorno al centro di massa  $C$ , per il quale

$$I_{xx} = I_{yy} \neq I_{zz},$$

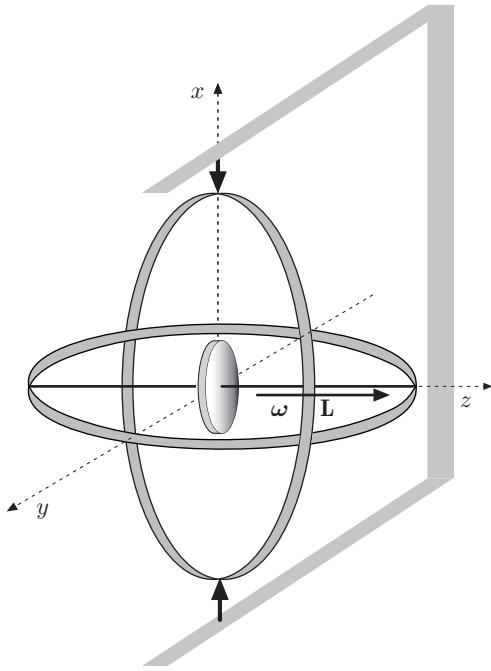


Fig. 14.37

è realizzato come mostrato in figura 37. Un volano può ruotare attorno al suo asse, asse  $z$ , baricentrale d'inerzia; esso è sostenuto mediante due anelli centrati nel centro di massa e liberi di ruotare attorno a due assi tra loro perpendicolari. Questa disposizione si chiama sospensione cardanica e realizza la possibilità di rotazione attorno a tre assi baricentrali mutuamente ortogonali, senza che il giroscopio sia influenzato dall'azione di momenti dovuti alla rotazione terrestre o prodotti dal moto del veicolo al quale il supporto del giroscopio è fissato. È questo lo schema di un *giroscopio ad asse  $z$* .

Il giroscopio, una volta posto in rotazione, assume un momento angolare  $\mathbf{L}$  vettorialmente costante, diretto come l'asse  $z$ ; dunque se esso volge in una certa direzione dello spazio, tale direzione si mantiene inalterata. Ciò si può verificare facendo ruotare il supporto del giroscopio di un certo angolo; l'asse del giroscopio ruota a sua volta in maniera tale da mantenere la direzione iniziale di  $\mathbf{L}$ . Supponiamo, per esempio, che un giroscopio venga posto in rotazione al polo nord, con l'asse ortogonale all'asse terrestre, figura 38; l'osservatore solidale con la terra vede ruotare l'asse del giroscopio in senso orario e compiere un giro completo in 24 ore; in effetti l'orientazione del giroscopio è rimasta invariata, mentre la terra ha compiuto la sua rotazione completa. Anche questa prova della rotazione terrestre è dovuta a Foucault.

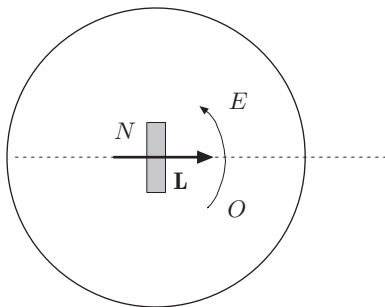


Fig. 14.38

Se l'asse del giroscopio è volto lungo l'equatore nella direzione est ovest, inizialmente parallelo alla superficie terrestre, l'osservatore solidale con la terra, vede il giroscopio disposto, in successione, come in figura 39. In realtà il giroscopio, rispetto alle stelle fisse, ha mantenuto inalterata la direzione iniziale.



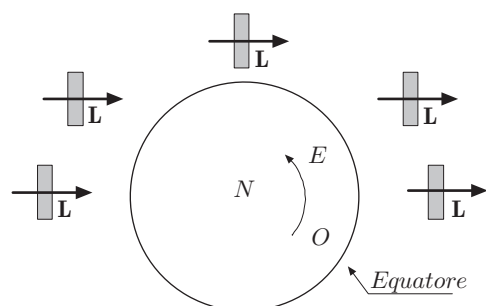


Fig. 14.39

#### || 7.4. Moto in presenza di un momento esterno

Un giroscopio ad asse  $z$  in rotazione, con  $\omega_z$  molto elevata, mostra la tendenza a mantenere inalterata la direzione dell'asse di rotazione. Se infatti, figura 40, viene applicata in  $A$  una forza  $\mathbf{F}$ , ortogonale al piano  $y-z$ , allo scopo di deviare l'asse del giroscopio, esso mostra una inattesa tenacia a mantenere la sua direzione. Neppure forze atte a muovere il supporto oppure forze apparenti dovute alla rotazione terrestre o che si manifestano su un veicolo in moto non inerziale, purché non molto intense, riescono allo scopo. Questa proprietà è dimostrata rigorosamente in Meccanica Razionale; per i nostri scopi è sufficiente una descrizione sperimentale.

L'esperienza mostra che se la forza ha intensità sufficiente, si riesce a vincere la tenacia dell'asse giroscopico facendolo deviare. Ma contro ogni intuizione, lo spostamento elementare del punto di applicazione della forza risulta perpendicolare a  $\mathbf{F}$ , e precisamente parallelo al momento  $\mathbf{M}$  della forza rispetto al centro di massa del giroscopio. Se dunque la forza è applicata come in figura 40, il giroscopio ruota attorno all'asse  $x$  e non attorno all'asse  $y$  (moto di precessione). Analogamente se la forza viene applicata in  $B$ , nel piano  $y-z$ , figura 41, il giroscopio precece attorno all'asse  $y$ . Questo comportamento è diretta conseguenza della seconda equazione cardinale, che possiamo scrivere:

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt.$$

Riferendoci al caso in cui la forza è applicata in  $A$ , poiché il momento angolare varia solo in direzione, figura 42, è

$$d\mathbf{L} = L \frac{d\mathbf{k}}{dt}dt.$$

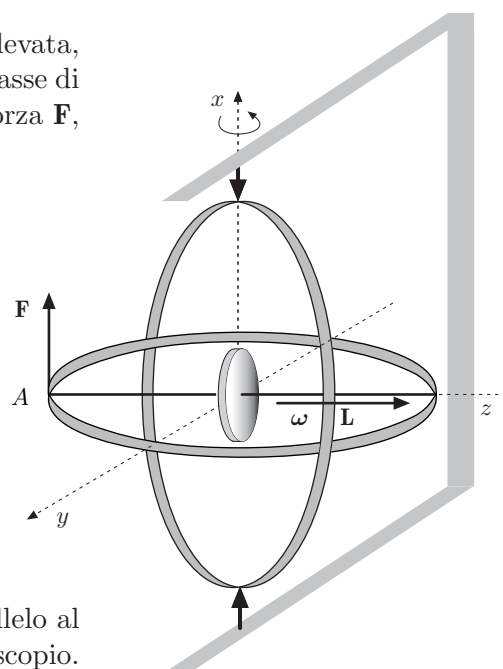


Fig. 14.40

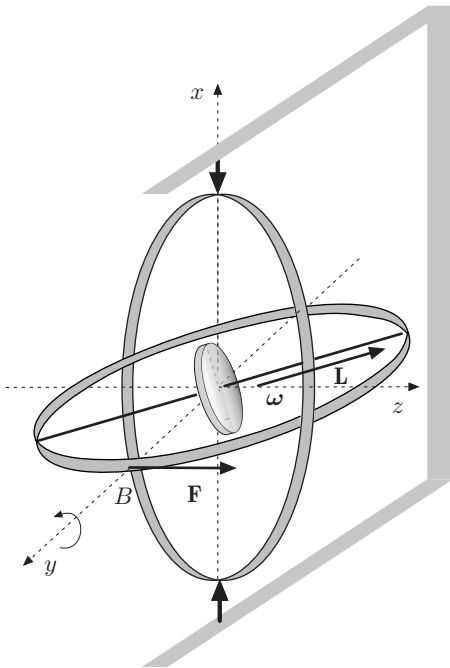


Fig. 14.41

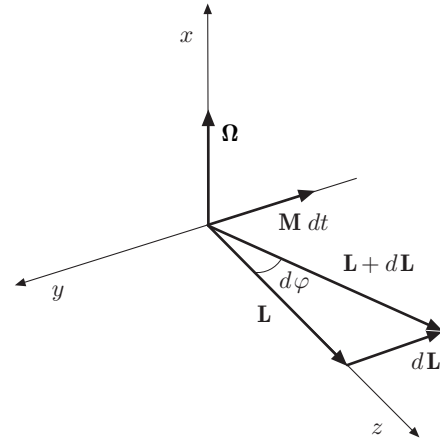


Fig. 14.42

Ma, ricordando le formule di Poisson:

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k},$$

dove  $\boldsymbol{\Omega} = d\varphi/dt$  è la velocità angolare di precessione, si ha:

$$d\mathbf{L} = L(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k})dt = (\boldsymbol{\Omega} \times L\mathbf{k})dt = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L})dt = \mathbf{M}dt. \quad (44)$$

Il vettore  $\mathbf{L}$  ruota di un angolo  $d\varphi$  in senso antiorario oppure in senso orario se la forza è opposta a quella di figura. Si può ritenere che l'asse del giroscopio tenda ad allinearsi col momento sollecitante.

La (44) si scrive:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L},$$

che è una soluzione, *ma non la più generale*, della seconda equazione cardinale. Il modulo della velocità angolare di precessione, nel caso in esame, è dato da

$$\Omega = \frac{M}{L}.$$

### || 7.5. Moto di un corpo rigido pesante con un punto fisso

Consideriamo un corpo mobile attorno a un punto fisso  $O$  e soggetto al proprio peso. Detto  $\hat{\mathbf{u}}$  il versore dell'asse  $\zeta$  verticale

ascendente del riferimento fisso,  $C$  il centro di massa del corpo e  $mg$  il suo peso, è

$$\mathbf{M} = -\mathbf{r}_C \times mg\hat{\mathbf{u}},$$

essendo  $\mathbf{r}_C$  il vettore che individua il centro di massa rispetto ad  $O$ . Poiché la componente di  $\mathbf{M}$ , secondo la verticale è nulla, deduciamo che la componente verticale del momento angolare è costante:

$$\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \text{cost.}$$

Questa relazione costituisce un integrale primo del moto. Un secondo integrale primo è quello dell'energia; detta  $\zeta_C$  la quota di  $C$ , si ha

$$T + mg\zeta_C = E = \text{cost.}$$

Si dimostra in Meccanica Razionale che i due integrali primi non sono sufficienti per determinare il movimento. Occorre una terza relazione da porre accanto alle precedenti; ad esempio, che sia costante la velocità angolare del corpo attorno all'asse di rotazione.

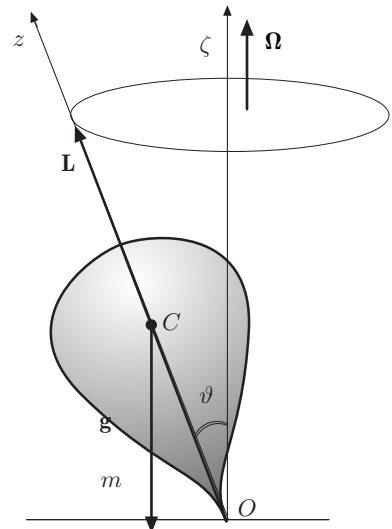


Fig. 14.43

|| 7.6. Moto di una trottola pesante

La soluzione del moto di una trottola pesante richiede l'impiego di metodi avanzati di Meccanica Analitica; perciò ci limiteremo a dare una soluzione particolare, nell'ipotesi che la trottola ruoti con velocità angolare molto elevata attorno al suo asse, asse  $z$  della terna con essa solidale. Supponiamo che tale asse formi un angolo  $\theta$  con l'asse  $\zeta$  verticale della terna fissa, figura 43; la trottola è soggetta al momento della forza peso, di modulo

$$M = mg\zeta_C \sin \theta.$$

Se è soddisfatta la relazione

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L},$$

la trottola compie un moto di precessione regolare. Poiché il modulo della (45) è

$$|\mathbf{M}| = \Omega L \sin \theta,$$

uguagliando le precedenti, si ottiene

$$\Omega = \frac{mg\zeta_C \sin \theta}{L \sin \theta} = \frac{mg\zeta_C}{I_{zz}\omega}.$$

La velocità di precessione è indipendente dall'angolo di inclinazione.

In figura 44 è mostrato lo schema vettoriale del moto di precessione; nell'intervallo di tempo infinitesimo  $dt$ , il vettore  $\mathbf{L}$ , di modulo costante, cambia la sua direzione da  $OA$  a  $OB$ , dunque subisce una variazione  $d\mathbf{L}$ , parallela al momento  $\mathbf{M}$ . L'estremo del

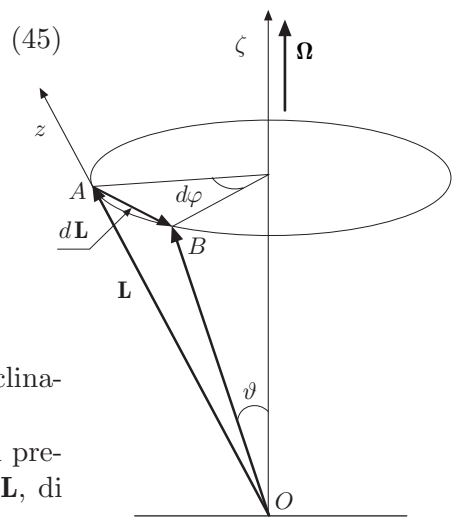


Fig. 14.44

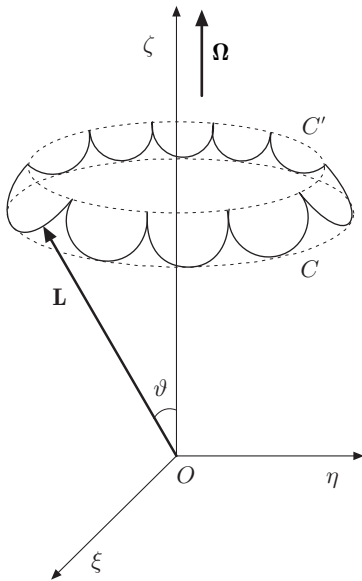


Fig. 14.45

momento angolare  $\mathbf{L}$  descrive una circonferenza di raggio  $L \sin \theta$  il quale, a sua volta, ruota di un angolo infinitesimo  $d\varphi$ . Avendo definito la velocità angolare di precessione come  $\Omega = d\varphi/dt$ , dagli elementi geometrici della figura e dalla relazione  $|d\mathbf{L}| = M dt$ , si deduce facilmente il risultato ottenuto.

In realtà la trottola, oltre al moto di precessione, compie un movimento a *festone* più o meno complicato, come mostrato qualitativamente in figura 45, detto moto di nutazione. L'angolo  $\theta$  non resta costante, ma oscilla tra due valori fissi in modo che l'estremo di  $\mathbf{L}$ , durante la precessione, oscilli tra due circonferenze  $C$  e  $C'$ . Ciò dipende dal fatto che se essa precessa attorno all'asse  $\zeta$ , possiede anche un momento angolare rispetto a tale asse. Il momento angolare totale non è  $I_{zz} \omega$ , come si è supposto, poiché la velocità angolare risultante è  $\omega + \Omega$ . Tuttavia se  $\Omega \ll \omega$ , il momento angolare della trottola rispetto a  $\zeta$  si può trascurare, come implicitamente abbiamo fatto; allora la (45) è soddisfatta.

## Complementi

### GIROBUSSOLA

La girobussola è costituita da un pendolo giroscopico, cioè da un pendolo contenente un giroscopio ad asse  $z$  orizzontale, tenuto in rapida rotazione perché rotore di un motorino elettrico. Il pendolo è sospeso a un punto  $O$ , solidale con la terra, sicché è girevole attorno a qualunque asse orizzontale, figura 46. All'equilibrio il centro di massa della girobussola è disposto lungo la verticale. Supponiamo che il piano della figura sia il piano dell'equatore, visto da Sud, e che il pendolo inizialmente sia nella posizione di equilibrio, in corrispondenza ad un meridiano  $G$ ; l'asse del giroscopio sia volto verso est.

A causa della rotazione terrestre, il pendolo passa dalla configurazione di equilibrio (A) a quella (B) della figura. L'asse del giroscopio mantiene la sua orientazione rispetto alle stelle fisse, dunque il centro di massa del pendolo non è più lungo la verticale. Il momento  $\mathbf{M}$  della forza peso rispetto ad  $O$ , tende a riportare il centro di massa sulla verticale (tratteggiata). Tale momento è ortogonale al piano della figura puntando all'interno del foglio, pertanto il momento angolare tende ad allinearsi con esso. Ha luogo un moto di precessione attorno alla verticale, a causa del quale  $\mathbf{L}$  attraversa il piano meridiano. In corrispondenza, il momento del peso è massimo e tende a far ruotare la girobussola nel verso intrapreso, figura 47 (C). A causa della rotazione terrestre, il pendolo si dispone come in figura 47 (D), dove il momento della forza peso è nullo, e successivamente nella posizione (E), da dove la girobussola inverte il moto di precessione, passando ancora attraverso il piano meridiano e iniziando un nuovo ciclo.

Alla latitudine  $\lambda$  l'effetto della rotazione terrestre è ridotto in ragione di  $\cos \lambda$ . In pratica la girobussola, inizialmente viene disposta in modo da formare un angolo di pochi gradi  $N-E$ . Il suo moto di precessione  $N-E$ ,  $N-O$  e viceversa, viene opportunamente smorzato in modo che, dopo qualche oscillazione, essa indichi con sufficiente prontezza il vero nord geografico. La girobussola così schematizzata è immune da perturbazioni magnetiche, derivanti da strutture di acciaio e da circuiti elettrici, e sostituisce in molti casi la bussola magnetica, in particolare nella navigazione aerea commerciale e nei sottomarini.

### PRECESSIONE DEGLI EQUINOZI

Questo fenomeno, noto fin dai tempi di Ipparco (130 a. C.), consiste nella precessione dell'asse terrestre attorno alla normale all'eclittica. La terra non è perfettamente sferica, ma ha piuttosto la forma di un ellissoide "rigonfio" all'equatore; questa asimmetria comporta una differente forza di attrazione da

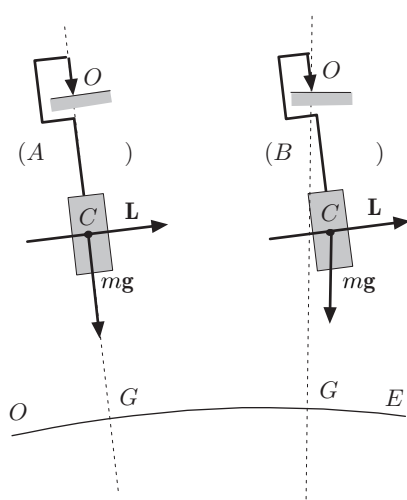


Fig. 14.46

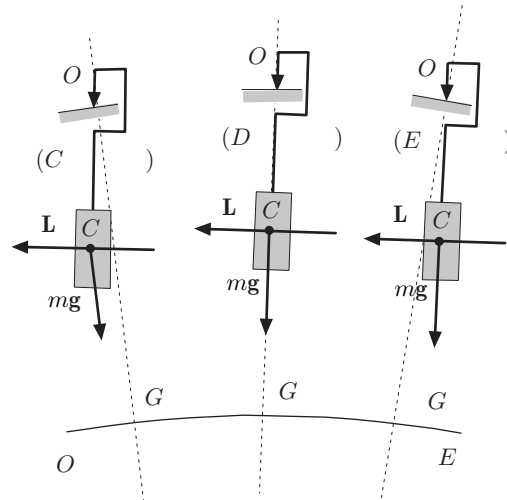


Fig. 14.47

parte del sole e della luna ed ha notevoli conseguenze sul corso delle stagioni e sul clima.

Consideriamo solo l'effetto dell'attrazione del sole; l'effetto dell'attrazione della luna è dello stesso ordine di grandezza poichè la sua distanza dalla terra è notevolmente inferiore. In figura 48 è mostrata la posizione della terra, il cui asse è inclinato di  $23^\circ 27'$  rispetto alla normale all'eclittica, ai solstizi e agli equinozi; il rigonfiamento dell'equatore è schematizzato, per chiarezza, con due sferette che subiscono forze di attrazione diverse. In corrispondenza ai solstizi l'effetto di tale diversità è massimo; sulla terra viene esercitato un momento che tende a "raddrizzare" l'asse terrestre; in corrispondenza agli equinozi l'effetto è nullo. La terra, pur essendo animata da una modesta velocità angolare, ha un momento d'inerzia elevato, dunque si comporta come un grande giroscopio. Ne segue un moto di precessione dell'asse terrestre che descrive un cono attorno alla normale all'eclittica; il periodo di tale moto è di 25920 anni, corrispondente a una frequenza di  $50''$  d'arco l'anno.

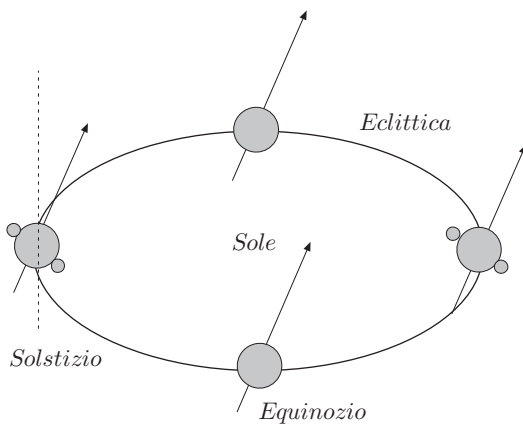


Fig. 14.48

Gli effetti giroscopici sono notevoli in molti sistemi: nelle ruote dei veicoli, nei motori rotativi, nelle biciclette ecc. È a tutti ben noto che nei veicoli a due ruote la stabilità è assicurata durante il moto e che, per effettuare una curva, non occorre usare il manubrio, ma basta inclinarsi convenientemente a destra o a sinistra.

.....