

13. Statica dei sistemi

1. Sistemi di punti materiali

Su ogni punto del sistema agiscono forze interne e forze esterne che, a loro volta, si possono distinguere in forze *attive* e reazioni vincolari.

Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del sistema è che ogni punto sia in equilibrio sotto l'azione di tutte le forze su di esso agenti, esterne ed interne, attive e reattive; ossia che *la risultante di tutte le forze agenti su ogni punto sia nulla*.

Segue che senza alterare l'equilibrio di un sistema, si può sostituire alle forze agenti su un punto, altre forze ad esso applicate la cui risultante sia nulla.

1.1. Sistemi rigidi

Un sistema di punti materiali si dice rigido quando ad esso è imposto il vincolo della rigidità, paragrafo 1-III; dunque le considerazioni che verranno fatte sono valide per i corpi rigidi.

L'esperienza permette di formulare i seguenti postulati fondamentali della statica dei sistemi rigidi:

a) *L'equilibrio di un sistema rigido non viene alterato se alle forze applicate in un punto del sistema si sostituisce la loro risultante applicata nello stesso punto, o viceversa si sostituisce ad una forza applicata in un punto altre forze aventi come risultante la forza assegnata.*

b) *L'equilibrio di un sistema rigido non viene alterato se si trasporta il punto di applicazione di una forza lungo la sua retta di azione.*

c) *L'equilibrio di un sistema rigido non viene alterato se alle forze agenti in un suo qualsiasi punto, viene aggiunto un sistema di forze di risultante nulla.* Per esempio, due forze opposte aventi la stessa retta di azione.

Si deduce che le operazioni descritte nei postulati enunciati, se necessario applicate più volte, permettono di passare da un sistema di forze S ad un altro S' , senza alterare l'equilibrio di un

corpo rigido. In tal caso le operazioni che permettono di passare da S a S' si dicono *operazioni invariantive* e i due sistemi di forze *equipollenti*. Poiché le operazioni invariantive non alterano il sistema di forze applicato, si trae che i sistemi di forze equipollenti hanno la stessa risultante e uguale momento risultante rispetto allo stesso polo. Ad esempio, per il postulato b), sono equipollenti due forze rappresentate dallo stesso vettore ed aventi la stessa retta di azione ma non lo stesso punto di applicazione.

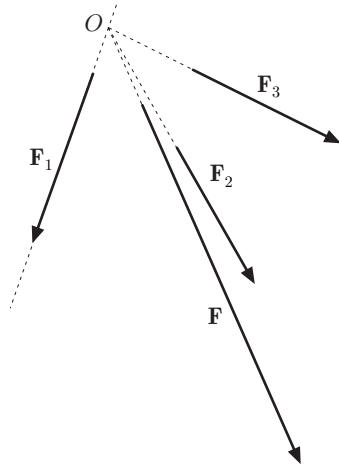


Fig. 13.1

1.2. Sistemi elementari di forze

FORZE CONCORRENTI

Se le rette d'azione delle forze applicate concorrono tutte in un punto O , è possibile trasportare le forze in tale punto e sommarle vettorialmente, figura 1. La risultante \mathbf{F} può essere applicata in O oppure, per il postulato b), in qualsiasi punto della retta d'azione di \mathbf{F} , passante per O . Pertanto *un sistema di forze concorrenti è equipollente ad una unica forza, applicata ad un qualunque punto della sua retta di azione.*

DUE FORZE PARALLELE A RISULTANTE NON NULLA

Questo caso può rientrare nel precedente se si suppone che O sia posto all'infinito; ne segue che esiste sempre una risultante applicata ad un punto qualunque della sua retta di azione.

Per determinare tale retta, consideriamo il caso di due forze parallele \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , applicate rispettivamente in P_1 e P_2 , figura 2.

Si aggiungano in tali punti due forze opposte $-\mathbf{F}$ e \mathbf{F} , dirette come la congiungente P_1P_2 . Sommando \mathbf{F}_1 con $-\mathbf{F}$ e \mathbf{F}_2 con \mathbf{F} , si ottengono due forze concorrenti in O , la cui risultante ha una retta d'azione che interseca il segmento P_1P_2 in Q . Il punto Q è tale che, se \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 hanno lo stesso verso, divide internamente il segmento P_1P_2 in parti inversamente proporzionali a \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 . Infatti consideriamo le coppie di triangoli simili P_1AB , OP_1Q e P_2CD , OQP_2 ; si ha

$$\frac{P_1Q}{AB} = \frac{OQ}{F_1}, \quad \frac{P_2Q}{CD} = \frac{OQ}{F_2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{P_1Q}{P_2Q} = \frac{F_2}{F_1}.$$

L'operazione può essere reiterata se le forze sono più di due. Se le forze hanno verso opposto e hanno risultante diversa da zero, il procedimento è analogo. Il problema generale andrà considerato nel seguito.

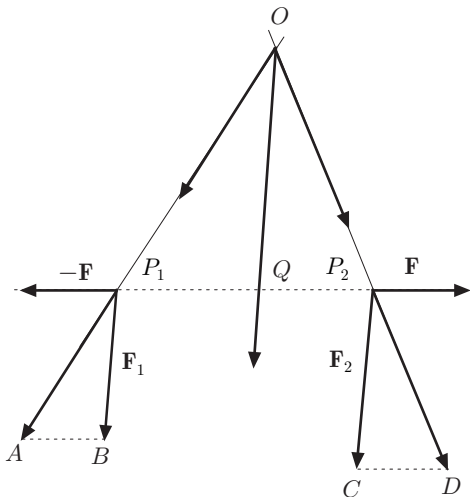


Fig. 13.2

DUE FORZE A RISULTANTE NULLA

Un sistema di forze a risultante nulla \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$, applicate in due punti distinti P e Q costituisce una *coppia*. Il piano cui appartengono le forze si chiama piano della coppia e la distanza tra le due

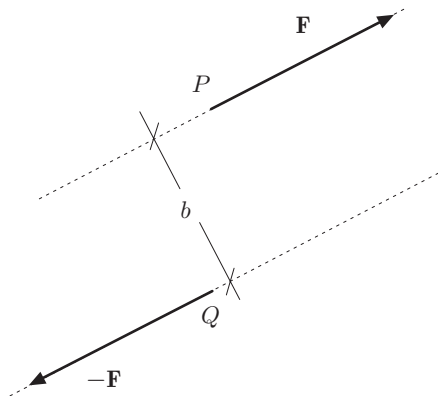


Fig. 13.3

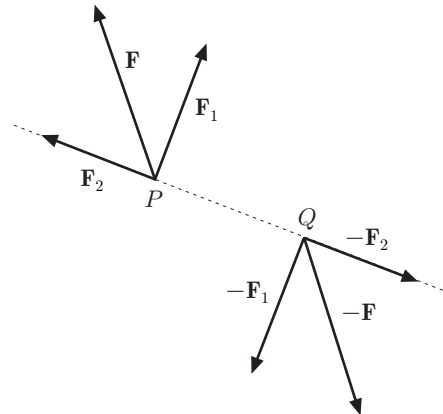


Fig. 13.4

rette d'azione *braccio* b della coppia, figura 3. Una coppia può essere trasformata in un'altra, in cui le forze che la costituiscono risultano perpendicolari alla congiungente i loro punti di applicazione. Infatti, figura 4, si consideri la coppia costituita dalle forze \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$, applicate in P e Q ; si scomponga \mathbf{F} nelle due forze \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 , nelle direzioni ortogonale e parallela al segmento PQ . Nello stesso modo si scomponga $-\mathbf{F}$ nelle forze $-\mathbf{F}_1$ e $-\mathbf{F}_2$. Le forze \mathbf{F}_1 e $-\mathbf{F}_1$ costituiscono la nuova coppia; infatti \mathbf{F}_2 e $-\mathbf{F}_2$ hanno risultante nulla perché si trovano sulla stessa retta di azione.

2. Momenti

Il momento di un vettore rispetto a un polo O è stato definito nel paragrafo 2-IX. Va ricordato che il momento gode delle proprietà del prodotto vettoriale e varia al variare del polo.

Definiamo momento \mathbf{M} di una forza \mathbf{F} , applicata in un punto P , rispetto ad un polo O , la grandezza

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

dove $\mathbf{r} = (P - O)$. Se O' è un nuovo polo, figura 5, essendo

$$\mathbf{r} = (O' - O) + \mathbf{r}', \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (O - O'),$$

il momento della forza rispetto ad O' risulta:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = [\mathbf{r} + (O - O')] \times \mathbf{F} = \mathbf{M} + (O - O') \times \mathbf{F}. \quad (1)$$

In particolare, se O' appartiene alla retta passante per O e parallela a \mathbf{F} , è ovviamente $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$.

2.1. Momento assiale

Sia una forza \mathbf{F} applicata in un punto del corpo rigido e una retta orientata, cioè un asse, definito in direzione dal versore $\hat{\mathbf{u}}$;

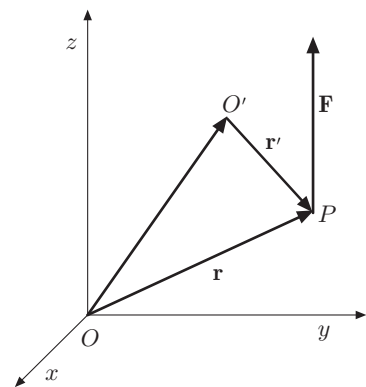


Fig. 13.5

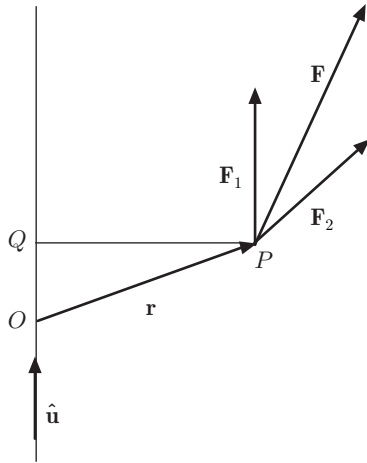


Fig. 13.6

assegnato un polo O sull'asse, definiamo momento assiale della forza la componente secondo tale asse del momento della forza rispetto ad O . Indicando questa quantità scalare con M_a , si ha

$$M_a = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{u}}. \quad (2)$$

Il significato fisico del momento assiale appare evidente dalla figura 6. Scomponiamo \mathbf{F} in un componente \mathbf{F}_1 e in un componente \mathbf{F}_2 , rispettivamente parallelo e ortogonale all'asse; analogamente scomponiamo \mathbf{r} nei componenti $\mathbf{r}_1 = (Q - O)$ e $\mathbf{r}_2 = (P - Q)$. Il momento assiale si scrive:

$$\begin{aligned} M_a &= [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)] \cdot \hat{\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

Si osservi che tutti i prodotti tripli, eccetto l'ultimo sono nulli; pertanto

$$M_a = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{u}}.$$

Soltanto il componente della forza ortogonale all'asse, è attivo ai fini della rotazione del corpo rigido attorno all'asse.

Se assumiamo sull'asse un polo O' diverso, essendo $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (O - O')$, il momento assiale diventa

$$M'_a = \mathbf{M}' \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{u}} + (O - O') \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{u}}.$$

Ma il secondo termine è nullo perché $(O - O')$ e $\hat{\mathbf{u}}$ sono paralleli; se ne trae che il momento assiale di una forza è indipendente dal polo scelto sull'asse. Si riconosce altresì che questa conclusione è vera qualunque sia il punto di applicazione della forza sulla sua retta d'azione.

In particolare, il momento assiale è nullo quando l'asse e la retta d'azione della forza sono paralleli. Se la retta di azione della forza giace in un piano ortogonale all'asse, risulta

$$M_a = \pm bF,$$

essendo b il braccio, ossia la distanza tra la retta d'azione di \mathbf{F} ed O , punto di intersezione dell'asse col piano; il segno dipende dal verso positivo fissato per il momento; figura 7.

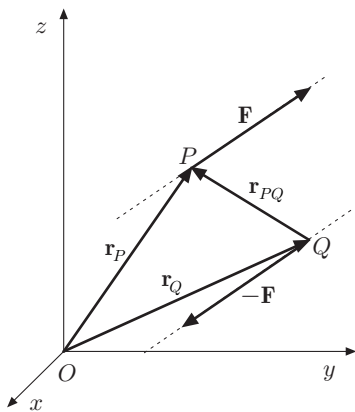


Fig. 13.7

2.2. Momento di una coppia

Il momento risultante di due forze \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$, applicate in P e Q , costituenti la coppia, rispetto a un polo O , figura 8, è dato da

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_P \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_Q \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F}.$$

Fig. 13.8

Ma $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_{PQ}$ è il vettore che congiunge i punti di applicazione delle forze, dunque il momento risultante, momento della coppia, diventa

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{PQ} \times \mathbf{F}, \quad (3)$$

ed ha modulo:

$$M = r_{PQ} F \sin \theta = Fb,$$

dove b è il braccio della coppia, cioè la distanza tra le rette d'azione delle forze. Dalla (3) si deduce che il momento di una coppia è *indipendente dal polo*.

Si deduce inoltre che due coppie, giacenti nello stesso piano o su piani paralleli, sono equivalenti se

$$F_1 b_1 = F_2 b_2.$$

Una coppia di braccio b_1 , costituita dalle forze $\mathbf{F}_1, -\mathbf{F}_1$, è equivalente ad una qualsiasi altra coppia, giacente nello stesso piano, se l'una può essere trasformata nell'altra per mezzo di operazioni invariantive. Consideriamo infatti due rette parallele arbitrarie, distanti b_2 , che intersecano rispettivamente le rette d'azione delle forze assegnate nei punti A e B , D e C , figura 9. Si trasporti la forza \mathbf{F}_1 in A e la forza $-\mathbf{F}_1$ in C ; quindi si scomponga \mathbf{F}_1 nelle forze \mathbf{F}_2 , diretta come AD , e \mathbf{R} diretta come AC ; analogamente si scomponga $-\mathbf{F}_1$ nelle forze $-\mathbf{F}_2$, diretta come CB , e $-\mathbf{R}$ diretta come AC . Il modulo del momento di \mathbf{F}_1 rispetto al polo C è $F_1 b_1$; ma $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{R}$, dunque il modulo del momento, rispetto allo stesso polo, di queste due forze componenti è $F_2 b_2$, essendo nullo il momento di \mathbf{R} , perché C appartiene alla sua retta d'azione. Segue che le coppie costituite dalle forze $\mathbf{F}_1, -\mathbf{F}_1$ e dalle forze $\mathbf{F}_2, -\mathbf{F}_2$ sono equivalenti.

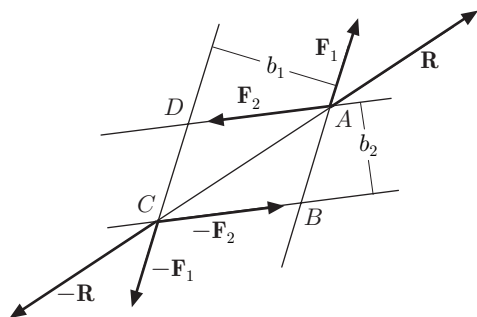


Fig. 13.9

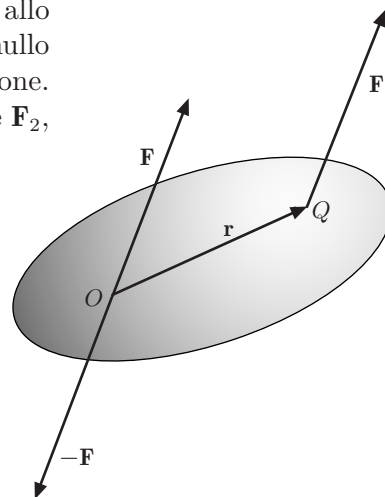


Fig. 13.10

|| 2.3. Sistema forza-coppia

L'aggiunta di una coppia opportuna, permette di trasportare una forza \mathbf{F} , applicata in un punto Q di un corpo rigido, ad un altro punto O arbitrario dello stesso corpo. Infatti si voglia trasportare la forza \mathbf{F} da Q ad O , figura 10; in quest'ultimo punto

possiamo applicare le forze opposte \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$, sistema nullo, ottenendo una forza applicata in O e la coppia costituita dalle forze \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$, rispettivamente applicate in Q ed O . Pertanto la forza \mathbf{F} può essere trasportata in punto di applicazione diverso, purché insieme ad essa si consideri una coppia di momento uguale al momento della forza rispetto ad O , ossia:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

dove \mathbf{r} è il vettore che individua la posizione di Q rispetto ad O . Si tenga presente che il momento non è un vettore applicato. Il sistema così ottenuto si dice sistema *forza-coppia*.

Viceversa un tale sistema si può sempre ridurre ad una sola forza applicata in Q spostando, nel piano ortogonale al momento della coppia, la forza finché il suo momento rispetto ad O non sia uguale a \mathbf{M} .

|| 2.4. Momento di un sistema di forze

Assegnato un sistema di forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$, applicate nei punti P_1, P_2, \dots di un corpo rigido e scelto un polo O , si definisce momento del sistema di forze la somma vettoriale dei momenti delle singole forze rispetto ad O :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i.$$

Analogamente si definisce momento assiale del sistema di forze rispetto ad un asse a , di versore $\hat{\mathbf{u}}$, la grandezza

$$M_a = \sum_i \mathbf{M}_i \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{u}}.$$

Se, in particolare, le forze sono concorrenti nello stesso punto, detta \mathbf{r} la posizione di tale punto rispetto al polo, si ha

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \dots = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Il momento risultante è uguale al momento della risultante come stabilito al paragrafo 2-IX, (*Teorema di Varignon*).

Risultato analogo si ottiene per il momento assiale:

$$M_a = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{u}}.$$

Supponiamo ora di assumere un polo O' ; in conformità alla (1), il momento risultante del sistema di forze è:

$$\mathbf{M}' = \sum_i \mathbf{M}_i + \sum_i (O - O') \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M} + (O - O') \times \mathbf{F}, \quad (4)$$

che stabilisce la relazione con cui varia il momento del sistema di forze al variare del polo. Dalla (4) si deduce che $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$, se la risultante \mathbf{F} delle forze è nulla oppure, nel caso che sia diversa da zero, se $(O - O')$ ed \mathbf{F} sono paralleli.

Moltiplicando scalarmente per \mathbf{F} ambo i membri della (4), si ottiene:

$$\mathbf{M}' \cdot \mathbf{F} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{F} = \text{cost.} \quad (5)$$

Questa relazione si chiama *invariante scalare o trinomio invariante*. Esso costituisce un elemento caratteristico del sistema di forze ed esprime che la componente del momento risultante \mathbf{M} secondo \mathbf{F} , e viceversa, è sempre costante e indipendente dal polo. Va notato che nella (4) compare la risultante delle forze, che verrà determinata con metodi descritti nel prossimo paragrafo.

|| 2.5. Riduzione di un sistema di forze

Elementi caratteristici di un sistema di forze sono la risultante e il momento risultante. Essi vanno determinati mediante operazioni invariantive che permettono, in particolare, di verificare se due sistemi di forze sono equipollenti, ossia se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo prescelto.

Vogliamo ora stabilire la massima riduzione di un sistema di forze assegnato. Consideriamo per prima il caso in cui l'invariante scalare (5) sia nullo; questa condizione comporta:

- a) Risultante e momento risultante sono ortogonali
- b) $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M} \neq 0$; per la (4) si ha $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$ qualunque sia il polo. Se si considera una coppia di braccio b , tale che $M = bF$, il sistema di forze si riduce alla coppia costituita dalle forze \mathbf{F} , $-\mathbf{F}$.
- c) $\mathbf{M} = 0$; il sistema di forze si riduce alla sola risultante.
- d) $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M} = 0$; le forze costituiscono un sistema nullo.

|| 2.6. Forze concorrenti e forze complanari

In tali sistemi di forze l'invariante scalare è nullo.

FORZE CONCORRENTI IN UN PUNTO

La massima riduzione consiste nella risultante applicata al punto o in qualsiasi punto della sua retta d'azione.

FORZE COMPLANARI

Fissato un punto O arbitrario nel piano delle forze, ciascuna forza può essere trasportata in O aggiungendo la rispettiva coppia. Poiché il momento di ogni forza, rispetto ad O , è ortogonale al piano, si otterrà una risultante \mathbf{F} , applicata in O e un momento risultante \mathbf{M} ad essa ortogonale, figura 11.

Volendo ridurre il sistema ottenuto alla sola risultante, occorre ricercare il punto Q di applicazione della risultante, rispetto al quale il momento risultante del sistema di forze è nullo. Ponendo nella (4) $\mathbf{M}' = 0$, si ha

$$\mathbf{M} + (O - Q) \times \mathbf{F} = 0, \quad \Rightarrow \quad (Q - O) \times \mathbf{F} = \mathbf{M}; \quad (6)$$

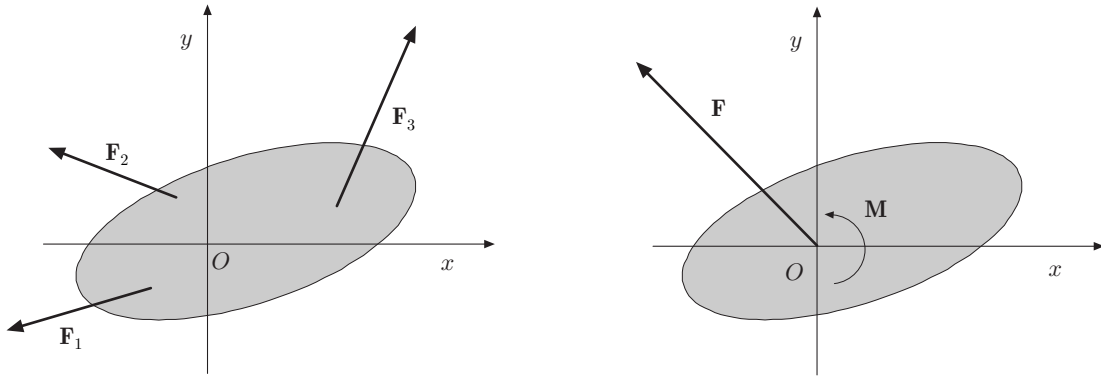


Fig. 13.11

il momento della risultante rispetto ad O deve essere uguale al momento risultante rispetto allo stesso polo. Fissato un riferimento cartesiano nel piano delle forze con origine in O , il momento risultante è

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \mathbf{k},$$

che ha come unica componente

$$M_z = \sum_i (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}).$$

D'altra parte, dette x_Q, y_Q le coordinate di Q , il momento della risultante è dato da

$$(Q - O) \times \mathbf{F} = (x_Q F_y - y_Q F_x) \mathbf{k},$$

pertanto:

$$x_Q F_y - y_Q F_x = \sum_i (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = M_z.$$

L'espressione

$$x_Q F_y - y_Q F_x = M_z,$$

rappresenta l'equazione della retta d'azione di \mathbf{F} . Per la definizione di prodotto vettoriale, la distanza d di tale retta da O è:

$$d = \frac{M_z}{|\mathbf{F}|}.$$

Più in generale, la ricerca del vettore $\mathbf{r}_Q = (Q - O)$ che individua le coordinate x_Q, y_Q del punto di applicazione della risultante, è analoga a quella esposta per determinare l'asse istantaneo di rotazione nei moti rototraslatori, definito dall'equazione vettoriale (25) del capitolo III. Ricordando la (4), che stabilisce come varia il momento al variare del polo, si può scrivere

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{F} \times (O' - O).$$

Tenuto conto che, nel caso in esame, \mathbf{F} ed \mathbf{M} sono ortogonali, esisterà un particolare punto $Q \equiv O'$ per il quale è soddisfatta la relazione:

$$\mathbf{M} = -\mathbf{F} \times (Q - O), \quad (7)$$

che rende nullo \mathbf{M}' . Per determinare il punto Q , si osservi che il prodotto vettoriale $\mathbf{F} \times \mathbf{M}$ rappresenta il vettore di modulo FM , ruotato di 90° rispetto ad \mathbf{M} ; quindi il doppio prodotto $\mathbf{F} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{M})$ è un vettore opposto ad \mathbf{M} , uguale a $-F^2\mathbf{M}$. Pertanto:

$$\mathbf{M} = -\frac{1}{F^2}\mathbf{F} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{M}).$$

Confrontando con la (7), si ha

$$-\mathbf{F} \times (Q - O) = -\frac{1}{F^2}\mathbf{F} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{M}),$$

dalla quale si trae

$$(Q - O) \equiv \mathbf{r}_Q = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{M}}{F^2}. \quad (8)$$

L'equazione ottenuta è analoga alla (25)-III, qualora si scriva \mathbf{F} al posto di $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{M} al posto di \mathbf{v}_T .

|| 2.7. Forze parallele

Anche in questo caso l'invariante scalare è nullo. Supponiamo che le rette d'azione delle forze siano parallele all'asse z del riferimento di figura 12, ma non tutte abbiano lo stesso verso. La risultante è parallela all'asse z e poiché il momento delle singole forze è ortogonale a ciascuna di esse, il momento risultante è rappresentato da un vettore parallelo al piano $x-y$. Il sistema forza-coppia, che si ottiene col procedimento descritto, consta dunque di una risultante \mathbf{F} , applicata nell'origine O del riferimento, o in qualsiasi altro punto dove le forze sono state trasportate, e di un momento risultante \mathbf{M} , somma dei momenti associati alle forze, mutuamente ortogonali. Esso può essere ridotto ad una singola forza oppure, se la risultante $\mathbf{F} = 0$, a una coppia di momento \mathbf{M} .

La riduzione a una singola forza, come per le forze complanari, va fatta ricercando, nel piano $x-y$, il punto Q rispetto al quale il momento risultante uguaglia il momento della risultante, equazione (6).

Il momento risultante rispetto ad O è dato da

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times F_i \mathbf{k} = \sum_i (x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}) \times F_i \mathbf{k} = \sum_i (-x_i F_i \mathbf{j} + y_i F_i \mathbf{i}). \quad (9)$$

D'altra parte, dette x_Q, y_Q le coordinate di Q , si ha

$$(x_Q \mathbf{i} + y_Q \mathbf{j}) \times F \mathbf{k} = -x_Q F \mathbf{j} + y_Q F \mathbf{i}. \quad (10)$$

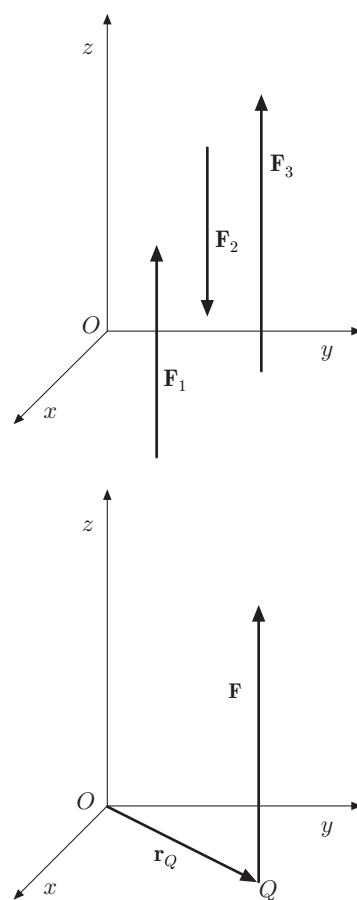


Fig. 13.12

Uguagliando nelle (9) e (10), le rispettive componenti, si ottiene

$$x_Q = \frac{\sum_i x_i F_i}{F}, \quad y_Q = \frac{\sum_i y_i F_i}{F}. \quad (11)$$

Nello stesso modo si procede se le forze sono parallele all'asse x oppure all'asse y . Si noti che le F_i sono le componenti delle forze, pertanto F rappresenta la loro somma algebrica. Ovviamente, le (11) possono essere ricavate mediante la (8).

Le (11) danno le coordinate dell'intersezione della retta d'azione della risultante col piano x - y , dunque il suo punto d'applicazione resta indeterminato. Tuttavia uguagliando il momento della risultante col momento risultante, si ha

$$\mathbf{r}_Q \times F\mathbf{k} = \sum_i \mathbf{r}_i \times F_i \mathbf{k}. \quad (12)$$

Questa relazione si può scrivere:

$$\mathbf{r}_Q F \times \mathbf{k} = \sum_i \mathbf{r}_i F_i \times \mathbf{k},$$

da cui:

$$\mathbf{r}_Q F = \sum_i \mathbf{r}_i F_i.$$

Pertanto si ottiene

$$\mathbf{r}_Q = \frac{\sum_i \mathbf{r}_i F_i}{F}. \quad (13)$$

La (13) definisce univocamente la posizione del punto Q , le cui coordinate risultano:

$$x_Q = \frac{\sum_i x_i F_i}{F}, \quad y_Q = \frac{\sum_i y_i F_i}{F}, \quad z_Q = \frac{\sum_i z_i F_i}{F}. \quad (14)$$

Questo risultato è valido qualunque sia l'orientazione forze parallele. Infatti, detto $\hat{\mathbf{u}}$ il versore comune delle forze, risulta $F\hat{\mathbf{u}} = \sum_i F_i \hat{\mathbf{u}}$. Sostituendo nella (12), si ottiene lo stesso risultato. Il punto Q definito dalle (14) si chiama *centro delle forze parallele*.

|| 2.8. Riduzione di un sistema di forze generico

Consideriamo un sistema di forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$ applicate a un corpo rigido, nei punti P_1, P_2, \dots , la cui posizione rispetto ad un punto O , origine di una terna cartesiana ortogonale, è definita dai vettori $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$.

La forza \mathbf{F}_i può essere trasportata in O aggiungendo la coppia di momento $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$. Ripetendo il procedimento per ogni forza, otterremo un sistema consistente nelle forze concorrenti in O e nelle coppie di momenti $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots$, figura 13. Ne segue che il sistema di forze è equivalente alla risultante \mathbf{F} ed al momento risultante $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots$. Pertanto un sistema di forze

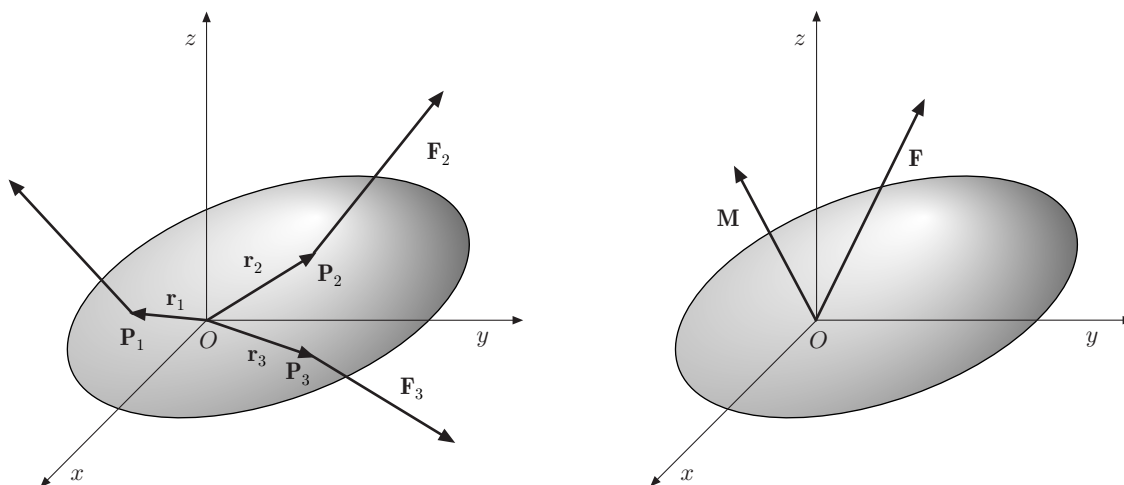


Fig. 13.13

comunque complesso, può essere ridotto al sistema forza-coppia agente nel punto O prefissato.

Il sistema forza-coppia, così ottenuto, è espresso da:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (15)$$

La prima dà luogo alle relazioni scalari

$$F_x = \sum_i F_{ix}, \quad F_y = \sum_i F_{iy}, \quad F_z = \sum_i F_{iz}.$$

Dalla seconda, essendo

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}, \quad \mathbf{F}_i = F_{ix} \mathbf{i} + F_{iy} \mathbf{j} + F_{iz} \mathbf{k},$$

si ha:

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_i (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) \\ M_y &= \sum_i (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) \\ M_z &= \sum_i (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}). \end{aligned}$$

Va notato che, mentre il momento di ciascuna coppia è ortogonale alla corrispondente forza, la risultante \mathbf{F} e il momento risultante \mathbf{M} , in genere, non sono ortogonali. L'invariante scalare è diverso da zero; il sistema di forze non può essere ridotto alla sola risultante. Il momento \mathbf{M} può essere scomposto in un componente \mathbf{M}_1 , parallelo a \mathbf{F} e in un componente \mathbf{M}_2 ortogonale, figura 14. Il sistema costituito da \mathbf{F} e \mathbf{M}_2 , come si è visto in precedenza, può essere ridotto alla risultante applicata in un punto Q opportuno. Ne segue che la massima riduzione del sistema di forze consiste nella risultante \mathbf{F} e nella coppia di momento \mathbf{M}_1 ad essa parallela. Dunque la risultante imprime al corpo rigido una traslazione

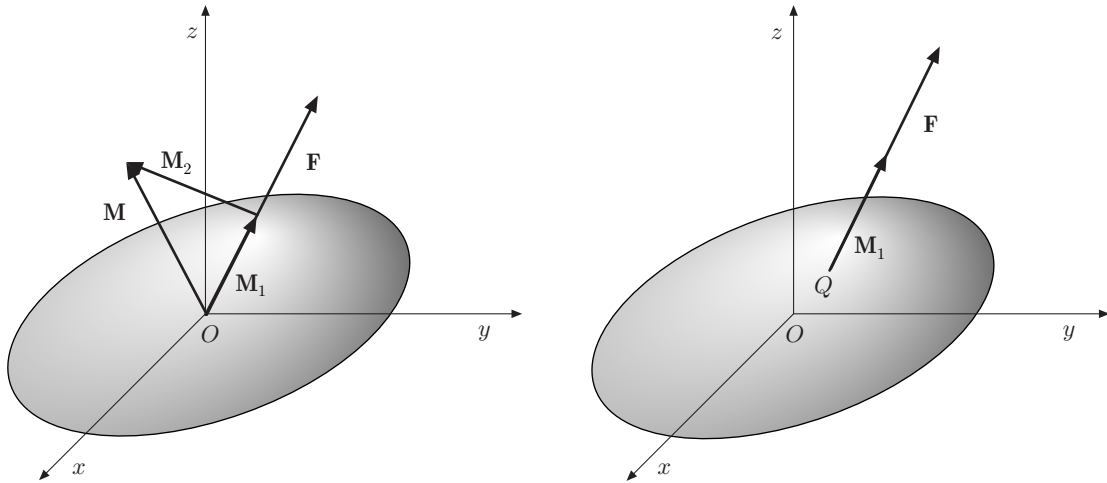


Fig. 13.14

lungo la sua retta d'azione ed il momento una rotazione attorno ad essa. Questa retta d'azione si chiama *asse centrale del sistema*.

Il modulo di M_1 si ottiene immediatamente dalla definizione di prodotto scalare:

$$M_1 = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}}{F}.$$

Esso, come indica l'invariante scalare, è indipendente dalla scelta del polo.

Esempio

- ||| 1. Una sbarra AB , appoggiata su un piano orizzontale, è sollecitata da quattro forze ad essa ortogonali e tra loro parallele, come mostrato in figura 15. Assunto un riferimento con origine in A , asse x orientato lungo la sbarra ed asse y ortogonale, sono assegnate le componenti delle forze lungo y , $F_1 = 35\text{ N}$, $F_2 = -155\text{ N}$, $F_3 = 20\text{ N}$, $F_4 = -80\text{ N}$, e i rispettivi punti di applicazione: $x_1 = 0$, $x_2 = 0,4\text{ m}$, $x_3 = 0,7\text{ m}$, $x_4 = 1,2\text{ m}$. Ridurre le forze al sistema forza-coppia in A .

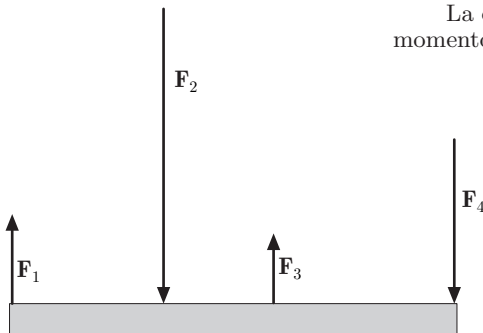


Fig. 13.15

La componente della risultante lungo y è negativa e vale $F = -180\text{ N}$. Il momento risultante rispetto ad A , ortogonale al piano delle forze, è dato da

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \\ &= 0,4 \mathbf{i} \times (-F_2 \mathbf{j}) + 0,7 \mathbf{i} \times F_3 \mathbf{j} + 1,2 \mathbf{i} \times (-F_4 \mathbf{j}) \\ &= -0,4 \cdot 155 \mathbf{k} + 0,7 \cdot 20 \mathbf{k} - 1,2 \cdot 80 \mathbf{k} = -144 \mathbf{k} \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

In modo analogo si procede nella riduzione ad un sistema forza-coppia in un punto qualunque della sbarra.

Volendo ridurre il sistema alla sola risultante, occorre trovare il suo punto di applicazione; detta x_C la coordinata di tale punto, dalle (14) si ottiene

$$x_C = \frac{\sum_i x_i F_i}{F} = 0,8\text{ m}.$$

Si rammenti che le F_i rappresentano le componenti delle forze ed F la loro somma algebrica.

.....

||| 3. Baricentro

Consideriamo un sistema rigido costituito da punti materiali, soggetti all'azione della gravità. Detta M la massa totale del sistema, alle forze parallele m_1g, m_2g, \dots , possiamo sostituire la forza

$$Mg = m_1g + m_2g + \dots,$$

applicata nel centro delle forze, che chiamiamo baricentro. Le (14) diventano:

$$x_C = \frac{\sum_i x_i m_i g}{Mg}, \quad y_C = \frac{\sum_i y_i m_i g}{Mg}, \quad z_C = \frac{\sum_i z_i m_i g}{Mg}, \quad (16)$$

Supponendo che il sistema non sia molto esteso, cioè sia tale che l'accelerazione di gravità possa ritenersi costante in tutto il sistema, le (16) esprimono anche le coordinate del centro di massa;

$$x_C = \frac{\sum_i x_i m_i}{M}, \quad y_C = \frac{\sum_i y_i m_i}{M}, \quad z_C = \frac{\sum_i z_i m_i}{M}.$$

Le (16) si estendono a un sistema continuo, corpo rigido; infatti suddividendo il corpo in elementi di massa dm e indicando con \mathbf{r} il vettore che individua l'elemento rispetto all'origine del riferimento, possiamo scrivere

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm}.$$

Se il corpo è omogeneo, densità $\rho = \text{costante}$, essendo $dm = \rho dV = \rho dx dy dz$ e $M = \rho \int_V dV$ la massa del corpo, si ha

$$x_C = \frac{\int_V x dx dy dz}{V}, \quad y_C = \frac{\int_V y dx dy dz}{V}, \quad z_C = \frac{\int_V z dx dy dz}{V}. \quad (17)$$

La ricerca del baricentro diventa piuttosto semplice, se si tiene conto di alcune proprietà elementari dei corpi.

a) Il baricentro o centro di massa di due corpi assimilabili a punti materiali, si trova sul segmento che li congiunge e divide questo in parti inversamente proporzionali alle masse dei punti materiali. Assunto come origine il baricentro e indicando con $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ la posizione dei due punti, si ha

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

b) Se il corpo si estende su un piano o lungo una retta, il baricentro appartiene al piano o alla retta; ciò discende immediatamente dalle (16).

c) Se il corpo ammette un piano di simmetria materiale, il baricentro si trova su tale piano. Infatti, assunto il piano di simmetria

come piano $x-y$ e cambiando nella terza delle (16) z in $-z$, si ottiene $z_C = 0$; cosicché il baricentro giace in tale piano.

d) Se il corpo ammette due piani di simmetria materiale e dunque la loro intersezione è asse di simmetria materiale, il baricentro si trova su tale asse. Se inoltre esistono tre piani di simmetria materiale, il loro punto di intersezione è centro di simmetria materiale. Il baricentro coincide con tale punto. Il baricentro di un corpo omogeneo che ha forma di poligono o poliedro regolare, coincide col centro geometrico della figura.

e) Il baricentro gode della proprietà distributiva; infatti le (16) hanno manifestamente caratteristiche estensive. Se il corpo viene suddiviso in due o più parti e di ognuna di queste viene determinato il baricentro, ivi ritenendo localizzata la massa di ciascuna parte, il baricentro dell'intero corpo coincide con quello dei punti materiali così ottenuti.

f) Se un corpo omogeneo presenta delle cavità, il baricentro si ottiene attribuendo al corpo densità ρ costante e alle cavità la densità fittizia $-\rho$. Lo stesso si verifica nel caso bidimensionale, in cui sono presenti fori, e nel caso unidimensionale di figure formate da archi separati.

3.1. Teorema di Pappo-Guldino

Si consideri un arco l di linea, nel piano $x-y$ di un riferimento cartesiano. Facciamo ruotare l'arco considerato di un angolo giro attorno all'asse x , figura 16; la superficie S da esso generata è data da

$$S = \int_l 2\pi y dl. \quad (18)$$

D'altra parte, per la seconda delle (17), la coordinata del baricentro dell'arco è

$$y_C = \frac{\int_l y dl}{l}.$$

Per la (18) segue:

$$y_C = \frac{S}{2\pi l}. \quad (19)$$

Viceversa, nota la coordinata del baricentro, è possibile calcolare l'area della superficie del solido di rotazione.

Analogamente si dimostra che se y_C è la coordinata del baricentro di una porzione di superficie S del piano $x-y$, che ruotando attorno all'asse x genera un volume V , si ha

$$y_C = \frac{V}{2\pi S}, \quad (20)$$

da cui si può ricavare il volume del solido di rotazione.

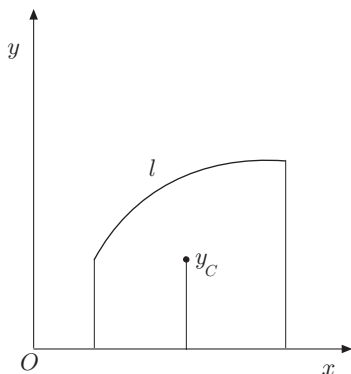


Fig. 13.16

Calcolo di baricentri

- ||| 2. Intuitivamente si assume che il baricentro o centro di massa di una sbarra omogenea di sezione costante e lunghezza l , si trovi a metà lunghezza. Ciò è conforme alla proprietà a); infatti, detta λ la densità lineica della sbarra e assunto un asse di riferimento con origine in un suo estremo, la massa dell'elemento distante x dall'origine è $dm = \lambda dx$, pertanto:

$$x_C = \frac{\lambda \int_0^l x dx}{\lambda \int_0^l dx} = \frac{1}{l} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l = \frac{l}{2}.$$

Altrettanto intuitivamente assumiamo che il centro di massa di un disco circolare omogeneo si trova nel suo centro geometrico; infatti qualunque diametro è asse di simmetria ed ha come centro di massa il centro del disco.

- ||| 3. Si determini il centro di massa di un disco circolare omogeneo di raggio R , in cui è praticato un foro circolare di raggio $r < R$. Per la proprietà f), possiamo assumere che il foro sia equivalente a un disco di massa negativa. Detta M la massa del disco di raggio R e m la massa del disco equivalente di raggio r , si ha

$$M = \sigma \pi R^2, \quad m = -\sigma \pi r^2,$$

essendo σ la densità areica del disco.

Assunto un asse di riferimento con origine nel bordo del disco e passante per i due centri, figura 17, e detta a la distanza tra questi, si ha

$$x_C = \frac{\sigma \pi R^2 R - \sigma \pi r^2 (R - a)}{\sigma \pi (R^2 - r^2)} = R + \frac{r^2 a}{R^2 - r^2}.$$

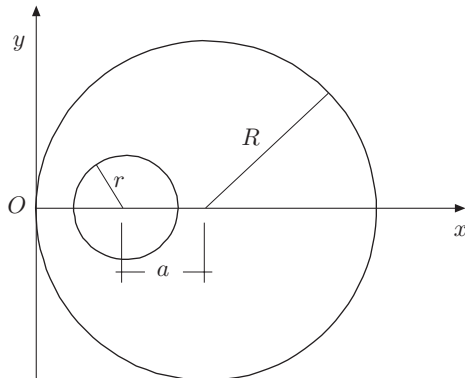


Fig. 13.17

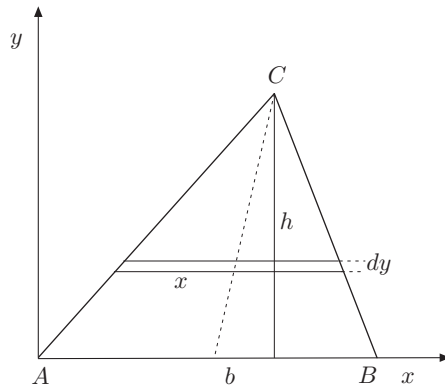


Fig. 13.18

- ||| 4. *Baricentro di un triangolo omogeneo.*

Si divida il triangolo in striscie di spessore infinitesimo parallele al lato AB , figura 18. Il baricentro di ogni striscia si trova nel punto di mezzo; il luogo di tali punti è la mediana del triangolo passante per C e, per le proprietà b) e c), su questa si troverà il baricentro del triangolo. Analogo ragionamento si può fare relativamente alle altre due mediane del triangolo, pertanto, come noto, il baricentro del triangolo è individuato dalla intersezione delle tre mediane.

Sia b un lato del triangolo ed h l'altezza relativa ad esso; detta S la superficie ed y_C la coordinata del baricentro, per le (17), si ha

$$S y_C = \int y dS.$$

Dividiamo il triangolo in strisce parallele a b , di lunghezza x e altezza dy , perciò $dS = xdy$. Essendo $x = (h - y)b/h$ e $S = bh/2$, la precedente diventa:

$$\frac{1}{2}bhy_C = \frac{b}{h} \int_0^h (h - y)ydy = \frac{1}{2}bh^2 - \frac{1}{3}bh^2;$$

perciò:

$$y_C = \frac{1}{3}h.$$

III 5. *Baricentro di un quadrilatero omogeneo.*

Si divida il quadrilatero nei due triangoli ABD e CBD , figura 19, e vengano determinati i baricentri C_1 , C_2 dei triangoli ottenuti. Il baricentro del quadrilatero si troverà sulla loro congiungente. Dividendo il quadrilatero nei due triangoli ADC e ABC si troverà un'altra retta sulla quale si trova il baricentro e, per intersezione, il baricentro del quadrilatero.

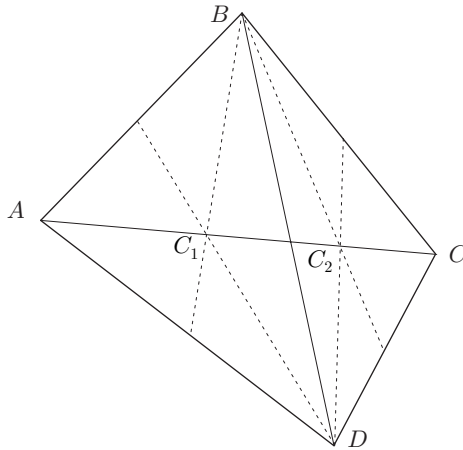


Fig. 13.19

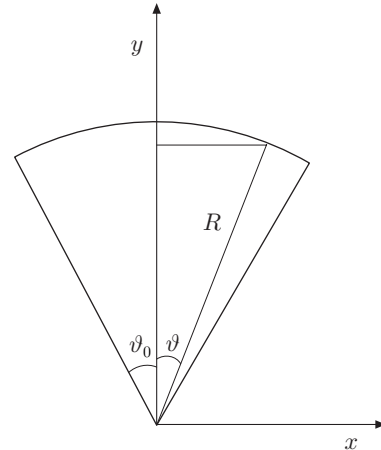


Fig. 13.20

III 6. *Baricentro di un arco omogeneo di circonferenza.*

Detto $2\theta_0$ l'angolo sotteso dall'arco e disposti gli assi del riferimento come in figura 20, per le proprietà b) e d), il baricentro si trova sull'asse y . Dalle (17), si ha

$$y_C = \frac{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} yRd\theta}{2R\theta_0} = \frac{R \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos \theta d\theta}{2\theta_0} = \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} R.$$

In particolare il baricentro di una semicirconferenza è

$$y_C = \frac{2R}{\pi}.$$

In maniera più semplice, il baricentro di una semicirconferenza può essere ricavato per mezzo della (19). Infatti la superficie generata dall'arco è quella della sfera, $4\pi R^2$ e la lunghezza dell'arco è $l = \pi R$, perciò:

$$y_C = \frac{S}{2\pi l} = \frac{2R}{\pi}.$$

III 7. *Baricentro di un semicerchio omogeneo.*

Fissato un riferimento $x-y$ con origine nel centro del semicerchio, come in figura 21, per la proprietà c) e d), il baricentro si trova sull'asse y . Suddivisa la figura in strisce di altezza dy , parallele all'asse x , si ha

$$y = R \sin \theta, \quad dy = R \cos \theta d\theta, \quad 2r = 2R \cos \theta,$$

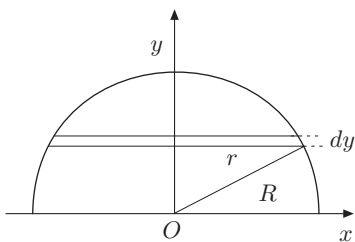


Fig. 13.21

$$dS = 2r dy = 2R^2 \cos^2 \theta d\theta.$$

Poiché

$$S y_C = \int y dS,$$

si ha

$$S y_C = 2R^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta.$$

Posto $x = \cos \theta$, è $dx = -\sin \theta d\theta$ e tenendo presente che $S = \pi R^2/2$, la precedente diventa:

$$\frac{\pi R^2}{2} y_C = 2R^3 \int_1^0 -x^2 dx = \frac{2}{3} R^3.$$

Infine:

$$y_C = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}.$$

A questo risultato si può pervenire più rapidamente per mezzo della (20). Il volume generato nella rotazione è quello della sfera, $V = 4\pi R^3/3$, ed essendo $S = \pi R^2/2$, si ottiene:

$$y_C = \frac{V}{2\pi S} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}.$$

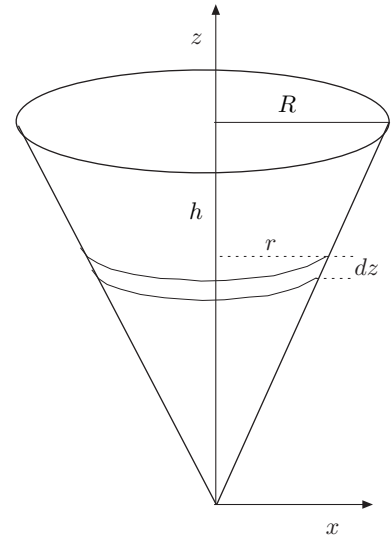


Fig. 13.22

||| 8. Baricentro di un cono rotondo omogeneo.

Assunti gli assi del riferimento come in figura 22, per la proprietà d), il baricentro si trova sull'asse z . Suddividendo il cono in dischi di spessore dz e detta h la sua altezza, si ha

$$z_C = \frac{\int_0^h z \pi r^2 dz}{\pi R^3 h/3};$$

ma $r/z = R/h$, pertanto:

$$z_C = \frac{\pi (R/h)^2 \int_0^h z^3 dz}{\pi R^3 h/3} = \frac{3}{4} h.$$

||| 9. Baricentro della lastra omogenea di figura 23.

Per la simmetria della lastra e per la proprietà d), il baricentro si trova sull'asse y e si può calcolare dividendo la lastra in due rettangoli $ABCD$ e $EFGH$. Il baricentro del primo ha coordinata $y'_C = d + b/2$, quello del secondo coordinata $y''_C = d/2$. Dette S_1 e S_2 le superfici dei due rettangoli, il baricentro dell'intera lastra risulta

$$y_C = \frac{S_1 y'_C + S_2 y''_C}{S_1 + S_2} = \frac{(d + b/2)ab + d^2 c/2}{ab + dc}.$$

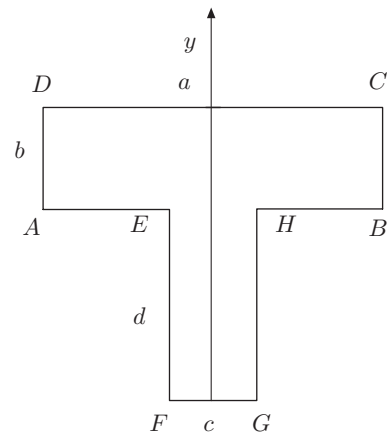


Fig. 13.23

||| 4. Equilibrio

L'equilibrio di un sistema rigido va determinato imponendo che la risultante delle forze ed il momento risultante rispetto a qualsiasi polo, siano uguali a zero:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad \mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0. \quad (21)$$

Queste relazioni comprendono le *forze attive e le reazioni vincolari*. Assunto un opportuno riferimento cartesiano, in problemi piani, le (16) danno luogo a quattro equazioni scalari; in problemi tridimensionali a sei equazioni scalari.

Mediante le (16) si può determinare l'equilibrio, note le forze agenti sul corpo o, viceversa, assegnata una configurazione di equilibrio, le reazioni vincolari e/o parte delle forze. In ogni caso, perché il problema sia staticamente determinato, le incognite non possono essere più di quattro in problemi piani, non più di sei in problemi tridimensionali. La natura dei vincoli e i gradi di libertà del corpo rigido, determinano ovviamente il numero delle incognite.

Lasciando l'analisi completa a corsi specializzati, le reazioni vincolari hanno caratteristiche dipendenti dai supporti e dalle connessioni del corpo; in linea di massima possono essere classificate come segue.

REAZIONI DI DIREZIONE NOTA

I vincoli, supporti e connessioni, permettono il movimento del corpo in due dimensioni; la retta d'azione della reazione coincide con la direzione in cui viene ostacolato il movimento. Per esempio, una superficie priva di attrito esercita una reazione ad essa ortogonale; l'eventuale moto del corpo è piano. Analogo è il moto di un corpo poggiato su rulli. Un collare liscio che può scorrere senza attrito lungo un'asta, esercita una reazione ortogonale all'asta. Un corpo fissato ad una estremità di un cavo, è soggetto ad una reazione diretta lungo questo. In figura 24 sono mostrati alcuni vincoli di questo tipo.

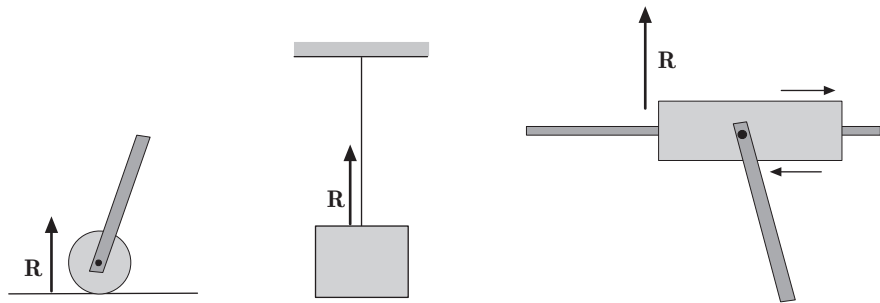


Fig. 13.24

REAZIONI DI DIREZIONE INCOGNITA

Se i supporti e connessioni permettono l'eventuale movimento del corpo in una direzione, la reazione ha due componenti. Per esempio, una rotaia permette l'eventuale moto del corpo in una direzione; la reazione ha due componenti: una ortogonale, l'altra laterale alla rotaia. Superfici scabre possono ostacolare il movimento in tre direzioni, pertanto la reazione ha tre componenti.

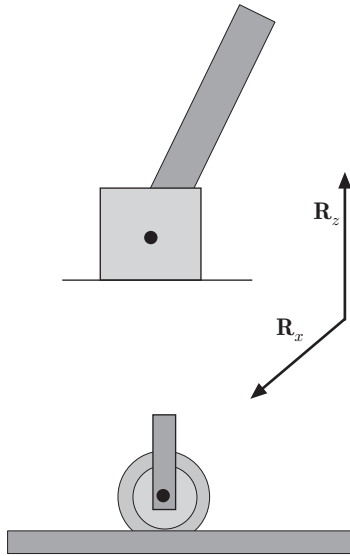


Fig. 13.25

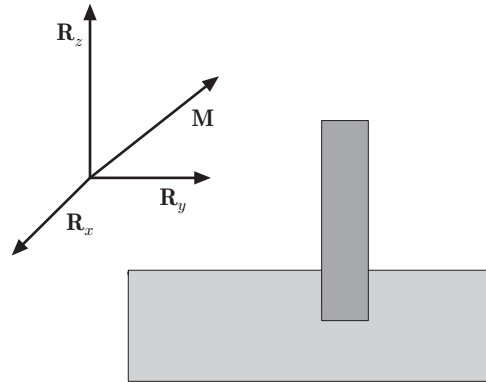


Fig. 13.26

Perni e cerniere permettono soltanto rotazioni; le reazioni possono avere due o tre componenti a seconda della sollecitazione impressa, figura 25.

REAZIONI EQUIVALENTI AD UN SISTEMA FORZA-COPPIA

Se il supporto è fisso, la connessione determina un insieme di forze distribuite sulla superficie di contatto, che possono essere ridotte a una forza e ad una coppia; occorre determinare le componenti della forza e il momento della coppia, figura 26. Se le forze attive sono conservative e i vincoli lisci, l'equilibrio è stabilito dalle condizioni in cui l'energia potenziale è minima. Gli esempi che seguono possono meglio chiarire gli elementi sopra esposti.

Esempi

- ||| 10. Un quadro di massa m è fissato alla parete mediante due fili ideali, che formano con la verticale due angoli θ uguali, figura 27. Determinare le tensioni dei fili.

Il quadro è in equilibrio; dette \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 le tensioni, per l'equilibrio si ha

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + m\mathbf{g} = 0.$$

Assumendo positivo il verso ascendente e proiettando sull'orizzontale e sulla verticale:

$$T_1 \sin \theta - T_2 \sin \theta = 0, \quad T_1 \cos \theta + T_2 \cos \theta - mg = 0.$$

Si ricava

$$T_1 = T_2 = T, \quad T = \frac{mg}{2 \cos \theta}.$$

La tensione dipende dall'angolo e cresce all'aumentare di questo; per esempio, lo sforzo che esercitiamo nel sollevarci con le braccia unite al corpo, risulta minore di quello che esercitiamo con le braccia più aperte.

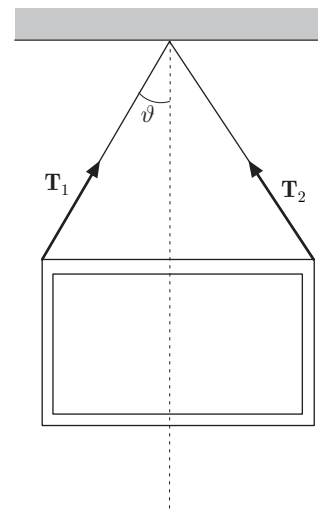


Fig. 13.27

- III 11. Un'asta omogenea di sezione costante, massa m e lunghezza l , incerniata in O , come mostrato in figura 28, è tenuta in equilibrio per mezzo di un filo ideale. Su di essa agiscono: una forza \mathbf{F} verticale, applicata al suo estremo, la tensione esercitata dal filo e il peso proprio. Determinare la tensione del filo e la reazione vincolare \mathbf{R} in O .

Per l'equilibrio si deve avere

$$\mathbf{F} + \mathbf{T} + m\mathbf{g} + \mathbf{R} = 0,$$

e assumendo come polo O , l'annullarsi dei momenti delle forze coinvolte, ossia della forza applicata, della tensione e del peso:

$$\mathbf{M}_F + \mathbf{M}_T + \mathbf{M}_P = 0.$$

Fissato un riferimento con origine in O , asse y volto in alto, asse x orizzontale, e proiettando la prima, si ha

$$-T \cos 60^\circ + R_x = 0, \quad -F + T \sin 60^\circ - mg + R_y = 0.$$

I momenti hanno componenti ortogonali al piano $x-y$:

$$-Fl \sin 60^\circ - mg \frac{l}{2} \sin 60^\circ + Tl \sin 30^\circ = 0.$$

Da quest'ultima si ricava la tensione:

$$T = \left(F + \frac{1}{2}mg \right) \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ};$$

dalle prime, le componenti della reazione:

$$R_x = T \cos 60^\circ, \quad R_y = F + mg - T \sin 60^\circ.$$

Il problema è staticamente definito; numericamente, assumendo $F = 20 \text{ N}$, $m = 1 \text{ kg}$, si ottiene

$$T = 43,12 \text{ N}, \quad R_x = 21,56 \text{ N}, \quad R_y = -7,54 \text{ N}.$$

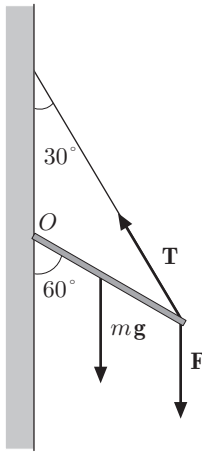


Fig. 13.28

- III 12. Un'asta AB omogenea, di lunghezza l e sezione costante, è in equilibrio appoggiata con l'estremo A su una parete verticale e l'altro estremo B su un piano orizzontale, col quale forma un angolo θ , figura 29. Supponendo che soltanto la parete sia priva di attrito, determinare le reazioni in A e B . Essendo la parete liscia, la reazione in A è ortogonale ad essa, mentre in B ha componenti, parallela ed ortogonale al piano. All'equilibrio, la somma delle forze è nulla

$$\mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B + m\mathbf{g} = 0.$$

Assunto un riferimento con l'asse x coincidente col piano e l'asse y con la parete, la precedente dà luogo alle equazioni scalari

$$R_A + R_{Bx} = 0, \quad R_{By} - mg = 0.$$

Per quanto riguarda i momenti, conviene scegliere come polo B , in modo che il momento di \mathbf{R}_B sia nullo, sicché vanno considerati i momenti della reazione in A ed il momento del peso. Si ha

$$\mathbf{M}_A + \mathbf{M}_P = 0.$$

I momenti hanno componenti ortogonali al piano $x-y$, e dalla precedente si ottiene l'equazione scalare:

$$-R_A l \sin \theta + mg \frac{l}{2} \cos \theta = 0;$$

da quest'ultima si ottiene

$$R_A = \frac{mg \cos \theta}{2 \sin \theta}.$$

Dall'equazione di equilibrio delle forze si ha

$$R_A = -R_{Bx}, \quad R_{By} = mg.$$

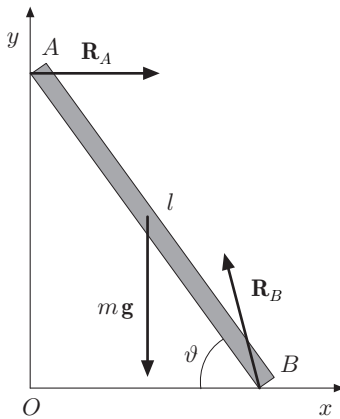


Fig. 13.29

Naturalmente, l'equilibrio dipende dall'angolo θ ; inoltre R_{Bx} dev'essere minore o uguale alla forza di attrito statico. Si osservi che se la parete non fosse liscia la reazione \mathbf{R}_A avrebbe una componente parallela ad essa. Si otterrebbero così quattro forze componenti incognite e il problema non potrebbe essere risolto senza una ulteriore ipotesi.

- ||| 13. Si consideri l'asta dell'esempio precedente nel caso che anche il piano orizzontale sia privo di attrito e che l'equilibrio venga realizzato mediante una molla di costante k , fissata in O e nell'estremo B dell'asta, figura 30. La condizione di equilibrio può essere determinata col metodo precedente; è però interessante, essendo le forze coinvolte conservative e il lavoro delle reazioni nullo, perché ortogonali ai vincoli, trovare tale condizione studiando l'energia potenziale del sistema.

Detta x_0 la lunghezza della molla a riposo e y_C l'ordinata del centro di massa, l'energia potenziale, funzione della distanza x di B dall'origine, è

$$U(x) = mgy_C + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2,$$

che si può scrivere:

$$U(x) = \frac{1}{2}mg\sqrt{l^2 - x^2} + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2.$$

L'equilibrio si ha per

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{2}mg\frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}} + k(x - x_0) = 0,$$

da cui:

$$\frac{mg}{2 \tan \theta} = k(x - x_0).$$

Per quanto riguarda le reazioni, evidentemente si ha

$$R_A = k(x - x_0), \quad R_B = -mg.$$

- ||| 14. Un'asta omogenea di massa m , è vincolata a scorrere all'interno di una guida circolare priva di attrito, di raggio r e disposta in un piano verticale. La lunghezza dell'asta è uguale al raggio della guida. Una forza \mathbf{F} , diretta lungo l'asta e applicata a un suo estremo, determina l'equilibrio dell'asta, in modo che l'altro estremo si trovi nel punto più basso della guida, figura 31. Determinare le reazioni vincolari nei punti A e B .

Per l'equilibrio:

$$\mathbf{F} + m\mathbf{g} + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B = 0, \quad \sum_i \mathbf{M}_i = 0.$$

Proiettando la prima su due assi, orizzontale e verticale, si ha

$$\begin{aligned} F \cos 30^\circ - R_B \cos 30^\circ &= 0 \\ F \cos 60^\circ + R_B \cos 60^\circ + R_A - mg &= 0, \end{aligned}$$

da cui:

$$R_B = F, \quad R_A = mg - 2F \cos 60^\circ.$$

Assumendo come polo il centro della guida, per i moduli dei momenti si ottiene:

$$Fr \sin 60^\circ - mg \frac{r}{2} \sin 60^\circ = 0, \quad F = \frac{1}{2}mg.$$

- ||| 15. Una sfera di massa m , in equilibrio, è appoggiata tra un piano verticale e un piano inclinato che forma col primo un angolo θ , figura 32. Determinare le reazioni esercitate dai vincoli.

Le forze agenti sulla sfera sono il peso e le reazioni \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 , ortogonali ai piani. Per l'equilibrio delle forze, si ha

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + m\mathbf{g} = 0;$$

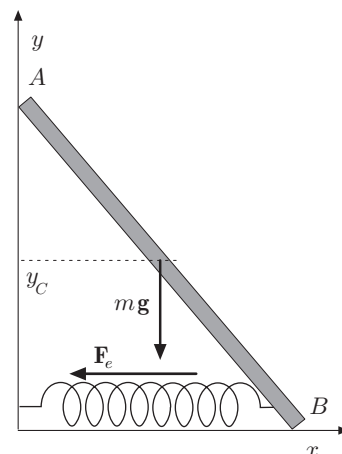


Fig. 13.30

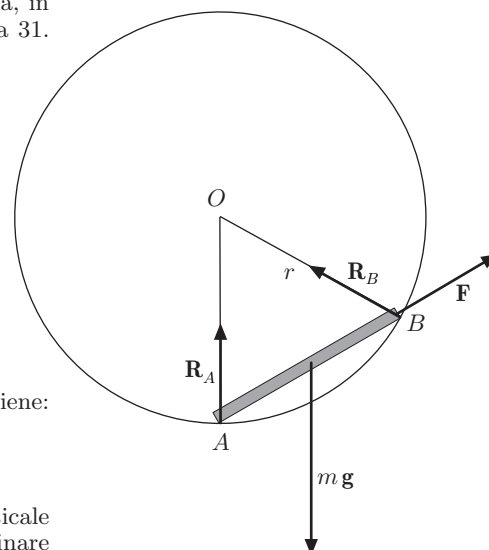


Fig. 13.31

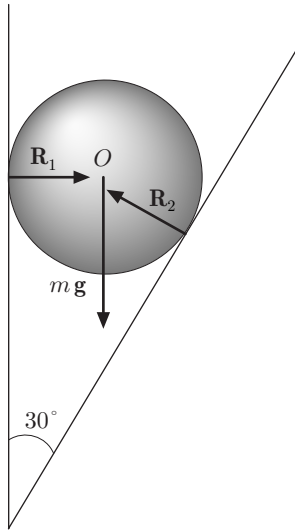


Fig. 13.32

Proiettando su due assi orientati, orizzontale e verticale, si ottiene:

$$R_1 - R_2 \cos \theta = 0, \quad R_2 \sin \theta - mg = 0,$$

$$R_2 = \frac{mg}{\sin \theta}, \quad R_1 = R_2 \cos \theta = mg \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

Non è necessaria l'equazione dell'equilibrio dei momenti. Si può subito verificare che il momento risultante è nullo qualunque sia il polo assunto.

- ||| 16. Due sfere uguali, di raggio r e massa m , sono in equilibrio in un contenitore a pareti verticali. La distanza tra queste è $l < 4r$, figura 33; determinare le reazioni esercitate dai vincoli.

Le forze che agiscono sono: le reazioni \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 , i pesi e la forza \mathbf{F} al contatto tra le sfere. Dette x e x' le ascisse dei centri, rispetto allo spigolo del contenitore, si ha

$$x' - x = l - 2r = 2r \cos \theta, \quad \cos \theta = \frac{l - 2r}{2r}.$$

Per l'equilibrio della sfera A :

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + mg + \mathbf{F} = 0,$$

che proiettata sugli assi, orizzontale e verticale, dà

$$R_1 - F \cos \theta = 0, \quad R_2 - mg - F \sin \theta = 0.$$

Analogamente per la sfera B :

$$F \cos \theta - R_3 = 0, \quad F \sin \theta - mg = 0.$$

Da queste ultime si trae

$$F = \frac{mg}{\sin \theta}, \quad R_3 = F \cos \theta = \frac{mg}{\tan \theta}.$$

dalle prime:

$$R_1 = F \cos \theta = \frac{mg}{\tan \theta}, \quad R_2 = mg + F \sin \theta = 2mg.$$

Anche in questo caso non è necessaria l'equazione dell'equilibrio dei momenti; si verifica facilmente che essa è soddisfatta qualunque sia il polo assunto.

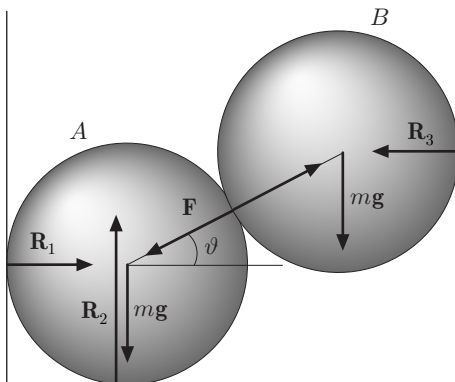


Fig. 13.33

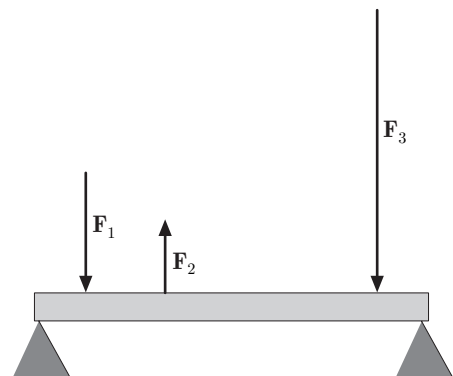


Fig. 13.34

- ||| 17. Un'asta omogenea di sezione costante, lunga $0,8 \text{ m}$, è in equilibrio, appoggiata ai suoi estremi sui supporti lisci A e B . L'asta è sollecitata dalle forze ad essa ortogonali come in figura 34. Assunto un riferimento con origine in A e l'asse x orientato lungo la sbarra, le forze sono applicate rispettivamente nei punti $x_1 = 0,1 \text{ m}$, $x_2 = 0,3 \text{ m}$ e $x_3 = 0,7 \text{ m}$ ed hanno componenti lungo l'asse

y : $F_1 = -10\text{ N}$, $F_2 = 5\text{ N}$, $F_3 = -25\text{ N}$. Trascurando il peso dell'asta, trovare il punto di applicazione della risultante e le reazioni in A e B .

La risultante vale $F = -30\text{ N}$; il suo punto di applicazione, centro delle forze, è

$$x_C = \frac{\sum_i F_i x_i}{F} = 0,56\text{ m}.$$

Le reazioni R_A , R_B , possono essere determinate dall'equilibrio dei momenti; assumendo come polo A , si ha

$$0,8R_B - 0,56F = 0, \quad R_B = \frac{0,56}{0,8}F = 21,2\text{ N},$$

ed essendo

$$R_A + R_B - F = 0,$$

si ottiene

$$R_A = F - R_B = 8,78\text{ N}.$$

- ||| 18. Una mensola, lunga $1,2\text{ m}$, è incastrata in O ad una parete verticale, come in figura 35. Essa è sollecitata dalle forze $F_1 = 200\text{ N}$, $F_2 = 100\text{ N}$, $F_3 = 50\text{ N}$, applicate nei punti $x_1 = 0,3\text{ m}$, $x_2 = 0,8\text{ m}$ e $x_3 = 1,2\text{ m}$. Determinare la reazione all'incastro.

La parte della mensola incastrata è soggetta a forze distribuite, equivalenti a una forza e ad una coppia. Fissato un riferimento con origine in O , asse x coincidente con la mensola, e asse y ortogonale, per l'equilibrio delle forze è

$$\sum F_x + R_x = 0, \quad R_x = 0.$$

Inoltre:

$$-F_1 - F_2 - F_3 + R_y = 0, \quad R_y = F_1 + F_2 + F_3 = 350\text{ N},$$

Indicando con M il momento della coppia di reazione, per l'equilibrio dei momenti, si ha

$$\sum_i M_i = -F_1 x_1 - F_2 x_2 - F_3 x_3 + M = 0$$

$$M = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 = 200\text{ N} \cdot \text{m}.$$

La reazione è costituita da una forza verticale $R = 350\text{ N}$ e da una coppia di momento positivo $M = 200\text{ N} \cdot \text{m}$.

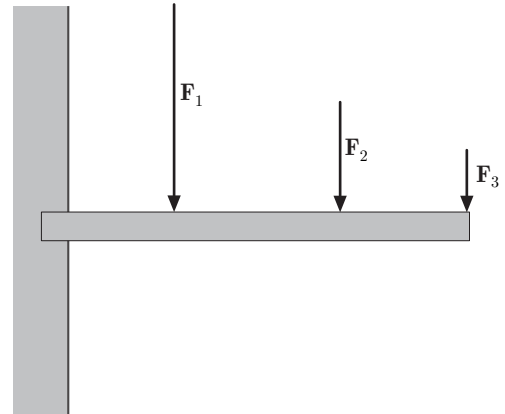


Fig. 13.35

- ||| 19. Una trave omogenea, lunga 2 m , è appoggiata agli estremi su due supporti lisci A e B . Su di essa è distribuito un carico crescente linearmente con la distanza, dal valore 100 N/m al valore 300 N/m , figura 36. Determinare le reazioni agli appoggi.

Il carico, per unità di lunghezza, varia con la legge

$$F(x) = ax + 100, \quad a = 100\text{ N/m}^2.$$

Il carico totale risulta:

$$F = \int_0^2 (100x + 100)dx = \left[100 \frac{x^2}{2} + 100x \right]_0^2 = 400\text{ N}.$$

Il punto di applicazione, per le (13), risulta

$$x_C = \frac{1}{400} \int_0^2 (100x + 100)dx = \frac{1}{400} \left[100 \frac{x^3}{3} + 100 \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 1,16\text{ m}.$$

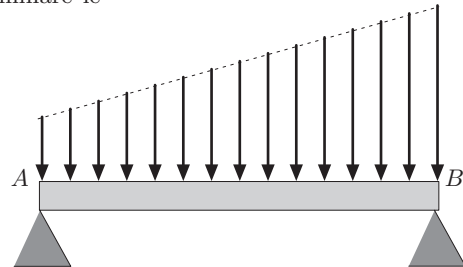


Fig. 13.36

.....

III 5. CENNO SUL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Un principio fondamentale della Statica e, in generale, della Meccanica è il principio dei lavori virtuali. Esso costituisce uno strumento molto potente nello studio dell'equilibrio e viene descritto in modo esauriente in Meccanica Razionale. Tuttavia, essendo la sua formulazione piuttosto semplice e notevole la sua utilità nei problemi di statica, ne daremo i lineamenti fondamentali.

Consideriamo un sistema di n punti materiali, P_1, P_2, \dots ai quali siano imposti dei vincoli e siano $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$ le forze attive agenti su ciascun punto. Se il sistema compie uno spostamento virtuale, ossia uno spostamento infinitesimo ammissibile perché conforme ai vincoli, indicando con $\delta \mathbf{s}_i$ lo spostamento virtuale del generico punto P_i , il lavoro virtuale, corrispondente a tale spostamento, è dato da

$$\delta \mathcal{L} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{s}_i.$$

Il simbolo δ indica, come di consueto, lo spostamento e il lavoro elementari, virtuali, e ricorda che non si tratta di un operatore differenziale. Per chiarire il concetto di lavoro virtuale, consideriamo alcuni particolari sistemi in equilibrio. Ad ognuno diamo un generico spostamento virtuale compatibile con i vincoli, e determiniamo il corrispondente lavoro delle forze *attive* atte a mantenere l'equilibrio del sistema considerato. All'equilibrio il lavoro delle forze vincolari, ortogonali ai vincoli, è nullo.

PUNTO MATERIALE LIBERO

Non essendo presenti vincoli, un qualunque spostamento è ammissibile, dunque è virtuale. Se \mathbf{F} è la risultante delle forze agenti, il lavoro virtuale corrispondente allo spostamento $\delta \mathbf{s}$, è $\delta \mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{s}$. In condizioni di equilibrio $\mathbf{F} = 0$, dunque $\delta \mathcal{L} = 0$.

PUNTO MATERIALE VINCOLATO AD UNA LINEA O AD UN PIANO

Ogni spostamento virtuale è tangente al vincolo. Il lavoro virtuale della risultante delle forze attive è $\delta \mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{s}$. Ma, in condizioni di equilibrio, \mathbf{F} è ortogonale al vincolo, dunque $\delta \mathcal{L} = 0$.

CORPO RIGIDO LIBERO

Qualunque spostamento rototraslatorio è ammissibile e pertanto virtuale. Detta \mathbf{F} la risultante ed \mathbf{M} il momento risultante delle forze attive rispetto ad un polo O , il lavoro virtuale, paragrafo 5-XIV, è

$$\delta \mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_O dt + \mathbf{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{s}_O + \mathbf{M}_O \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}.$$

In condizioni di equilibrio $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M}_O = 0$, dunque $\delta \mathcal{L} = 0$.

CORPO RIGIDO CON UN ASSE FISSO

Ogni spostamento virtuale è rotatorio attorno all'asse fisso; il corrispondente lavoro virtuale è $\delta\mathcal{L} = M_a\delta\varphi$, essendo M_a il momento assiale. Per l'equilibrio $M_a = 0$, dunque $\delta\mathcal{L} = 0$.

Quanto si è esemplificato, sia pure in maniera incompleta e poco rigorosa, può essere riassunto con l'enunciato:

Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema soggetto a vincoli, è che il lavoro delle forze attive, per ogni spostamento virtuale, sia nullo.

Si osservi che in questo enunciato non compaiono le reazioni vincolari né la natura dei vincoli. Le eventuali forze di attrito possono essere annoverate tra le forze attive.

Esempi

||| 20. *Macchine semplici.*

Agli effetti statici, macchina è un qualsiasi dispositivo atto ad equilibrare una forza applicata in un punto di un corpo, con un'altra applicata in un punto diverso. Le macchine semplici, note fin dall'antichità, sono in sostanza tre: la fune, la leva, il piano inclinato.

a) Fune

La fune sia inestendibile e di peso trascurabile; ai suoi estremi siano applicate le forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$. Per uno spostamento virtuale, gli estremi della fune si spostano di $\delta\mathbf{s}$; per l'equilibrio si deve avere

$$\mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{s} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{s} = 0, \Rightarrow \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0;$$

le forze devono essere opposte.

b) Leva

Uno spostamento virtuale è una rotazione $\delta\varphi$ attorno al fulcro O , figura 37. L'estremo A della leva si sposta di $\delta s_1 = l_1\delta\varphi$, l'altro estremo si sposta di $\delta s_2 = l_2\delta\varphi$, essendo l_1, l_2 le distanze da O degli estremi della leva. Per l'equilibrio, il lavoro virtuale dev'essere nullo:

$$\delta\mathcal{L} = \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{s}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{s}_2 = 0.$$

Poiché:

$$\delta\mathcal{L} = F_1\delta\varphi l_1 \cos\theta_1 + F_2\delta\varphi l_2 \cos\theta_2 = F_1 b_1 \delta\varphi - F_2 b_2 \delta\varphi = 0,$$

avendo indicato con b_1, b_2 i bracci delle forze rispetto ad O , si ottiene:

$$F_1 b_1 = F_2 b_2.$$

Questa relazione non è altro che quella che si otterrebbe dall'equilibrio dei momenti delle forze rispetto ad O .

c) Piano inclinato

Sono spostamenti virtuali tutti quelli paralleli al piano inclinato. Se il corpo su di esso poggiato è in equilibrio, il lavoro virtuale per tali spostamenti deve essere nullo. Ciò significa che la risultante delle forze è normale al piano inclinato e volta contro esso. Ove si consideri unilatero il vincolo imposto, siano perciò inclusi spostamenti virtuali nel semispazio delimitato dal piano, allora il lavoro virtuale della risultante deve essere negativo.

Consideriamo un cilindro di raggio R , che può rotolare lungo un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Su di esso agisce il peso e una forza equilibrante \mathbf{F} , parallela al piano e applicata mediante un filo tangenzialmente ad un cilindro di raggio r , coassiale col primo, figura 38. Unico spostamento virtuale è la rotazione infinitesima $\delta\varphi$ attorno all'asse

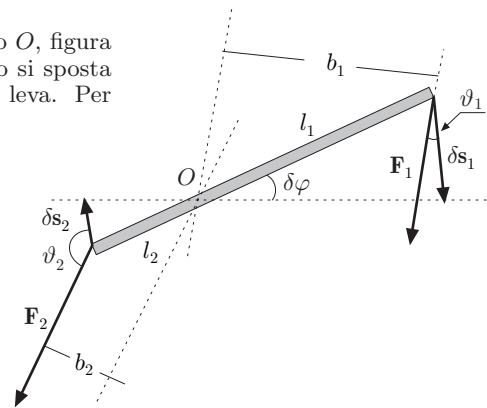


Fig. 13.37

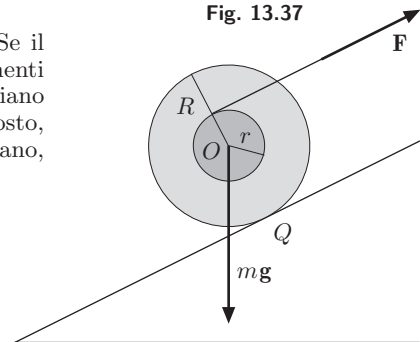


Fig. 13.38

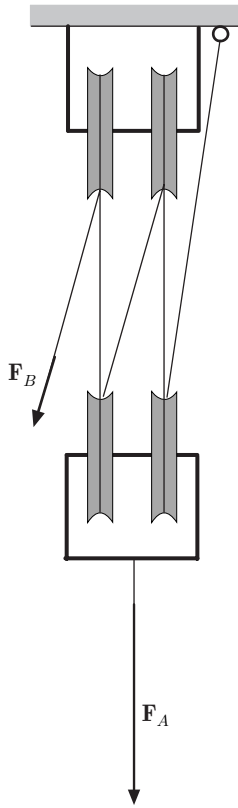


Fig. 13.39

istantaneo di rotazione passante per Q . Assunto come positivo il verso discendente, tale rotazione determina uno spostamento del centro O del cilindro uguale a $R\delta\varphi$ e uno spostamento del punto di applicazione A della forza equilibrante, uguale a $(R+r)\delta\varphi$. Il lavoro virtuale è

$$\delta\mathcal{L} = mg \sin \theta R \delta\varphi - F(R+r)\delta\varphi = 0,$$

da cui si ricava la condizione di equilibrio:

$$\frac{F}{mg \sin \theta} = \frac{R}{R+r}.$$

||| 21. *Carrucola fissa.*

Con riferimento alla figura 27, capitolo VII, sono spostamenti virtuali le rotazioni infinitesime attorno all'asse. Supponendo che le caratteristiche del filo siano ideali, il lavoro virtuale delle forze è

$$F_A R \delta\varphi - F_B R \delta\varphi = 0, \quad F_A = F_B.$$

||| 22. *Carrucola mobile.*

Dalla figura 29, capitolo VII, assunto come positivo il verso discendente, gli spostamenti virtuali avvengono lungo la verticale. Se F_2 scende di δz , F_1 si sposta in valore e segno di $-2 \cos(\theta/2)\delta z$. Il lavoro virtuale risulta

$$F_2 \delta z - F_1 2 \cos \frac{\theta}{2} \delta z = 0;$$

pertanto l'equilibrio si ha per

$$F_2 = 2F_1 \cos \frac{\theta}{2}, \quad F_1 = \frac{F_2}{2 \cos \theta/2}.$$

Se $\theta = 0$, la forza equilibrante risulta $F_2/2$.

||| 23. *Paranco.*

Il paranco è costituito da due o più carrucole fisse collegate mediante una fune ad altrettante carrucole mobili, figura 39. Si vuole trovare la forza F_B che equilibra il peso F_A , sospeso alle carrucole mobili.

Assunta come positiva la direzione discendente, se la forza F_A sposta il suo punto di applicazione verso il basso di δz , la forza F_B , nel caso della figura, sposta il suo punto di applicazione, verso l'alto, di $4\delta z$. Il lavoro virtuale è

$$\delta\mathcal{L} = F_A \delta z - F_B 4\delta z = 0,$$

pertanto risulta $F_B = F_A/4$. Per equilibrare F_A occorre una forza quattro volte più piccola.

||| 24. *Puleggia differenziale.*

La puleggia differenziale è costituita da due pulegge solidali e coassiali, di raggi r_1, r_2 , collegate con una fune ad una puleggia mobile, figura 40. Essa, come il paranco, permette di sollevare pesi notevoli con una forza di modesta intensità.

Sia F la forza applicata lungo il tratto di fune AB ; per un giro della puleggia fissa, AB si allunga di $2\pi r_2$, contemporaneamente la puleggia mobile si solleva di metà dell'accorciamento del tratto CED . Poiché la fune si avvolge nella puleggia di raggio r_1 , in totale la fune si accorcia di $2\pi(r_2 - r_1)$, quindi O' si solleva di $\pi(r_2 - r_1)$.

Detto $\delta\varphi$ l'angolo di rotazione, gli spostamenti virtuali di A e di O' sono:

$$R_2 \delta\varphi, \quad \frac{r_2 - r_1}{2} \delta\varphi.$$

Per l'equilibrio è nullo il lavoro virtuale:

$$F r_2 \delta\varphi - mg \frac{r_2 - r_1}{2} \delta\varphi = 0, \quad F = mg \frac{r_2 - r_1}{2r_2}.$$

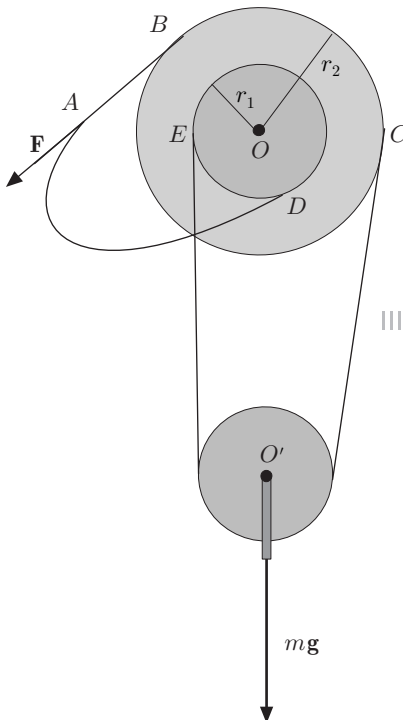


Fig. 13.40

La forza \mathbf{F} può essere resa piccola a piacere perché dipende dalla differenza $r_2 - r_1$. Il sistema è munito di un dispositivo a scappamento per impedire la rotazione inversa.

Da questi esempi si deduce che, in generale, nelle “macchine”, tanto si guadagna in forza quanto si perde in spostamento oppure, riferendosi alla velocità, tanto si guadagna in forza quanto si perde in velocità. È questa la *regola d'oro* delle macchine.

- ||| 25. Si consideri la scala di lunghezza l di figura 41. Supponendo che l'attrito tra parete e scala sia trascurabile e che μ_s sia il coefficiente di attrito statico del pavimento, determinare l'angolo θ massimo tra scala e parete, per il quale essa è in equilibrio.

Gli spostamenti virtuali degli estremi della scala, compatibili con i vincoli, sono δx e δy ; in corrispondenza l'angolo varia di $\delta\theta$.

Detta y_C l'ordinata del centro di massa, punto medio se si suppone la scala omogenea, si ha $y_C = l \cos \theta/2$ e $x = l \sin \theta$. Se l'angolo varia di $\delta\theta$, si ha

$$\delta y_C = \frac{dy}{d\theta} \delta\theta = -\frac{l}{2} \sin \theta \delta\theta, \quad \delta x = \frac{dx}{d\theta} \delta\theta = l \cos \theta \delta\theta.$$

Il lavoro virtuale della forza peso è

$$\delta \mathcal{L}_1 = -mg \delta y_C = \frac{l}{2} mg \sin \theta \delta\theta,$$

quello della forza d'attrito:

$$\delta \mathcal{L}_2 = -F_A \delta x = -F_A l \cos \theta \delta\theta.$$

Essendo il lavoro virtuale totale nullo, si ricava:

$$F_A = \frac{1}{2} mg \tan \theta.$$

Poiché per l'equilibrio deve essere $F_A \leq \mu_s mg$, si trae

$$\tan \theta \leq 2\mu_s, \quad \tan \theta_{max} = 2\mu_s.$$

Si osservi che in tutti gli esempi, non intervengono le reazioni vincolari né le tensioni delle funi.

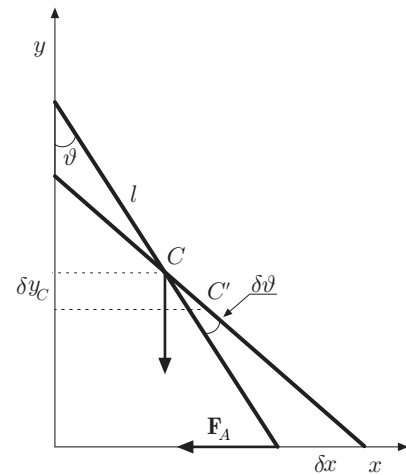


Fig. 13.41

- ||| 26. Il principio dei lavori virtuali è particolarmente utile nella soluzione di problemi in cui sono coinvolti corpi rigidi connessi tra loro.

Si consideri il sistema articolato, incernierato in A , B e C , che comprime un blocco in B , quando una forza \mathbf{F} è applicata in C , figura 42. Si vuole trovare la forza di compressione esercitata sul blocco.

Fissato un riferimento x, y , con origine in A , e detta l la lunghezza di AC e CB , le coordinate di B e C sono $x_B = 2l \sin \theta$, $y_C = l \cos \theta$. Gli spostamenti virtuali sono

$$\delta x_B = 2l \cos \theta \delta\theta, \quad \delta y_C = -l \sin \theta \delta\theta.$$

Il lavoro virtuale:

$$\delta \mathcal{L} = 2F_B l \cos \theta \delta\theta + F l \sin \theta \delta\theta, \quad F_B = \left| \frac{1}{2} F \tan \theta \right|.$$

dove F_B è la forza di compressione. Le reazioni vincolari non intervengono. Si lascia al lettore lo svolgimento del problema col metodo convenzionale.

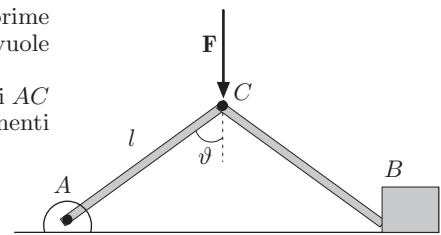


Fig. 13.42