

# 11. Dinamica relativa

## 1.1. Equazione fondamentale della dinamica in riferimenti non inerziali

La seconda legge della dinamica nei riferimenti inerziali permette di ricavare le equazioni del moto che, a parte posizioni e velocità iniziali, sono valide per ogni osservatore in moto relativo traslatorio uniforme, essendo accelerazione e tempo, misurati da tali osservatori, grandezze assolute. È valida la relatività galileiana, perciò gli spostamenti e tutte le grandezze dipendenti dalla velocità (quantità di moto, energia cinetica, momento angolare), dipendono dal riferimento. Tuttavia molte volte è necessario o più conveniente, pur assumendo come tempo quello assoluto, adottare un riferimento mobile rispetto ad un riferimento, che come precisato nel capitolo V, viene detto “assoluto”. D'altra parte viviamo in un riferimento non inerziale e molte conseguenze di questa circostanza ci sono abbastanza familiari.

Per ottenere la legge fondamentale della dinamica di un punto materiale rispetto ad una terna comunque mobile, basta ricordare il teorema di composizione delle accelerazioni, stabilito nel capitolo V, secondo il quale l'accelerazione assoluta è somma dell'accelerazione relativa, di trascinamento e dell'accelerazione di Coriolis:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

Moltiplicando per  $m$  e tenendo conto che  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , si deduce

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_t - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

Ponendo

$$\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t, \quad \mathbf{F}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

si ottiene

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_C, \quad (1)$$

La (1) è la legge fondamentale della dinamica relativa. Confrontando questa relazione con la seconda legge della dinamica stabilita nei riferimenti inerziali, si deduce che *un punto materiale si muove rispetto ad un riferimento comunque mobile come se questo*

fosse inerziale, pur di aggiungere alla risultante delle forze reali  $\mathbf{F}$ , che traduce l'azione di altri corpi, la forza di trascinamento  $\mathbf{F}_t$  e la forza di Coriolis  $\mathbf{F}_C$ . Le forze di trascinamento e la forza di Coriolis vengono chiamate *forze fittizie* o *forze apparenti*, perché cessano di esistere non appena vengono ripristinate le condizioni di inerzia del riferimento. Per queste forze, che non rappresentano azioni fisiche da parte di altri punti materiali, *non vale la legge di azione e reazione*. Inoltre, se le forze reali hanno risultante nulla,  $\mathbf{F} = 0$ , si deduce che  $\mathbf{a}_r \neq 0$ ; pertanto in un riferimento non inerziale *non vale la legge di inerzia*.

### 1.1. Forza centrifuga

Una forza di trascinamento molto importante è la forza centrifuga. Si consideri una terna mobile dotata soltanto di moto rotatorio uniforme con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$ , costante, diretta lungo l'asse  $z$ . In tale riferimento l'accelerazione di trascinamento di un punto materiale, come si è visto al paragrafo 3-V, ha segno negativo; indicando con  $\mathbf{r}$  il vettore perpendicolare all'asse  $z$ , che individua la posizione del punto, è

$$-\mathbf{a}_t = \omega^2 \mathbf{r}.$$

La forza di trascinamento corrispondente è dunque

$$\mathbf{F}_t = m\omega^2 \mathbf{r}.$$

Chiamiamo tale forza apparente, *forza centrifuga*; tra le sue evidenti caratteristiche c'è da sottolineare che la sua direzione è radiale rispetto all'asse di rotazione, cioè centrifuga.

### 1.2. Forza di Coriolis

La forza di Coriolis o complementare è una forza di deviazione; in quanto tale, non determina variazione dell'energia cinetica del punto materiale, è dunque a potenza nulla. Essendo definita dalla relazione  $\mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ , gode delle proprietà del prodotto vettoriale e risulta nulla se  $\boldsymbol{\omega} = 0$  o  $\mathbf{v}_r = 0$ , oppure se i due vettori sono paralleli. Nel riferimento solidale con la Terra, sebbene la velocità angolare sia modesta,  $\approx 10^{-5} \text{ rad/s}$ , la forza di Coriolis può avere effetti cospicui, se la velocità relativa è elevata, come nel caso di proiettili, missili e simili.

Consideriamo un punto materiale in moto da sud verso nord lungo un meridiano, figura 1. Nell'emisfero australe la forza di Coriolis è volta verso ovest, nell'emisfero boreale è diretta verso est; la sua intensità è nulla all'equatore, massima ai poli. Il contrario si verifica se il punto materiale procede da nord a sud. Si può verificare, per esempio, che un aereo di linea del tipo DC 747 di 370000 kg a pieno carico, alla velocità di crociera di 900 km/h,

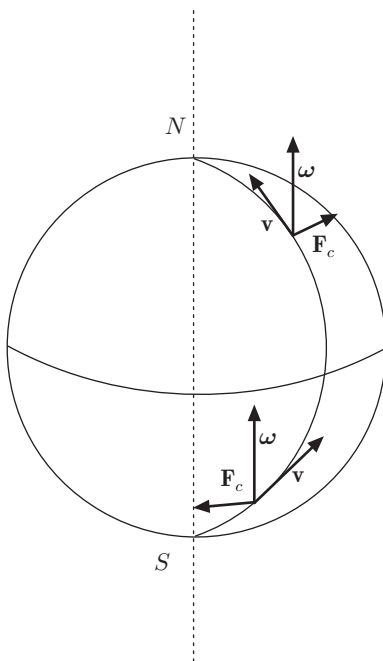


Fig. 11.1

a  $45^\circ$  di latitudine, è soggetto alla forza di circa  $5000\text{ N}$ . Se l'aereo viaggia verso est lungo un parallelo, la forza di Coriolis è ascendente; discendente nel caso contrario.

La forza di Coriolis ha un ruolo preminente in fisica dell'atmosfera, scienza che studia il moto delle masse di aria e l'andamento meteorologico nel nostro pianeta. Diamo qualche cenno su certi fenomeni più noti.

Una particella di aria è soggetta a diverse forze: forza gravitazionale, forze di pressione verticali dovute alle differenze di pressione ad altezze diverse, forze di pressione orizzontali che si manifestano da regioni di alta pressione verso quelle di bassa pressione. Inoltre se la particella d'aria è in movimento, agiscono forze di attrito, le forze centrifughe e la forza di Coriolis. Si capisce che lo studio del moto della masse d'aria è molto complicato se non si introducono ipotesi semplificatrici.

Supponiamo che il movimento sia orizzontale; ciò significa che le forze di pressione verticali sono equilibrate. Il flusso sia lento e tale da potere trascurare l'accelerazione lungo la traiettoria e le forze di attrito. Trascuriamo inoltre la forza centrifuga rispetto alla forza di Coriolis, poiché la prima dipende dal quadrato della velocità della particella d'aria. È tale il moto lento delle grandi masse di aria che circolano attorno alla Terra e che determinano i cicloni, gli anticicloni e i cosiddetti venti geostrofici che spirano da ovest e da est, venti costanti a velocità non molto elevata, presenti alle alte quote, dove la pressione è di circa  $200\text{ mbar}$ .

I cicloni e gli anticicloni sono causati dal movimento orizzontale di masse d'aria verso regioni di bassa pressione. Nei cicloni dell'emisfero boreale, nell'ipotesi di movimento lento, le particelle d'aria inizialmente in moto radiale, vengono deflesse a causa della forza di Coriolis. Una volta che si è stabilito l'equilibrio, il moto dell'aria avviene lungo le isobare, dove la forza di pressione è equilibrata dalla forza di Coriolis, figura 2; un osservatore solidale con la Terra, vede il vento spirare nel verso antiorario, figura 3; negli anticicloni il moto del vento è orario, figura 4. Nell'emisfero australe, l'osservatore vede i moti invertiti.

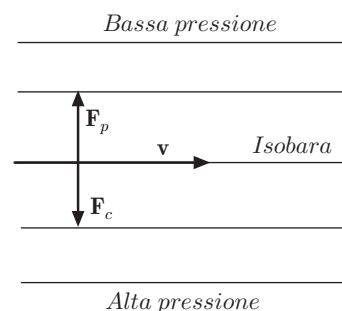


Fig. 11.2

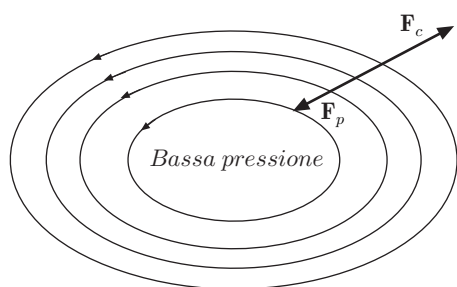


Fig. 11.3

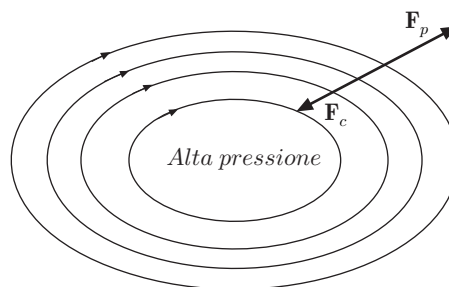


Fig. 11.4

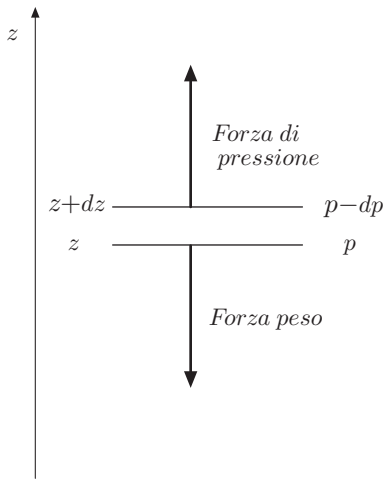


Fig. 11.5

Per capire l'andamento dei venti geostrofici, occorre studiare l'andamento della pressione lungo la verticale. Consideriamo lo strato di atmosfera compreso tra le quote  $z$  e  $z + dz$ , alle quali corrispondono le pressioni  $p$  e  $p - dp$ , figura 5. Se l'atmosfera è equilibrata, per la legge di Stevino, si ha

$$dp = -\rho g dz,$$

dove  $\rho$  è la densità dell'aria alla quota  $z$ . D'altra parte, per la legge dei gas perfetti, è

$$p = \frac{k_B}{m} \rho T,$$

dove  $k_B$  è la costante di Boltzmann,  $T$  la temperatura assoluta e  $m$  la massa della particella d'aria. Dalle precedenti si ottiene

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dz}{k_B T / (mg)}.$$

Chiamiamo *altezza di scala* dell'atmosfera, il fattore  $H = k_B T / (mg)$ , che è funzione della temperatura. Supponendo, per semplicità, che  $H$  sia costante e integrando la precedente, si ottiene

$$p = p_0 e^{-z/H},$$

in cui  $p_0$  è la pressione alla superficie terrestre. Si deduce che la pressione alla quota  $z$  dipende da  $H$ , e sarà tanto più elevata quanto più alta è la temperatura. Ad alcuni chilometri di quota, la pressione, nelle regioni più calde, è più elevata di quella delle regioni più fredde. Pertanto, a tali quote, esisteranno forze di pressione dirette dall'equatore ai poli e, per effetto della forza di Coriolis, il vento soffia verso est. Il sistema geostrofico si comporta come un enorme ciclone a circolazione lenta.

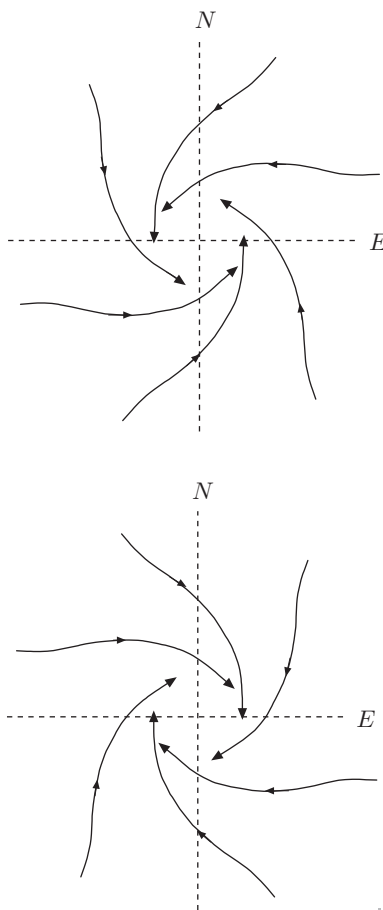


Fig. 11.6

La forza di Coriolis determina il comportamento degli uragani. In questo caso il vento non è equilibrato; se nell'atmosfera si crea un centro di bassa pressione, il vento soffia verso tale centro e può essere molto violento se la pressione è molto bassa, come si verifica nelle regioni tropicali a causa di un riscaldamento locale eccessivo. La forza di Coriolis devia le particelle di aria che, nell'emisfero boreale, visti dall'alto, assumono una configurazione antioraria, originando un moto vorticoso, mentre nell'emisfero australe, visti dall'alto, hanno una configurazione oraria, figura 6.

### 2. Equilibrio relativo

In un riferimento comunque mobile, un punto materiale è in equilibrio relativo, se  $\mathbf{a}_r = 0$  e  $\mathbf{v}_r = 0$ ; pertanto dalla (1) si deduce

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_t = 0. \tag{2}$$

Dunque aggiungendo alla risultante delle forze reali la sola forza apparente di trascinamento, la condizione di equilibrio relativo di un punto materiale è analoga a quella in un riferimento assoluto. Un osservatore che cade liberamente sotto l'azione della gravità si muove di moto uniformemente accelerato rispetto alla terra, praticamente rispetto ad un riferimento assoluto; se un corpo pesante cade contemporaneamente, l'osservatore lo giudica in equilibrio, poiché la forza di trascinamento  $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{g}$  è opposta alla forza reale  $m\mathbf{g}$ . L'osservatore solidale con la terra, ovviamente, giudica il corpo soggetto alla sola forza reale, di gravità, ed animato di moto con accelerazione costante.

Analogamente, un osservatore che si muove nello spazio interstellare, con accelerazione costante rivolta, per esempio, verso il soffitto della sua cabina, giudica "pesante" un corpo sottratto all'azione della gravità. Infatti il corpo è soggetto solo alla forza costante di trascinamento  $m\mathbf{a}_r = \mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$ .

Un viaggiatore che si trova in un veicolo, a causa di una frenata o di una accelerazione in avanti, viene proiettato in avanti o indietro. L'equilibrio del viaggiatore può essere assicurato, per esempio, dalle cinture di sicurezza che esercitano una reazione vincolare che è una forza reale.

### Esempi

- III 1. All'interno di un razzo, lanciato verso l'alto con accelerazione  $a$  costante, una massa  $m$  è sospesa ad una molla, figura 7. Determinare la forza che la molla esercita sulla massa all'equilibrio.

Per l'equilibrio relativo deve essere soddisfatta la (2), dove la forza reale è somma della forza elastica e del peso,  $\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{el}$ , e la forza di trascinamento è  $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$ . Detto  $x$  l'allungamento della molla e assumendo positiva la direzione del moto, si ha

$$-mg + kx - ma_t = 0, \quad kx = m(g + a_t).$$

Nel caso che l'accelerazione sia volta verso il basso:

$$kx = m(g - a_t);$$

se  $a = g$ , caduta libera,  $kx = 0$ , la molla è indeformata.

- III 2. Una navicella spaziale di massa  $M$ , orbita attorno alla terra. Supponendo che all'interno siano realizzate le condizioni di assenza di gravità, discutere l'equilibrio delle forze.

La sola forza agente sulla navicella è la forza gravitazionale esercitata dalla terra. Detta  $R$  la distanza della navicella dal centro della terra, tale forza, in modulo  $F = -GM M_T / R^2$ , è diretta verso il centro dell'orbita. Inoltre ogni massa all'interno della navicella è soggetta alla stessa accelerazione di quest'ultima,  $a = GM_T / R^2$ . Navicella e corpi in essa racchiusi hanno la stessa accelerazione, diretta verso il centro della terra e *cadono* continuamente, come la navicella, in quella direzione; tuttavia l'*accelerazione relativa* tra corpi e navicella è nulla, pertanto all'interno non si può rilevare la forza gravitazionale.

Un osservatore, nel riferimento ruotante con la navicella, per l'equilibrio di qualsiasi corpo di massa  $m$ , rileva una forza di trascinamento, centrifuga, opposta alla forza gravitazionale:

$$G \frac{mM_T}{R^2} = m\omega^2 R.$$

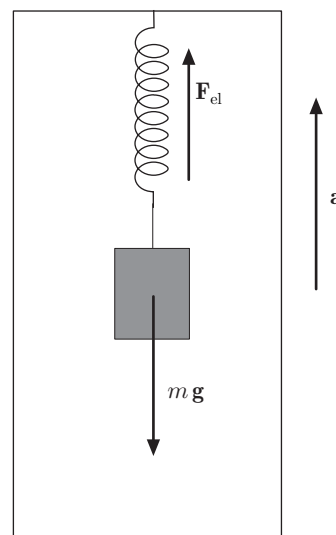


Fig. 11.7

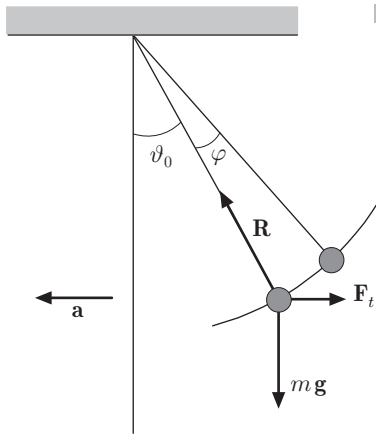


Fig. 11.8

III 3. Si determini il moto di un pendolo semplice fissato al soffitto di un vagone ferroviario, animato di accelerazione traslatoria costante, intorno alla posizione di equilibrio.

Se il vagone è fermo oppure in moto traslatorio uniforme, la posizione di equilibrio del pendolo è lungo la verticale. Se è presente l'accelerazione di trascinamento, il pendolo assume una nuova posizione di equilibrio ed il filo forma un angolo  $\theta_0$  rispetto alla verticale, figura 8. Tale posizione è stabilita dalla (2), dove le forze reali sono la reazione  $\mathbf{R}$  del vincolo e il peso  $m\mathbf{g}$ , mentre la forza di trascinamento è  $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$ . Pertanto

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{F}_t = 0.$$

Proiettando sulla tangente e sulla normale alla traiettoria del pendolo, si ha

$$ma_t \cos \theta_0 - mg \sin \theta_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad a_t = g \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} = g \tan \theta_0,$$

$$R - mg \cos \theta_0 - ma_t \sin \theta_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad R = mg \cos \theta_0 + ma_t \sin \theta_0.$$

Dalla prima relazione si deduce che dalla misura dell'angolo  $\theta_0$  è possibile ricavare l'accelerazione di trascinamento; dunque il sistema può costituire un accelerometro.

Se il pendolo viene spostato di un angolo  $\varphi$  rispetto a  $\theta_0$ , inizia ad oscillare; il moto oscillatorio può essere ricavato proiettando sulla tangente alla traiettoria l'equazione:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{F}_t.$$

Detto  $\theta = \theta_0 + \varphi$  l'angolo che il filo forma con la verticale ed  $l$  la sua lunghezza, si ottiene

$$\begin{aligned} l\ddot{\varphi} &= a_t \cos(\theta_0 + \varphi) - g \sin(\theta_0 + \varphi) \\ &= (a_t \cos \theta_0 - g \sin \theta_0) \cos \varphi - (a_t \sin \theta_0 + g \cos \theta_0) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Ma si è trovato:

$$a_t \cos \theta_0 - g \sin \theta_0 = 0,$$

dunque la precedente diventa:

$$l\ddot{\varphi} + (a_t \sin \theta_0 + g \cos \theta_0) \sin \varphi = 0.$$

Se  $\sin \varphi \approx \varphi$ , si ha

$$l\ddot{\varphi} + (a_t \sin \theta_0 + g \cos \theta_0) \varphi = 0;$$

Le oscillazioni sono armoniche con periodo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{a_t \sin \theta_0 + g \cos \theta_0}}.$$

Il periodo delle piccole oscillazioni è diverso da quello di un pendolo soggetto solamente alla gravità. Solo se l'accelerazione di trascinamento è modesta,  $\theta_0 \approx 0$ , i periodi sono circa uguali.

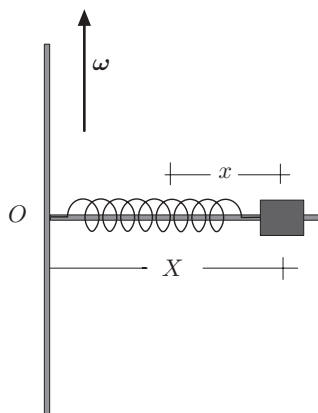


Fig. 11.9

III 4. Una massa puntiforme può scorrere lungo un'asta rigida orizzontale che ruota con velocità angolare  $\omega$  costante, attorno ad un asse verticale passante per un estremo dell'asta, figura 9. La massa è vincolata ad  $O$  mediante una molla di massa trascurabile e costante elastica  $k$ . Discutere la posizione di equilibrio relativo.

Nel riferimento ruotante la condizione di equilibrio relativo è stabilita dalla (2). Detta  $X$  la posizione della massa rispetto ad  $O$ ,  $x$  l'allungamento della molla ed  $l_0$  la lunghezza della molla a riposo, si ha

$$m\omega^2 X - kx = 0,$$

ed, essendo  $X = l_0 + x$ :

$$m\omega^2 X - k(X - l_0) = 0, \quad \Rightarrow \quad X = \frac{kl_0}{k - m\omega^2}. \quad (3)$$

L'osservatore ruotante vede la massa in equilibrio sotto l'azione della forza elastica, reale, e della forza di trascinamento, centrifuga, volta radialmente. L'allungamento della molla visualizza la forza centrifuga. Si noti che per  $\omega = 0$ ,  $X = l_0$ . Se  $l_0 \approx 0$  e  $k - m\omega^2 = 0$ , cioè  $\omega = \sqrt{k/m}$ ,  $X$  è indeterminata; la massa è in equilibrio indifferente in ogni punto dell'asta. Se la massa è vincolata con un filo, la reazione del filo realizza la forza reale.

La (3) può essere ricavata con considerazioni sull'energia; infatti la forza centrifuga è conservativa, perciò l'energia potenziale del sistema è

$$U = -\frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + \frac{1}{2}k(X - l_0)^2.$$

Derivando si ha

$$\frac{dU}{dX} = -m\omega^2 X + k(X - l_0),$$

che, per l'equilibrio, va posta uguale a zero. Pertanto:

$$-m\omega^2 X + k(X - l_0) = 0, \quad \Rightarrow \quad X = \frac{kl_0}{k - m\omega^2}.$$

L'equilibrio è stabile se  $d^2U/dX^2 > 0$ , instabile se  $d^2U/dX^2 < 0$ . Poiché

$$\frac{d^2U}{dX^2} = k - m\omega^2,$$

si deduce che per

$$k > m\omega^2, \quad \Rightarrow \quad \omega < \sqrt{\frac{k}{m}},$$

l'equilibrio è stabile, mentre per

$$k < m\omega^2, \quad \Rightarrow \quad \omega > \sqrt{\frac{k}{m}},$$

l'equilibrio è instabile. Per ottenere ulteriori informazioni, occorre studiare il moto della massa; la seconda equazione della dinamica nel riferimento ruotante è:

$$ma_r = m\omega^2 X - kx = (m\omega^2 - k)X + kl_0,$$

ossia,

$$\ddot{X} + \frac{k - m\omega^2}{m}X - \frac{k}{m}l_0 = 0. \quad (4)$$

L'equazione va risolta come di solito; nel caso in esame però, il coefficiente di  $X$  dipende dalla velocità angolare  $\omega$ , perciò da essa dipenderà il moto. Assumendo come nuova variabile

$$\chi = X - \frac{kl_0}{k - m\omega^2},$$

la (4) diventa

$$\ddot{\chi} + \frac{k - m\omega^2}{m}\chi = 0. \quad (5)$$

L'equazione algebrica associata, paragrafo 3-X, ammette le radici

$$\alpha_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k - m\omega^2}{m}}.$$

Se le radici sono reali,  $m\omega^2 > k$ ,  $\omega > \sqrt{k/m}$ , l'equilibrio è instabile e la soluzione della (5) è del tipo

$$\chi(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}, \quad (6)$$

dove le costanti  $C_1$  e  $C_2$  vanno determinate conformemente alle condizioni iniziali. Assumiamo, per semplicità che, per  $t = 0$ , sia  $\chi = \chi_0$  e  $\dot{\chi} = 0$ ; derivando la (6) si ha

$$\dot{\chi} = \alpha C_1 e^{\alpha t} - \alpha C_2 e^{-\alpha t}. \quad (7)$$

Per  $t = 0$ , le (6) e (7) danno

$$\chi_0 = C_1 + C_2, \quad 0 = \alpha C_1 - \alpha C_2;$$

da queste si ottiene  $C_1 = C_2 = C = \chi_0/2$ . Dunque la (6) diventa

$$\chi(t) = \frac{\chi_0}{2} (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) = \chi_0 \cosh \alpha t.$$

La massa si allontana tendendo a  $+\infty$  oppure a  $-\infty$  secondo che  $\chi_0$  si trovi a destra oppure a sinistra del punto di equilibrio. Naturalmente una molla reale non può essere allungata o compressa oltre certi limiti; nondimeno il problema va risolto come se la forza elastica fosse ideale.

Se le radici dell'equazione algebrica sono immaginarie,  $m\omega^2 - k < 0$ , poniamo

$$\alpha = \pm i \sqrt{\frac{k - m\omega^2}{m}} = \pm i\Omega;$$

la soluzione della (5), in conformità alle condizioni iniziali assegnate, è una oscillazione armonica del tipo

$$\chi(t) = \chi_0 \cos \Omega t,$$

come si è trovato al paragrafo 3-X.

- III 5. Equilibrio di un corpo puntiforme  $P$ , posto in un recipiente conico ruotante attorno al suo asse, in assenza di attrito, figura 10.

Detta  $m$  la massa del corpo, l'equilibrio, nel riferimento ruotante, è dato dalla (2), perciò

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R} + m\omega^2 \mathbf{r} = 0, \quad (8)$$

dove  $\mathbf{R}$  è la reazione vincolare, normale alla falda del cono, ed  $r$  la distanza di  $P$  dall'asse; ovviamente la risultante del peso e della forza centrifuga deve essere opposta ad  $\mathbf{R}$ . Assumiamo il riferimento ruotante con origine nel vertice del cono, asse  $x$  volto radialmente e asse  $z$  coincidente con l'asse di rotazione. Proiettando la precedente e detta  $x$  la coordinata di  $P$ , si ha

$$m\omega^2 x - R \cos \alpha = 0, \quad R \sin \alpha - mg = 0, \quad (9)$$

essendo  $\alpha$  la semiapertura del cono.

Eliminando  $R$ , si ottiene

$$m\omega^2 x - \frac{mg}{\tan \alpha} = 0, \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{x \tan \alpha}}. \quad (10)$$

Da questa si può ricavare  $x$ , oppure la distanza di  $P$  dal vertice del cono.

La condizione di equilibrio si può determinare con considerazioni sull'energia; il riferimento ruotante è sede del campo di forza della gravità e del campo della forza centrifuga, conservativi. L'energia potenziale è

$$U(x) = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2 x = mg \frac{x}{\tan \alpha} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

La condizione di equilibrio si ha quando l'energia potenziale è minima, cioè per  $dU/dx = 0$ :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{mg}{\tan \alpha} - m\omega^2 x = 0,$$

da cui si ottiene la (10). Il punto di equilibrio,

$$x = \frac{g}{\omega^2 \tan \alpha},$$

è instabile. Infatti la funzione  $U(x)$  è rappresentata da una parabola ad asse verticale, concavità volta verso il basso e massimo nel punto di equilibrio; d'altra parte risulta anche  $d^2U/dx^2 < 0$ .

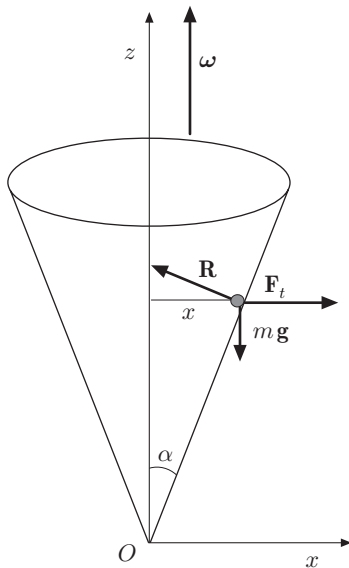


Fig. 11.10



Si osservi ancora che la (8) può essere proiettata su una generatrice del cono, assumendo positivo il verso ascendente, e sulla sua normale, assumendo positivo il verso della reazione vincolare. Si ha

$$-mg \cos \alpha + m\omega^2 x \sin \alpha = 0 \quad (11)$$

$$R - mg \sin \alpha - m\omega^2 x \cos \alpha = 0. \quad (12)$$

Dalla (11) si ottiene la coordinata  $x$  di equilibrio, dalla (12) la reazione vincolare:

$$R = mg \sin \alpha + m\omega^2 x \cos \alpha = \frac{mg}{\sin \alpha}, \quad (13)$$

in conformità con la seconda delle (9). Se la falda del cono presenta attrito, la forza di attrito  $F_A = \mu_s R$ , è volta nel verso positivo assunto sulla generatrice. In tal caso l'equilibrio si ha per

$$-mg \cos \alpha + m\omega^2 x \sin \alpha + \mu_s R = 0;$$

da cui, tenuto conto della (13),

$$\begin{aligned} mg \cos \alpha &= m\omega^2 x \sin \alpha + \mu_s R \\ &= m\omega^2 x \sin \alpha + \mu_s (mg \sin \alpha + m\omega^2 x \cos \alpha), \end{aligned}$$

oppure:

$$mg \cos \alpha = m\omega^2 x \sin \alpha + \mu_s \frac{mg}{\sin \alpha}.$$

Si ricava inoltre

$$\omega^2 = \frac{g \cos \alpha - \mu_s \sin \alpha}{x \sin \alpha + \mu_s \cos \alpha}.$$

Si deduce che per  $\mu_s = 0$ , si ottiene la (10). Se  $\alpha = 0$ , parete verticale, si ha

$$\omega^2 = \frac{g}{x\mu_s}, \quad \Rightarrow \quad mg = \mu_s m\omega^2 x.$$

La forza di gravità, per un opportuno valore di  $\omega$ , può essere equilibrata dalla forza centrifuga nel senso che, essendo quest'ultima ortogonale alla parete, la reazione vincolare presenta un componente verticale, opposto al peso del corpo considerato.

Se  $\alpha = \pi/2$ , piano orizzontale, si deduce

$$\omega^2 = -\mu_s \frac{g}{x}, \quad \Rightarrow \quad m\omega^2 x = -\mu_s mg;$$

la forza centrifuga, per un opportuno valore di  $\omega$ , è equilibrata dalla forza di attrito.

Infine se  $\omega = 0$ , si ha

$$\cos \alpha = \mu_s \sin \alpha, \quad \mu_s = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha},$$

conformemente alla definizione di coefficiente d'attrito. Si tenga conto che il verso positivo dell'angolo è fissato rispetto alla verticale.

- III 6. Una massa puntiforme si può muovere senza attrito lungo una circonferenza rigida di raggio  $R$ , che ruota con velocità angolare costante attorno ad un suo diametro disposto verticalmente, figura 11. Determinare le posizioni di equilibrio nel riferimento ruotante.

Detta  $\mathbf{F}^{(v)}$  la reazione vincolare, l'equilibrio relativo è dato dalla (2):

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}^{(v)} = 0.$$

Proiettando lungo la tangente e la normale alla circonferenza, si ha

$$\begin{aligned} mg \sin \theta - m\omega^2 R \sin \theta \cos \theta &= 0 \\ F^{(v)} - mg \cos \theta - m\omega^2 R \sin^2 \theta &= 0. \end{aligned}$$

Dalla prima si ottiene

$$\sin \theta (g - \omega^2 R \cos \theta) = 0,$$

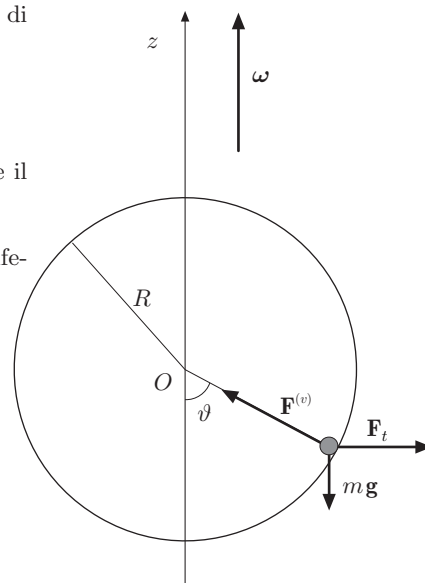


Fig. 11.11

che ha come soluzioni

$$\theta = 0, \quad \theta = \pi, \quad \cos \theta = \frac{g}{\omega^2 R}.$$

La prima corrisponde al punto più basso della circonferenza, la seconda alla sommità. La terza implica che dev'essere  $\omega^2 R > g$ .

Assunto un riferimento  $x$ - $z$  solidale con la circonferenza, con origine nel punto più basso di questa e asse  $z$  coincidente col diametro, l'energia potenziale in tale riferimento è

$$U = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Posto

$$z = R(1 - \cos \theta), \quad x = R \sin \theta,$$

si ha

$$U = mgR - mgR \cos \theta - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta.$$

Le posizioni di equilibrio si ottengono uguagliando a zero la derivata di  $U$  rispetto a  $\theta$ :

$$\frac{dU}{d\theta} = mR \sin \theta (g - \omega^2 R \cos \theta) = 0,$$

che coincidono con quelle trovate prima.

La stabilità dell'equilibrio va studiata esaminando la derivata seconda:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = mR(g \cos \theta - \omega^2 R \cos 2\theta).$$

Per  $\theta = 0$  si ha

$$\left( \frac{d^2U}{d\theta^2} \right)_{\theta=0} = mR(g - \omega^2 R);$$

Se  $\omega^2 R < g$ , l'equilibrio è stabile: Se  $\omega^2 R > g$ , l'equilibrio è instabile.

Per  $\theta = \pi$  si ha

$$\left( \frac{d^2U}{d\theta^2} \right)_{\theta=\pi} = -mg(g + \omega^2 R) < 0;$$

l'equilibrio è instabile. Per  $\cos \theta = g/(\omega^2 R)$ , è

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = m\omega^2 R^2 \left( 1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2} \right).$$

Tale espressione è positiva se  $\omega^2 R > g$ , e dunque l'equilibrio è stabile.

.....

### III 3. Moto relativo

Nel capitolo V si è messo ben in evidenza che una certa realtà fisica può essere descritta in modi differenti a seconda del riferimento che viene adottato. Se è noto il movimento in uno dei riferimenti, per esempio in quello inerziale, è possibile descrivere il moto in un riferimento non inerziale, o viceversa, applicando le leggi di trasformazione di coordinate dirette ed inverse. La scelta del riferimento deve rispondere a un criterio di convenienza. Di norma il riferimento è quello inerziale, in quanto non sono presenti le forze fittizie; tuttavia molte volte è indifferente adottare un riferimento piuttosto che un altro. Nel caso dell'esempio 5, possiamo adottare un riferimento fisso in cui l'osservatore vede

il punto materiale animato di moto circolare uniforme. Il punto è soggetto alla forza peso e alla reazione del vincolo, necessaria per fargli descrivere la traiettoria circolare. In tale riferimento la seconda equazione della dinamica si scrive

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R} = m\mathbf{a}.$$

Proiettando nella direzione centripeta e in direzione ortogonale ascendente, si ha

$$R \cos \alpha = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r, \quad R \sin \alpha - mg = 0,$$

avendo indicato con  $r$  la distanza del punto materiale dall'asse di rotazione. Dalle precedenti si traggono le stesse conclusioni dell'esempio citato.

Un altro sistema che può essere studiato in un riferimento fisso oppure ruotante è il pendolo conico. Esso è costituito da una massa  $m$  sospesa per mezzo di un filo, inestensibile e di massa trascurabile, ad un punto  $O$ , figura 12. La massa è posta in rotazione attorno alla verticale passante per  $O$ , in modo che il filo formi con essa un angolo  $\theta$ , perciò la traiettoria descritta è una circonferenza in un piano orizzontale, di raggio  $r = l \sin \theta$ .

Nel riferimento fisso, le forze che agiscono sono il peso e la reazione esercitata dal filo, dunque si ha

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R} = m\mathbf{a}.$$

Proiettando, come prima, lungo la direzione centripeta e nella direzione ortogonale ascendente, si ottiene

$$R \sin \theta = m \frac{v^2}{l \sin \theta} = m\omega^2 l \sin \theta, \quad R \cos \theta - mg = 0.$$

Nel riferimento ruotante, deve essere soddisfatta la condizione di equilibrio relativo:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R} + m\omega^2 \mathbf{r} = 0.$$

Proiettando lungo la direzione radiale e nella direzione ortogonale ascendente, si ha

$$-R \sin \theta + m\omega^2 l \sin \theta = 0, \quad R \cos \theta - mg = 0.$$

In entrambi i riferimenti si ottengono risultati identici.

Dalle relazioni precedenti si deduce una interessante relazione:

$$\cos \theta = \frac{g}{\omega^2 l},$$

la quale mostra che se la velocità angolare cresce, l'angolo  $\theta$  aumenta. Sistemi meccanici che sfruttano questa relazione sono usati per regolare l'alimentazione di vapore o di combustibile di

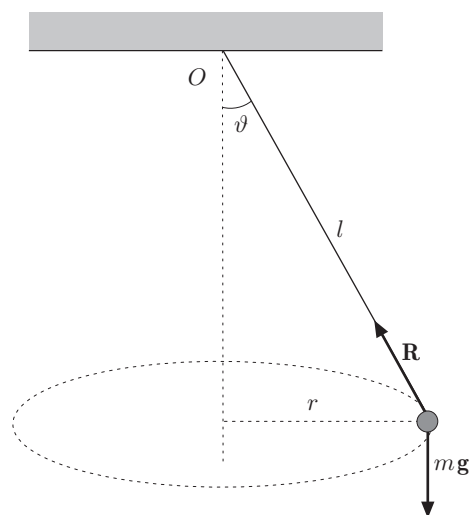


Fig. 11.12

certe macchine, quando la velocità angolare supera un valore prefissato (regolatore di Watt).

Consideriamo due terne  $\Omega\xi\eta\zeta$  e  $Oxyz$  con l'origine in comune ed assi  $\zeta$  e  $z$  coincidenti; la prima fissa e la seconda ruotante attorno al comune asse  $z$  con velocità angolare costante. Un punto materiale sia in equilibrio nel piano  $x-y$ , perché vincolato ad un filo inestendibile fissato all'origine  $O$ . L'osservatore fisso vede il punto descrivere una circonferenza, mentre l'osservatore mobile vede il punto in equilibrio; la forza centrifuga è opposta alla reazione del vincolo. Ad un certo istante il filo viene tagliato; ovviamente l'osservatore fisso, per la legge di inerzia, vede il punto sfuggire lungo la tangente alla circonferenza, con moto rettilineo uniforme. Per l'osservatore ruotante la situazione è ben diversa; le forze che agiscono sul punto sono: la forza centrifuga e la forza di Coriolis. Per ricavare il moto nel riferimento ruotante bisogna considerare l'equazione della dinamica relativa:

$$m\mathbf{a}_r = m\omega^2\mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

Proiettando sugli assi del riferimento ruotante si ha

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \omega^2x + 2\omega\dot{y} \\ \ddot{y} &= \omega^2y - 2\omega\dot{x},\end{aligned}\tag{14}$$

cioè

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2y &= 0.\end{aligned}$$

Questo sistema, con una certa fatica, può essere risolto analiticamente. Supponendo che per  $t = 0$

$$x = x_0, \quad y = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0,$$

si trova la soluzione:

$$\begin{aligned}x &= x_0(\cos \omega t + \omega t \sin \omega t) \\ y &= x_0(-\sin \omega t + \omega t \cos \omega t).\end{aligned}\tag{15}$$

Il punto materiale descrive una traiettoria che è l'evolvente della circonferenza (evoluta), con centro in  $O$  e raggio  $x_0$ . In Geometria si definisce evoluta il luogo dei punti involuppo delle normali in ogni punto all'evolvente. Tale traiettoria è percorsa dal punto con accelerazione tangenziale costante. Infatti:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = x_0\omega^2t,$$

$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = x_0\omega^2.$$

Tuttavia non è necessario risolvere il sistema di equazioni differenziali (14); infatti nel riferimento fisso le condizioni iniziali imposte

comportano un moto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\xi = x_0, \quad \eta = \omega x_0 t.$$

Questo moto è un aspetto diverso della stessa situazione fisica; se si rompono i legami che fissano un oggetto su un veicolo che percorre una curva, chi si trova sul veicolo afferma che la traiettoria è espressa dalle (15); mentre chi si trova sulla strada afferma semplicemente che l'oggetto sfugge lungo la tangente alla sua primitiva traiettoria, movendosi quindi di moto rettilineo uniforme.

D'altra parte servendosi delle formule di trasformazione delle coordinate ruotanti:

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \theta + \eta \sin \theta \\ y &= -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta, \end{aligned}$$

con  $\theta = \omega t$ , e sostituendovi  $\xi$  ed  $\eta$ , si ottengono immediatamente le (15).

Supponiamo ora di imporre condizioni iniziali diverse; per  $t = 0$ :

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = v_0, \quad \dot{y}_0 = 0.$$

Le equazioni del moto nel riferimento fisso sono:

$$\xi = v_0 t, \quad \eta = 0;$$

usando la trasformazione di coordinate precedente, si ottiene:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \omega t \\ y &= -v_0 t \sin \omega t. \end{aligned}$$

Nel riferimento mobile, la traiettoria è una spirale di Archimede. Ancora, se la posizione iniziale del punto fosse diversa da zero, si avrebbe

$$\begin{aligned} x &= (v_0 t + x_0) \cos \omega t \\ y &= -(v_0 t + x_0) \sin \omega t. \end{aligned}$$

### || 3.1. Deviazione dalla verticale nella caduta dei gravi

Si è detto che la Terra non è un riferimento inerziale, a causa della rotazione attorno al suo asse. Consideriamo un grave che cade alla latitudine  $\lambda$  ed in corrispondenza fissiamo una terna solidale con la terra, con asse  $x$  tangente alla superficie terrestre, asse  $y$  volto ad est ed asse  $z$  coincidente con la verticale, figura 13.

L'equazione della dinamica in tale riferimento è

$$m\mathbf{a}_r = m\mathbf{g} + m\omega^2\mathbf{r} - 2m\omega \times \mathbf{v}_r,$$

Poiché la velocità angolare della terra è piccola, in prima approssimazione, possiamo trascurare i termini in  $\omega^2$ . Proiettando  $\omega$

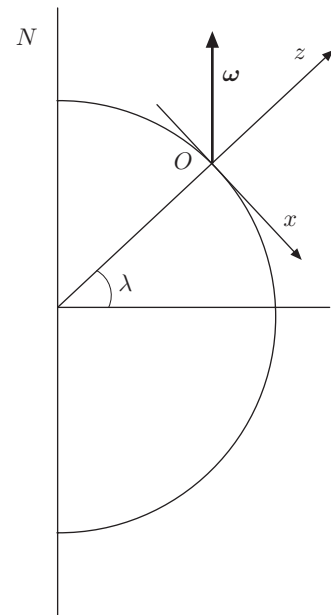


Fig. 11.13

sugli assi del riferimento, si ha

$$\omega_x = -\omega \cos \lambda, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega \sin \lambda.$$

Essendo

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\omega \cos \lambda & 0 & \omega \sin \lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{pmatrix},$$

si ottiene il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega\dot{y} \sin \lambda \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x} \sin \lambda - 2\omega\dot{z} \cos \lambda \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega\dot{y} \cos \lambda, \end{aligned} \quad (16)$$

che vanno integrate imponendo, per  $t = 0$ , le seguenti condizioni iniziali:

$$x_0 = y_0 = 0, \quad z_0 = H, \quad \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0.$$

Se trascuriamo, come per ipotesi, i termini in  $\omega^2$ , il sistema può essere risolto facilmente. Infatti integrando la prima e la terza equazione, si ha

$$\dot{x} = 2\omega y \sin \lambda, \quad \dot{z} = -gt + 2\omega y \cos \lambda. \quad (17)$$

Sostituendo nella seconda delle (16) si ha

$$\ddot{y} = -2\omega \cos \lambda (-gt + 2\omega y \cos \lambda) - 4\omega^2 y \sin^2 \lambda,$$

e trascurando i termini in  $\omega^2$ :

$$\ddot{y} = 2\omega g \cos \lambda t.$$

Con successive integrazioni si ottiene

$$\dot{y} = \omega g \cos \lambda t^2, \quad y = \frac{1}{3} \omega g \cos \lambda t^3.$$

Sostituendo nella prima delle (17), si trova che  $x(t)$  dipende da  $\omega^2$ , dunque è trascurabile, mentre la seconda delle (17), con lo stesso criterio, fornisce

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + H.$$

La traiettoria si svolge nel piano  $y$ - $z$  e le equazioni del moto sono

$$y = \frac{1}{3}\omega g \cos \lambda t^3, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + H.$$

Dalla seconda si ottiene il tempo che impiega il grave per toccare il suolo,

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Il punto di impatto ha coordinate:

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{3} \omega g \cos \lambda \left( \frac{2H}{g} \right)^{2/3}, \quad z = 0.$$

La deviazione avviene verso est e dipende dalla latitudine; è massima all'equatore e nulla ai poli.

Un calcolo esatto, che comporta mantenere i termini in  $\omega^2$ , condurrebbe ad una leggera deviazione aggiuntiva verso sud. In realtà un corpo, soggetto all'azione della gravità, cade con la velocità iniziale di trascinamento

$$\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P}_0 - \mathbf{O}),$$

volta verso est, lungo il parallelo corrispondente al piede della verticale di caduta:  $\boldsymbol{\omega}$  è la velocità angolare della Terra,  $(\mathbf{P}_0 - \mathbf{O})$  è il vettore che individua la posizione iniziale del grave rispetto al centro della terra  $O$ , figura 14. Il moto è kepleriano e la traiettoria assoluta una ellisse appartenente al piano di  $O$  e  $\mathbf{v}_0$ , con il fuoco in  $O$ .

Nota dunque il moto assoluto, si può passare a quello relativo mediante le formule di trasformazione di coordinate, tenendo conto che la velocità angolare alla latitudine  $\lambda$ , è  $\omega \sin \lambda$ . Il punto di impatto col suolo è intersezione della traiettoria ellittica con la superficie terrestre, supponendo quest'ultima sferica. Con questo procedimento si ottiene il risultato esatto, evitando le approssimazioni che si sono fatte†.

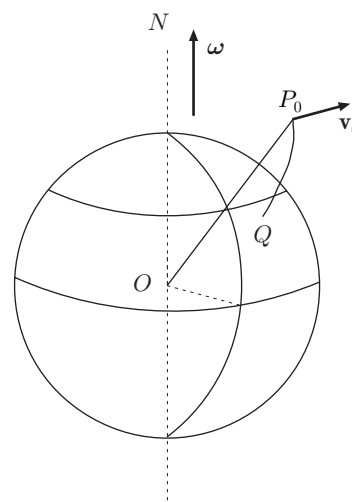


Fig. 11.14

#### 4. Pendolo di Foucault

La deviazione della caduta dei gravi dalla verticale costituisce una prova della rotazione terrestre; una seconda prova è data dal pendolo di Foucault.

Supponiamo che un pendolo oscilli sospeso ad un punto appartenente all'asse terrestre, per esempio, al polo nord. L'osservatore solidale con la Terra rileva che il piano di oscillazione del pendolo ruota compiendo un giro completo in 24 ore, nel verso che va da est ad ovest. Egli attribuisce tale movimento alla forza fittizia di Coriolis ( $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ ), che in ogni punto della traiettoria è ortogonale alla velocità del pendolo: Viceversa, un osservatore inerziale rileva che la giacitura di tale piano è invariante e conclude che la terra ruota rispetto al pendolo.

Omettiamo la risoluzione del problema del moto nel riferimento terrestre;‡ ci limitiamo pertanto a dimostrare che, nel rife-

†Il lettore può utilmente consultare: A. Sommerfeld, *Mechanics*, pag. 167  
J.B. Marion, *Classical Dynamics*, Academic Press, New York, pag. 352

‡J.B. Marion, *Classical Dynamics*, Academic Press, New York, pag. 355

rimento inerziale, la giacitura del piano di oscillazione è invariante. In tale riferimento è

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}, \quad (18)$$

dove  $\mathbf{R}$  è la reazione vincolare. Indichiamo con  $\mathbf{r}$  la posizione del punto materiale rispetto al punto di sospensione e moltiplichiamo scalarmente ambo i membri della (18) per  $\mathbf{r} \times \mathbf{g}$ ; si ha

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) = 0,$$

poiché  $\mathbf{r} \times \mathbf{g}$  è ortogonale sia a  $\mathbf{g}$  che a  $\mathbf{R}$ . Consideriamo ora l'espressione:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) + \mathbf{v} \cdot \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{g} \right) + \mathbf{v} \cdot \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{g}}{dt} \right).$$

Si vede facilmente che il secondo e terzo termine sono nulli perché  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  e inoltre  $\mathbf{g}$  è costante. Risulta dunque

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) = 0.$$

Pertanto

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \text{cost};$$

ma nei punti di inversione del moto è  $\mathbf{v} = 0$ , perciò in ogni istante la costante è uguale a zero:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{g} = 0;$$

i tre vettori sono complanari.

Se il punto di sospensione non appartiene all'asse terrestre, ma si trova alla latitudine  $\lambda$ , la velocità angolare  $\omega$  ha una componente radiale  $\omega \sin \lambda$  e una componente tangente al meridiano, figura 15; quest'ultima, per piccole oscillazioni è inefficace. Dunque, alla latitudine  $\lambda$ , il piano di oscillazione del pendolo ruota attorno ad un asse verticale con velocità angolare  $-\omega \sin \lambda$ .

L'esperienza, per evidenziare la rotazione del piano di oscillazione, fu eseguita da Foucault nel 1851, nella chiesa des Invalides di Parigi; egli sospese un pendolo lungo  $67\text{ m}$ , che durante ogni oscillazione lasciava cadere della sabbia, mostrando una rotazione di  $11^\circ 15'$  ogni ora. Il giro completo, alla latitudine di Parigi, avveniva in 32 ore e 32 minuti. Le traiettorie tracciate sul suolo dalla sabbia sono mostrate in figura 16. Nell'emisfero australe le tracce sono analoghe ma descritte in senso inverso perché il piano di oscillazione ruota in senso antiorario a causa dell'inversione della forza di Coriolis.

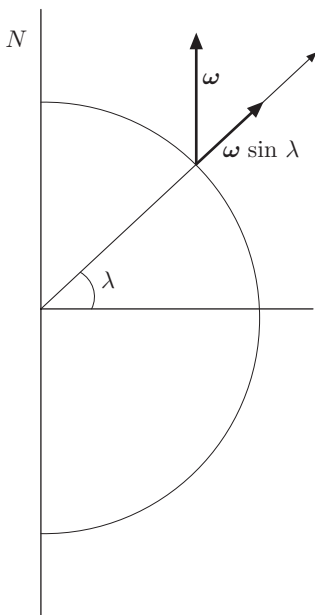


Fig. 11.15

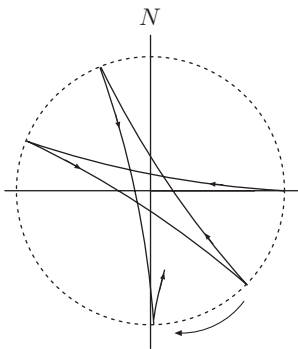


Fig. 11.16



### 5. Dipendenza dell'accelerazione di gravità dalla latitudine

L'accelerazione di gravità dipende dalla latitudine perché, nel riferimento solidale con la terra, agisce anche la forza centrifuga. La figura 17 mostra la composizione dell'accelerazione di gravità e dell'accelerazione centrifuga; quest'ultima indicata necessariamente in modo sproporzionato rispetto alla gravità, ad una certa latitudine  $\lambda$ . Supponendo la terra perfettamente sferica ed omogenea, si riconosce che l'accelerazione di gravità "efficace" è un vettore  $\mathbf{g}'$ , dato da

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} + \omega^2 \mathbf{r},$$

da cui:

$$g'^2 = g^2 + \omega^4 r^2 - 2g\omega^2 r \cos \lambda.$$

Essendo  $r = R_T \cos \lambda$ , dove  $R_T$  è il raggio della terra, la precedente diventa

$$g'^2 = g^2 + \omega^4 R_T^2 \cos^2 \lambda - 2g\omega^2 R_T \cos^2 \lambda.$$

Da questa relazione si trae che ai poli,  $\cos \lambda = 0$ ,  $g' = g$ ; all'equatore,  $\cos \lambda = 1$ , è

$$g'^2 = g^2 + \omega^4 R_T^2 - 2g\omega^2 R_T. \quad (19)$$

Trascurando nella (19) il secondo termine, che contiene  $\omega^4$ , con ottima approssimazione si può scrivere:

$$g'^2 = g^2 - 2g\omega^2 R_T \cos^2 \lambda;$$

si ottiene:

$$g' = g \left( 1 - \frac{2\omega^2 R_T \cos^2 \lambda}{g} \right)^{1/2} \approx g \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{2\omega^2 R_T \cos^2 \lambda}{g} \right).$$

Infine:

$$g' = g - \omega^2 R_T \cos^2 \lambda = g - 3,5 \cdot 10^{-2} \cos^2 \lambda. \quad (20)$$

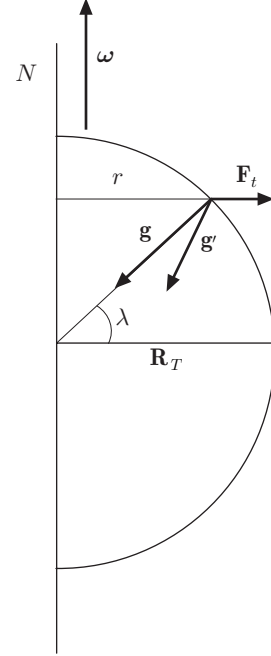


Fig. 11.17