

# 10. Problemi di dinamica del punto materiale

## 1. Interazione gravitazionale tra corpi sferici

Premettiamo, come si è anticipato nel capitolo VII, la dimostrazione che l'interazione gravitazionale tra due corpi sferici omogenei, avviene come se la massa dei corpi sia localizzata nel centro geometrico delle sfere. Ricordando che l'energia potenziale di una massa puntiforme  $m_1$ , nel campo gravitazionale di una massa  $m$ , è data dall'espressione

$$U(r) = -G \frac{mm_1}{r}, \quad (1)$$

consideriamo un guscio sferico omogeneo, di raggio  $R$ , massa  $m$  e densità areica di massa  $\sigma = dm/dS$ , ed una massa  $m_1$  esterna, posta a distanza  $r$  dal suo centro. Dividiamo il guscio sferico in tanti anelli, di altezza infinitesima e superficie  $dS$ , coassiali con la retta congiungente la massa  $m_1$  e il centro del guscio, come mostrato in figura 1.

La massa dell'anello sferico è data da

$$dm = \sigma dS = \sigma 2\pi R \sin \theta R d\theta = 2\pi \sigma R^2 \sin \theta d\theta,$$

ed essendo  $\sigma = m/(4\pi R^2)$ , risulta

$$dm = \frac{1}{2} m \sin \theta d\theta.$$

L'energia potenziale di  $m_1$  nel campo gravitazionale prodotto da  $dm$  è dunque:

$$dU = -G \frac{dm m_1}{r_s} = -G \frac{m m_1}{2r_s} \sin \theta d\theta, \quad (2)$$

essendo  $r_s$  la distanza di  $m_1$  dall'anello. Dalla figura si trae:

$$r_s^2 = r^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta,$$

che differenziata dà

$$2r_s dr_s = 2Rr \sin \theta d\theta, \quad \Rightarrow \quad \sin \theta d\theta = \frac{1}{R} \frac{r_s}{r} dr_s.$$

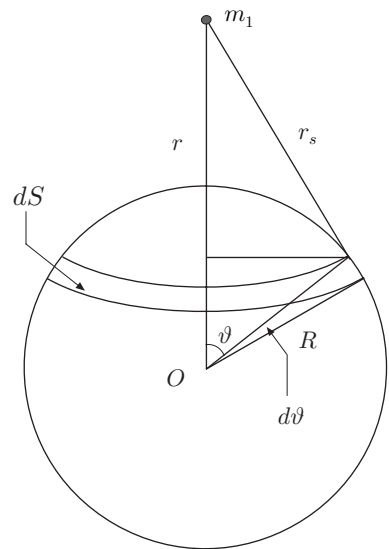


Fig. 10.1

Sostituendo nella (2), si ha

$$dU = -G \frac{mm_1}{2Rr} dr_S. \quad (3)$$

L'energia potenziale di  $m_1$  nel campo prodotto da tutto il guscio è

$$U(r) = -G \frac{mm_1}{2Rr} \int_{r-R}^{r+R} dr_S = -G \frac{mm_1}{2Rr} (2R) = -G \frac{mm_1}{r}. \quad (4)$$

Il risultato indica che la massa di un guscio sferico si può ritenere localizzata nel suo centro geometrico.

La forza gravitazionale è data da

$$F = -\frac{dU}{dr} = -G \frac{mm_1}{r^2}.$$

Se la massa  $m_1$  si trova all'interno del guscio, figura 2, la (4) diventa

$$U(r) = -G \frac{mm_1}{2Rr} \int_{R-r}^{R+r} dr_S = -G \frac{mm_1}{2Rr} (2r) = -G \frac{mm_1}{R}. \quad (5)$$

L'energia potenziale di  $m_1$  all'interno del guscio è *costante*; ciò implica che la forza gravitazionale è nulla. Si noti che questo risultato è possibile solo se la forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

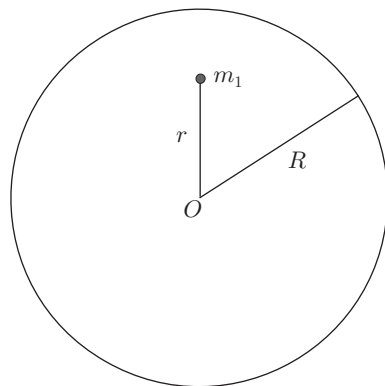


Fig. 10.2

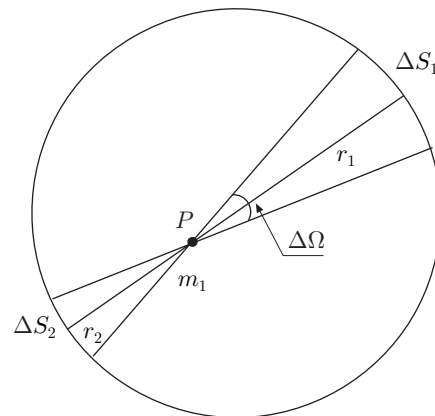


Fig. 10.3

Infatti si consideri all'interno del guscio sferico un qualsiasi punto  $P$ , in cui è posta la massa  $m_1$ ; l'angolo solido  $\Delta\Omega$ , con vertice in  $P$  sottende sulle pareti del guscio le superfici opposte  $\Delta S_1$ ,  $\Delta S_2$ , figura 3. Detta  $\sigma$  la densità areica di massa, le forze gravitazionali dovute alle masse distribuite su  $\Delta S_1$  e  $\Delta S_2$ , che agiscono sulla massa sono

$$F_1 = -G \frac{m_1 \sigma \Delta S_1}{r_1^2}, \quad F_2 = -G \frac{m_1 \sigma \Delta S_2}{r_2^2};$$

ed essendo

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S_1}{r_1^2} = \frac{\Delta S_2}{r_2^2},$$

si conclude che forze opposte agiscono sulla massa, determinandone l'equilibrio. Si colga l'analogia con il caso dell'equilibrio di una carica posta all'interno di una distribuzione uniforme di cariche a simmetria sferica.

In figura 4 è mostrato l'andamento dell'energia potenziale e della forza relative al guscio sferico, in funzione di  $r$ . Il risultato ottenuto si estende immediatamente alla sfera piena, considerando questa come costituita da gusci concentrici e sommando tutti i contributi. Tuttavia l'energia potenziale e la forza all'interno della sfera piena hanno andamenti diversi.

Consideriamo la forza gravitazionale che viene esercitata su una massa  $m_1$ , posta all'interno della sfera piena, a distanza  $r$  dal centro; tale forza è

$$F_r = -G \frac{m_r m_1}{r^2},$$

essendo  $m_r$  la massa della sfera di raggio  $r$ . Supponendo la sfera omogenea, ed essendo la densità data da  $\rho = m/(4\pi R^3/3)$ , la massa di tale sfera risulta  $m_r = \rho V_r = mr^3/R^3$ , pertanto

$$F_r = -G \frac{mm_1}{R^3} r. \quad (6)$$

La forza ha un andamento lineare con  $r$ , figura 5.

Per quanto riguarda l'energia potenziale si ha

$$dU = -Fdr, \quad dU = G \frac{mm_1}{R^3} r dr;$$

integrando si ottiene:

$$U = \frac{1}{2} G \frac{mm_1}{R^3} r^2 + C.$$

La costante di integrazione va determinata in modo che per  $r = R$  la funzione  $U(r)$  sia continua ed assuma il valore  $U(R) = -Gmm_1/R$ , cioè

$$-G \frac{mm_1}{R} = \frac{1}{2} G \frac{mm_1}{R^3} R^2 + C,$$

da cui

$$C = -\frac{3}{2} G \frac{mm_1}{R}.$$

Pertanto, per  $r < R$ , l'energia potenziale è espressa da

$$U(r) = \frac{1}{2} G \frac{mm_1}{R^3} r^2 - \frac{3}{2} G \frac{mm_1}{R}. \quad (7)$$

La figura 6 mostra l'andamento di  $U(r)$  per  $r < R$  e per  $r > R$ .

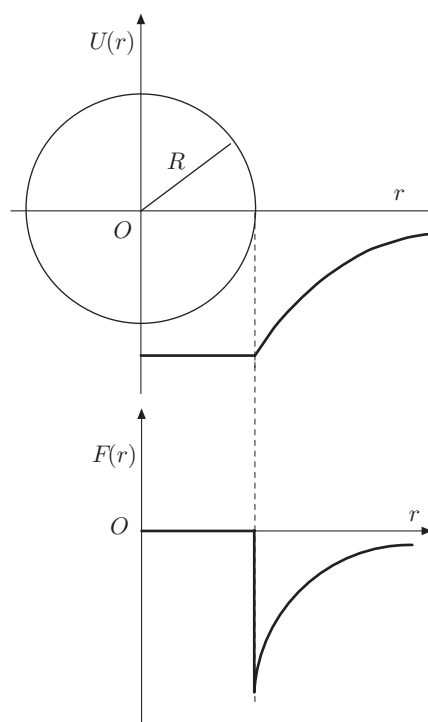


Fig. 10.4

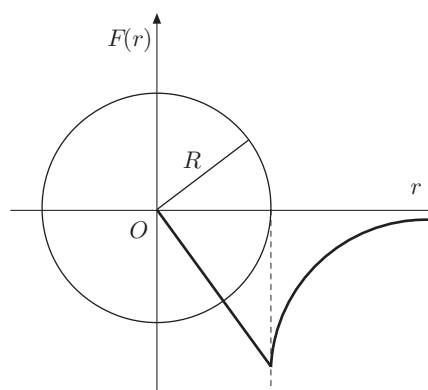


Fig. 10.5

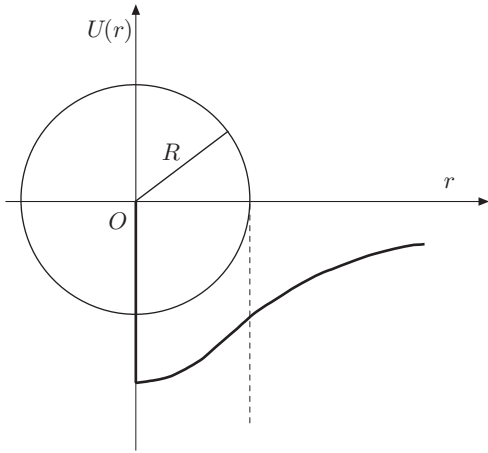


Fig. 10.6

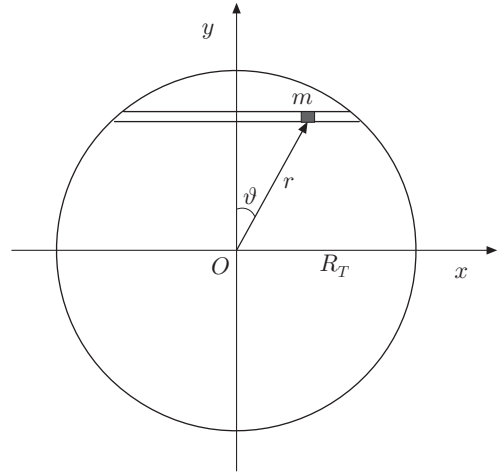


Fig. 10.7

**Esempi** .....

||| 1. Una massa  $m$  è posta in una galleria rettilinea praticata nella terra, dove può muoversi senza attrito, figura 7. Determinarne il moto.

Indicando con  $M_T$  ed  $R_T$  la massa e il raggio della terra, la forza gravitazionale che agisce sulla massa  $m$  alla distanza  $r$ , per la (6), è data da

$$\mathbf{F} = -G \frac{M_T m}{R_T^3} \hat{r}.$$

Assumendo come riferimento l'asse  $x$  orientato, parallelo alla galleria, la componente della forza lungo tale asse è

$$F_x = -G \frac{M_T m}{R_T^3} r \sin \theta,$$

ed essendo  $\sin \theta = x/r$ , si ha

$$F_x = -G \frac{M_T m}{R_T^3} x.$$

Tale componente denota una forza di richiamo proporzionale a  $x$ ; il moto è dunque armonico con  $\omega^2 = GM_T/R_T^3$ , che si scrive anche  $\omega^2 = g/R_T$ . Il periodo è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g}} = 84.4 \text{ min.}$$

Esso è indipendente dalla lunghezza della galleria; il sistema (molto costoso) consentirebbe di viaggiare da un punto all'altro della terra in circa 42 minuti. Il periodo è anche uguale a quello di un satellite orbitante nelle vicinanze della superficie terrestre.

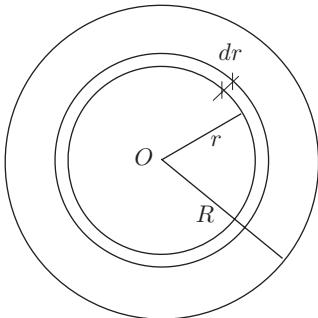


Fig. 10.8

||| 2. *Energia gravitazionale di un corpo sferico.*

L'energia gravitazionale di un corpo si dice anche *energia gravitazionale propria*; essa rappresenta il lavoro necessario per aggregare gli elementi che lo costituiscono, posti inizialmente a distanza infinita, e formare il corpo stesso. Tale energia avrà segno negativo perché la forza gravitazionale è attrattiva.

Supponiamo di voler formare una sfera omogenea di raggio  $R$  e massa  $m$ , iniziando da un nucleo centrale e sovrapponendo a questo gusci sferici di spessore  $dr$ , figura 8. L'energia potenziale gravitazionale di un guscio a distanza  $r$  dal centro è

$$dU = -G \frac{(4\pi r^3 \rho/3) 4\pi r^2 \rho dr}{r} = -\frac{1}{3} G (4\pi \rho)^2 r^4 dr,$$

essendo  $\rho$  la densità. L'energia della sfera risulta

$$\begin{aligned} U &= -\frac{1}{3}G(4\pi\rho)^2 \int_0^R r^4 dr = -\frac{1}{3}G(4\pi\rho)^2 \frac{R^5}{5} \\ &= -\frac{3}{5}G \left( \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \right)^2 \frac{1}{R} = -\frac{3}{5}G \frac{m^2}{R}. \end{aligned}$$

L'energia gravitazionale è enorme; ad esempio, per il Sole,  $m \approx 10^{30} \text{ kg}$ ,  $R = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$ , risulta  $U \approx 4 \cdot 10^{41} \text{ J}$ .

### III 3. Stima dell'energia gravitazionale di una galassia.

In modo analogo all'esempio precedente, definiamo energia gravitazionale della galassia il lavoro necessario affinché questa assuma la configurazione propria, cioè

$$U = -G \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}},$$

dove il fattore  $1/2$  indica che, per due masse, l'energia non va contata due volte. Considerando  $N$  stelle di massa media  $m$  e poste a distanza media  $r$ , si ha

$$U = -\frac{1}{2}G(N-1)N \frac{m^2}{r}.$$

Assumendo  $N \approx 2 \cdot 10^{11}$ ,  $r = 10^{21} \text{ m}$ ,  $m = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ,  $G = 6,6 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ , risulta  $U \approx 5 \cdot 10^{51} \text{ J}$ .

## III 2. Moto di un punto materiale soggetto a forza gravitazionale

Consideriamo la forza gravitazionale che agisce su un corpo puntiforme di massa  $m$ :

$$\mathbf{F} = -k \frac{m}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

La costante  $k$  comprende il prodotto di  $G$  e della massa attraente, che supponiamo *fissa*. La forza è centrale ed essendo il momento angolare  $\mathbf{L} = \mathbf{cost}$ , il moto è piano.

Conviene adottare coordinate polari con polo nel centro della forza; pertanto le componenti dell'accelerazione, equazione (20)-IV, sono

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta},$$

Poichè la forza è radiale, l'accelerazione trasversale è nulla:

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0,$$

che moltiplicata per  $r$  diventa

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0.$$

Questa espressione è la derivata rispetto al tempo di  $r^2\dot{\theta}$ , pertanto

$$r^2\dot{\theta} = h, \tag{8}$$

con  $h$  costante. Ricordando la (22)-IV, si riconosce che la velocità areolare è costante e uguale a  $h/2$ ; *seconda legge di Keplero*.

Consideriamo ora la forza, radiale:

$$-k \frac{m}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2). \quad (9)$$

Ponendo  $r = 1/u$  e derivando rispetto al tempo:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt},$$

dove si è introdotto la variabile ausiliaria  $\theta$ . Essendo, per la (8),  $d\theta/dt = hu^2$ , si ottiene

$$\frac{dr}{dt} = -h \frac{du}{d\theta}.$$

Derivando ancora

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{d\theta} \right) = -h \frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

Sostituendo nella (9), si deduce

$$-ku^2 = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u} h^2 u^4, \quad \Rightarrow \quad k = h^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} + h^2 u;$$

da cui:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{h^2}. \quad (10)$$

La soluzione della (10) è nota, in quanto somma della soluzione dell'equazione omogenea associata,

$$u_1 = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta,$$

e della soluzione

$$u_2 = \frac{k}{h^2};$$

ossia

$$u = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + \frac{h}{h^2}.$$

Ponendo

$$C_1 = A \cos \theta_0, \quad C_2 = A \sin \theta_0,$$

si ottiene

$$u = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{k}{h^2}.$$

Infine

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + (Ah^2/k)[\cos(\theta - \theta_0)]}{h^2/k},$$

da cui:

$$r = \frac{h^2/k}{1 + (Ah^2/k) \cos \theta}, \quad (11)$$

avendo assunto, senza ledere la generalità,  $\theta_0 = 0$ .

La (11) rappresenta l'equazione della traiettoria; essa è una conica espressa in coordinate polari col fuoco nel polo che, come noto dalla geometria, ha equazione generale

$$r = \frac{pe}{1 - e \cos \theta}. \quad (12)$$

Confrontando la (11) con la (12), si deduce:

$$pe = h^2/k, \quad e = -Ah^2/k, \quad p = -1/A,$$

con  $e$  eccentricità e  $p$  distanza della direttrice dal fuoco.

La conica è un'ellisse se  $0 < e < 1$ , una parabola se  $e = 1$ , una iperbole se  $e > 1$ . Si rammenti che l'ellisse, la parabola e l'iperbole sono definite come il luogo dei punti le cui distanze da un punto fisso, fuoco, e da una retta fissa  $d$ , direttrice, hanno rapporto costante che si chiama eccentricità. Il caso dell'ellisse è mostrato in figura 9.

Per verificare se l'orbita è chiusa occorre studiare l'energia totale  $E = T + U$ . Consideriamo il punto dell'orbita in cui si verifica il massimo avvicinamento al fuoco; in tale punto la velocità è solamente trasversale,  $v_\theta = r\dot{\theta}$ , dunque

$$E = T + U = \frac{1}{2}mr_{min}^2\dot{\theta}^2 - k\frac{m}{r_{min}}. \quad (13)$$

Dalla (12), per  $\theta = \pi$ , si ha

$$r_{min} = \frac{pe}{1 + e} = \frac{h^2/k}{1 + e},$$

e poiché, equazione (8),

$$r^2\dot{\theta} = r_{min}^2\dot{\theta} = h,$$

si ha anche

$$\dot{\theta}^2 = \frac{h^2}{r_{min}^4}.$$

Tenuto conto delle precedenti, la (13) diventa

$$E = \frac{1}{2}m\frac{k^2}{h^2}(1 + e)^2 - m\frac{k^2}{h^2}(1 + e) = \frac{mk^2}{2h^2}(e^2 - 1),$$

da cui si trae:

$$e = \left(1 + \frac{2h^2E}{mk^2}\right)^{1/2}.$$

Si deduce che l'orbita è ellittica se  $E < 0$ , eccentricità  $e < 1$ . È verificata la *prima legge di Keplero*.

Per dedurre la terza legge di Keplero, consideriamo un'orbita ellittica, figura 10. L'ellisse gode della proprietà che la somma delle distanze di qualsiasi suo punto  $P$  dai fuochi  $F_1, F_2$  è costante:

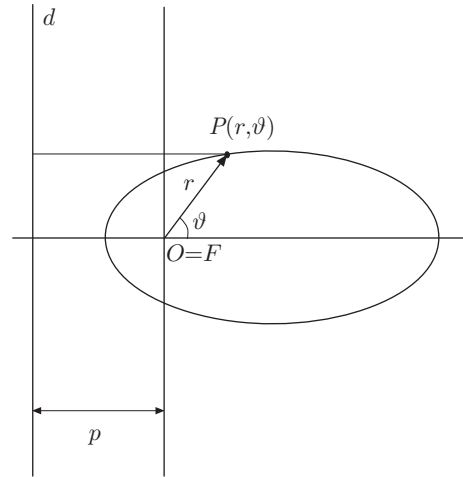


Fig. 10.9

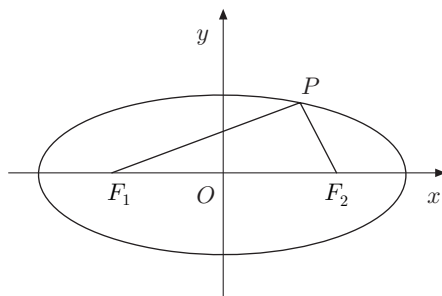


Fig. 10.10

$PF_1 + PF_2 = 2a$ , con  $a$  lunghezza del semiasse maggiore. È anche  $r_{max} + r_{min} = 2a$ , dunque per la (12) si deduce:

$$2a = pe \left( \frac{1}{1-e} + \frac{1}{1+e} \right) = \frac{2pe}{1-e^2}, \quad \Rightarrow \quad a = \frac{pe}{1-e^2}. \quad (14)$$

Poiché il semiasse minore  $b$  è dato da  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ , ed essendo

$$c = \frac{r_{max} - r_{min}}{2} = pe \left( \frac{1}{1-e} - \frac{1}{1+e} \right) = \frac{pe^2}{1-e^2} = ea,$$

dove si è tenuto conto della (14), si ottiene:

$$b = \sqrt{a^2(1-e^2)} = \sqrt{ape} = \sqrt{a \frac{h^2}{k}}.$$

Ricordando che l'area dell'ellisse è  $S = \pi ab$  e tenuto conto della (8), la velocità areolare è data da

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{1}{2}h,$$

con  $T$  periodo. Da questa si ricava

$$T = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi a}{h} \sqrt{a \frac{h^2}{k}},$$

cioè

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} a^3, \quad (15)$$

che esprime la *terza legge di Keplero*.

Si noti che il metodo descritto fornisce direttamente la traiettoria in coordinate polari ma non le equazioni del moto  $r(t)$ ,  $\theta(t)$ .

## || 2.1. Integrale dell'energia

È particolarmente interessante dedurre il moto di un punto materiale, soggetto ad una forza centrale dipendente dall'inverso del quadrato della distanza, dalla conservazione dell'energia meccanica e del momento angolare. Per l'energia totale scriveremo

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r),$$



dove l'energia potenziale  $U(r)$  è del tipo  $km/r$ , positiva o negativa se la forza è repulsiva o attrattiva. In coordinate polari è

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

ed essendo il momento angolare,

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2},$$

la precedente diventa:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}.$$

Dunque l'energia totale si può scrivere

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{mr^2} + U(r). \quad (16)$$

Il termine  $L^2/(mr^2)$ , essendo  $L$  costante, può essere interpretato come una energia potenziale radiale, che sommata all'energia potenziale effettiva dà luogo ad un'energia potenziale efficace

$$U_{eff}(r) = \frac{1}{2} \frac{L^2}{mr^2} + U(r).$$

In figura 11 è mostrato il grafico di questa funzione, nel caso della forza attrattiva; esso è somma di  $U(r)$ , curva (a), e dell'energia potenziale radiale  $L^2/(2mr^2)$ , curva (b). È evidente che se l'energia totale è  $E_1$ , il punto materiale percorre un'orbita chiusa, ellittica, di dimensioni comprese tra  $r_1$  e  $r_2$ ; se l'energia totale corrisponde al minimo di  $U_{eff}(r)$ , l'orbita è circolare di raggio  $r_0$ ; infine se l'energia meccanica è  $E_2$ , l'orbita è aperta; il punto, proveniente dall'infinito, giunge alla distanza  $r_{min}$  di massimo avvicinamento al centro delle forze e quindi si allontana indefinitamente.

Esaminiamo il caso in cui l'energia potenziale è dovuta ad una forza attrattiva; poiché  $L = mh$ , scriviamo la (16) nella forma:

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{mh^2}{r^2} - k \frac{m}{r},$$

da cui

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}E - \frac{h^2}{r^2} + 2\frac{k}{r},$$

Sommando e sottraendo il termine costante  $k^2/h^2$ , scriviamo

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{2}{m}E + \frac{k^2}{h^2}\right) - \left(\frac{h}{r} - \frac{k}{h}\right)^2. \quad (17)$$

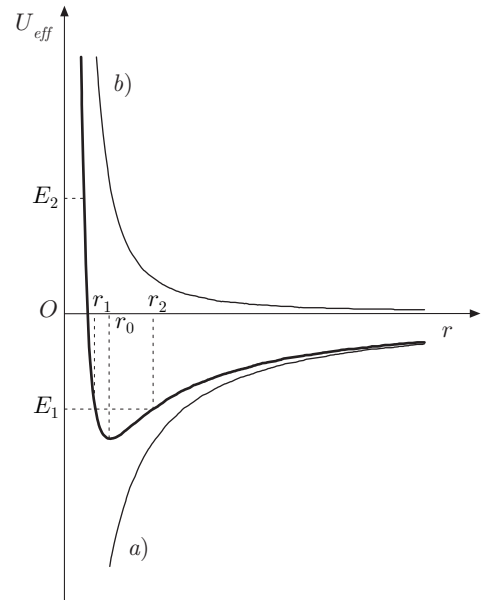


Fig. 10.11

Come al paragrafo 2, introduciamo la variabile  $u = 1/r$  e la variabile  $\theta$ , cosicché  $dr/dt = -hdu/d\theta$ ; pertanto dalla (17) si trae:

$$h \frac{du}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{2}{m}E + \frac{k^2}{h^2}\right) - \left(hu - \frac{k}{h}\right)^2}$$

Poniamo

$$\zeta = \left(hu - \frac{k}{h}\right), \quad \chi^2 = \left(\frac{2}{m}E + \frac{k^2}{h^2}\right);$$

dunque, tenuto conto delle precedenti:

$$h \frac{du}{d\theta} = \sqrt{\chi^2 - \zeta^2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\zeta}{d\theta} = \sqrt{\chi^2 - \zeta^2}.$$

Separando le variabili, si ha

$$d\theta = \frac{d\zeta}{\sqrt{\chi^2 - \zeta^2}},$$

che integrata fornisce:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\zeta}{\chi} + \gamma,$$

dove la costante di integrazione  $\gamma$  è

$$\gamma = \theta_0 - \cos^{-1} \frac{\zeta_0}{\chi}.$$

Ne segue:

$$\frac{h}{r} - \frac{k}{h} = \chi \cos(\theta - \gamma), \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{k}{h^2} + \frac{\chi}{h} \cos(\theta - \gamma).$$

Quindi si ottiene:

$$r = \frac{pe}{1 + e \cos(\theta - \gamma)}.$$

La precedente è l'equazione di una conica in coordinate polari che, fissando la direttrice a sinistra del fuoco, figura 9, viene espressa come la (12), supponendo che  $\gamma = 0$ . Si verifica facilmente che

$$pe = \frac{h^2}{k}, \quad e = \chi \frac{h}{k} = \left(1 + \frac{2h^2 E}{mk^2}\right)^{1/2},$$

conformemente a quanto ottenuto al paragrafo 2.

Riassumendo: nel caso di una forza attrattiva, la traiettoria è una iperbole, una parabola o una ellisse, dipendente dal valore dell'energia totale  $E$ , che naturalmente è fissata dalle condizioni iniziali

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(r_0).$$

Particolare attenzione merita il caso in cui l'eccentricità  $e > 1$ ; l'energia totale è maggiore di zero, la conica è un ramo di iperbole. Occorre però distinguere se l'energia potenziale è attrattiva

o repulsiva. Nel primo caso il centro di attrazione si trova nel fuoco interno; nel secondo caso il centro di repulsione è nel fuoco esterno  $F$ . Ciò si può facilmente verificare ponendo nella (16)  $U(r) = km/r$ , positiva. Si ottiene come equazione della traiettoria:

$$r = \frac{pe}{e \cos \theta - 1}, \quad (18)$$

che rappresenta un ramo di iperbole in cui si è assunto come polo il fuoco esterno  $F$ , figura 12. Gli asintoti si ottengono per  $r = \infty$  e ad essi corrispondono gli angoli  $\pm\theta_\infty$ , per i quali il denominatore della (18) si annulla. Dalla figura si osserva che l'angolo  $\varphi$  formato dagli asintoti è

$$\varphi = \pi - 2\theta_\infty, \quad \Rightarrow \quad \theta_\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}.$$

Questo caso è molto importante in fisica atomica e nucleare.

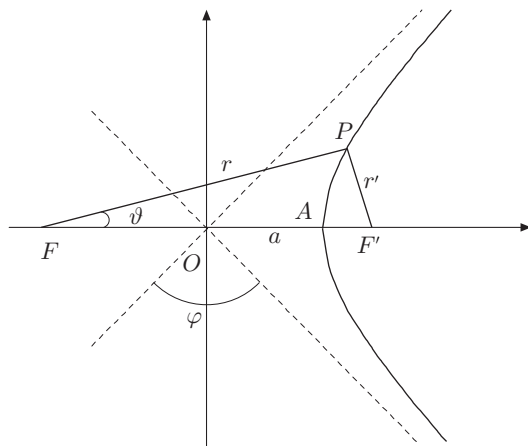


Fig. 10.12

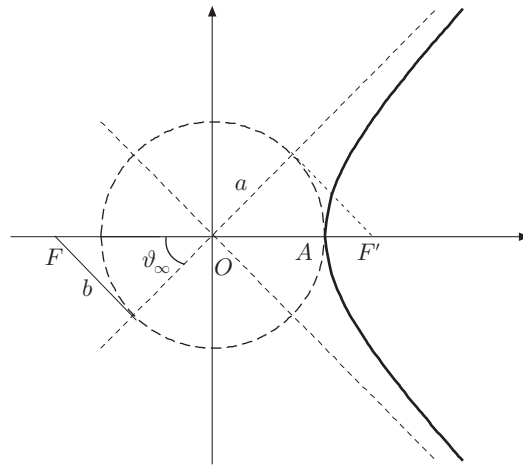


Fig. 10.13

Una particella carica positivamente, proveniente da grande distanza rispetto alle distanze atomiche, passando vicino a un nucleo atomico in  $F$ , viene deflessa di un certo angolo  $\varphi$ , a causa della repulsione coulombiana. Supponendo che la velocità iniziale  $v$  sia parallela ad un asintoto, la traiettoria è il ramo di iperbole descritto. In seguito alla deflessione, la particella procede lungo l'altro asintoto e, a distanze sufficientemente grandi, il modulo della velocità sarà uguale a quello iniziale. L'angolo di deflessione è evidentemente l'angolo formato dagli asintoti. Tale angolo può essere ricavato noto il parametro d'urto  $b$ , che rappresenta la distanza del centro di repulsione dall'asintoto, figura 13. Si ha

$$b = a \tan \theta_\infty = a \frac{\sin(\pi/2 - \varphi/2)}{\cos(\pi/2 - \varphi/2)} = a \cot \varphi/2. \quad (19)$$

Per ricavare  $b$ , si osservi che l'energia totale della particella a grande distanza dal nucleo è tutta cinetica, mentre in un generico

punto della traiettoria è somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale. Tenuto conto che in  $A$ , punto di distanza minima dal nucleo, la velocità ha solo la componente trasversale ( $dr/dt = 0$ ), per la conservazione dell'energia e del momento angolare, possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr_A^2} + k\frac{m}{r_A} = \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r_A^2} + k\frac{m}{r_A},$$

da cui

$$v^2 = \frac{h^2}{r_A^2} + 2\frac{k}{r_A}. \quad (20)$$

Dalla (18), per  $\theta = 0$ , si ha

$$r_A = \frac{pe}{e-1},$$

sostituendo nella (20) e tenuto conto che  $pe = h^2/k$ , si ottiene:

$$v^2 = \frac{k^2}{h^2}(e^2 - 1). \quad (21)$$

Ma l'iperbole è definita come luogo dei punti per i quali è costante la differenza tra le distanze dai fuochi  $r - r' = 2a$ , dove  $a$  è la lunghezza del semiasse maggiore; pertanto, essendo l'equazione dell'iperbole con origine nel fuoco interno  $F'$  espressa da

$$r' = \frac{pe}{1 - e \cos \theta},$$

per  $\theta = \pi$  si deduce

$$r'_A = \frac{pe}{1 + e}.$$

Dunque si ha

$$r_A - r'_A = pe \left( \frac{1}{e-1} - \frac{1}{1+e} \right) = 2\frac{pe}{e^2-1} = 2a,$$

$$a = \frac{pe}{e^2-1} \Rightarrow e^2 - 1 = \frac{pe}{a} = \frac{1}{a} \frac{h^2}{k}.$$

Sostituendo nella (21), si ottiene

$$v^2 = \frac{k}{a}, \quad \Rightarrow \quad a = \frac{k}{v^2}.$$

Infine, ricordando la (19):

$$b = \frac{k}{v^2} \cot \frac{\varphi}{2}.$$

Nota la costante  $k$  di interazione coulombiana e l'energia iniziale della particella, dalla misura dell'angolo di deflessione si ottiene il parametro d'urto, che dà l'ordine di grandezza delle dimensioni del nucleo.

Nel 1910 Geiger e Mursden, su suggerimento di Rutherford, eseguirono una esperienza in cui particelle alfa incidevano su una sottile lamina di oro. Lo studio della distribuzione angolare delle particelle  $\alpha$  deviate dai nuclei di oro, permise loro di dedurre che il nucleo atomico ha dimensioni dell'ordine di grandezza di  $10^{-14} m$ .

### 3. Oscillazioni

Consideriamo un punto materiale di massa  $m$ , soggetto all'azione di una forza elastica  $F = -kx$  e di una forza viscosa  $F = -bv$ . Il problema è unidimensionale e la seconda equazione della dinamica si scrive

$$m\ddot{x} = -kx - bv,$$

oppure

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (22)$$

Questa equazione differenziale del secondo ordine, omogenea e a coefficienti costanti, non può essere risolta separando le variabili, ma va usato un metodo diverso che consiste nell'assumere certe funzioni di prova, che si presume possano soddisfarla. Osserviamo che nella (22) la somma della derivata seconda, della derivata prima e della funzione stessa, moltiplicate per certe costanti è nulla; pertanto la funzione che la soddisfa deve essere tale che le sue derivate successive siano multiple della funzione stessa. Ciò si verifica, ad esempio, per le funzioni esponenziali e trigonometriche. Scegliendo la funzione esponenziale

$$x(t) = e^{\alpha t},$$

le sue derivate sono

$$\dot{x} = \alpha e^{\alpha t}, \quad \ddot{x} = \alpha^2 e^{\alpha t}.$$

Sostituendo nella (22), si ha

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + \frac{b}{m}\alpha e^{\alpha t} + \frac{k}{m}e^{\alpha t} = 0,$$

da cui

$$\alpha^2 + \frac{b}{m}\alpha + \frac{k}{m} = 0. \quad (23)$$

La precedente si chiama equazione algebrica caratteristica della (22) e determina, assegnate le grandezze meccaniche  $m$ ,  $b$  e  $k$ , la struttura della soluzione. Le radici della (23) sono:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}};$$

queste possono essere reali e distinte, coincidenti o complesse

coniugate secondo che il discriminante

$$\Delta = \frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m},$$

sia maggiore, uguale o minore di zero. Ciò intuitivamente significa che, nel primo caso, il termine di smorzamento prevale sul termine oscillatorio; nel secondo i due termini si compensano; nel terzo il termine oscillatorio prevale su quello di smorzamento. Studiamo in dettaglio i tre casi.

### || 3.1. Radici reali e distinte

Posto

$$\frac{b}{2m} = \gamma, \quad \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = \omega,$$

scriviamo

$$\alpha_1 = -\gamma + \omega, \quad \alpha_2 = -\gamma - \omega.$$

La soluzione generale della (22) è data da

$$x(t) = C_1 e^{(-\gamma+\omega)t} + C_2 e^{(-\gamma-\omega)t} = e^{-\gamma t} (C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}). \quad (24)$$

Tale soluzione è una combinazione lineare di due soluzioni particolari; infatti le condizioni iniziali del problema, per  $t = 0$ , sono due: posizione iniziale  $x_0$  e velocità iniziale  $v_0$ , dunque  $C_1$  e  $C_2$  vanno determinate conformemente a queste ultime.

Derivando la (24) si ha

$$\dot{x} = -\gamma e^{-\gamma t} (C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}) + e^{-\gamma t} (\omega C_1 e^{\omega t} - \omega C_2 e^{-\omega t}). \quad (25)$$

Per  $t = 0$ , le (24) e (25) danno

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 + C_2 \\ \dot{x}_0 = v_0 &= -\gamma x_0 + \omega(C_1 - C_2), \end{aligned}$$

che risolte rispetto a  $C_1$  e  $C_2$  forniscono

$$C_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{v_0 + \gamma x_0}{2\omega}, \quad C_2 = \frac{x_0}{2} - \frac{v_0 + \gamma x_0}{2\omega}.$$

Sostituendo questi valori, la (24) diventa

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[ \left( \frac{x_0}{2} + \frac{v_0 + \gamma x_0}{2\omega} \right) e^{\omega t} + \left( \frac{x_0}{2} - \frac{v_0 + \gamma x_0}{2\omega} \right) e^{-\omega t} \right],$$

ovvero

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} \left[ x_0 \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \right] \\ &= e^{-\gamma t} \left[ x_0 \cosh \omega t + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \sinh \omega t \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Le funzioni seno iperbolico e coseno iperbolico sono entrambe crescenti, tuttavia la (26) decresce al crescere del tempo, perché moltiplicata per il termine di smorzamento  $\exp[-\gamma t]$  che decade tanto più rapidamente quanto più elevato è  $b$ .

Il punto materiale, dalla posizione iniziale, tende a tornare asintoticamente nella posizione di equilibrio con un andamento che dipende dal termine di smorzamento. L'oscillatore si dice sovrasmorzato; ciò è giustificato dal fatto che, come si è detto, il termine viscoso prevale su quello oscillatorio,  $b^2/(4m^2) > k/m$ . In figura 14 è mostrato l'andamento di  $x(t)$ , per certi valori delle costanti iniziali.

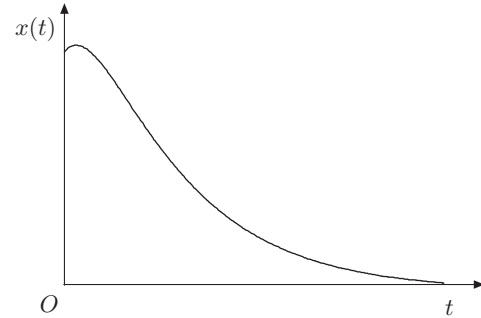


Fig. 10.14

### || 3.2. Radici coincidenti

L'unica radice dell'equazione algebrica è  $\alpha = -\gamma$ . Una soluzione della (22) è

$$x(t) = e^{-\gamma t};$$

tale soluzione, però, non può essere utile perché si deve ricercare una soluzione più generale, in cui siano coinvolte due costanti per il motivo che si è già detto.

Possiamo tentare una soluzione del tipo

$$x(t) = \chi(t)e^{-\gamma t}, \quad (27)$$

dove  $\chi(t)$  è una opportuna funzione del tempo. Questa funzione non può essere arbitraria perché, come visto prima, devono essere coinvolte due costanti da determinare, in accordo con le condizioni iniziali.

Derivando successivamente la (27) si ha

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\dot{\chi} - \gamma\chi)e^{-\gamma t} \\ \ddot{x} &= (\ddot{\chi} - 2\gamma\dot{\chi} + \gamma^2\chi)e^{-\gamma t}; \end{aligned}$$

sostituendo nella (22) che, in questo caso, si scrive

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x = 0,$$

perché  $b^2/(4m^2) = k/m = \gamma^2$ , si ottiene

$$[(\ddot{\chi} - 2\gamma\dot{\chi} + \gamma^2\chi) + 2\gamma(\dot{\chi} - \gamma\chi) + \gamma^2\chi]e^{-\gamma t} = 0.$$

Si deduce

$$\ddot{\chi} = 0;$$

dunque la funzione  $\chi$  deve essere del tipo

$$\chi(t) = C_1 + C_2t.$$

Pertanto

$$x(t) = (C_1 + C_2t)e^{-\gamma t}. \quad (28)$$

Le costanti vanno determinate come prima; derivando la (28) si ha

$$\dot{x} = [-\gamma(C_1 + C_2 t) + C_2]e^{-\gamma t},$$

e per  $t = 0$ , si ottiene

$$x_0 = C_1, \quad C_2 = v_0 + \gamma x_0.$$

Infine, la soluzione cercata è

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t]e^{-\gamma t}. \quad (29)$$

La (29) è il prodotto di due funzioni: una crescente linearmente col tempo e l'altra che decresce esponenzialmente, pertanto il suo andamento sarà decrescente. Il moto non è oscillatorio; il punto materiale ritorna asintoticamente nella posizione di equilibrio più rapidamente che nel caso precedente. È il caso dello smorzamento critico; questa condizione va ricercata in molte situazioni sperimentali, in cui vanno evitate oscillazioni meccaniche o elettromagnetiche. L'andamento della (29) è mostrato in figura 15.

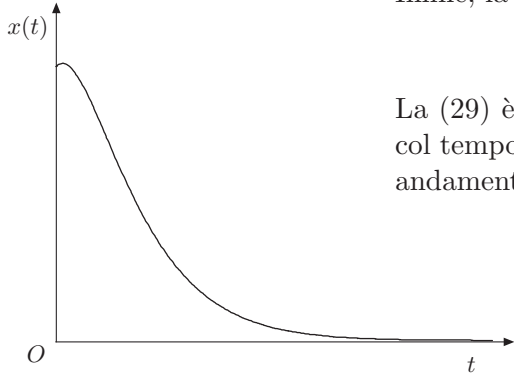


Fig. 10.15

### || 3.3. Radici immaginarie

In questo caso si ha

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm i\omega.$$

Come prima, la soluzione generale è

$$x(t) = C_1 e^{(-\gamma+i\omega)t} + C_2 e^{(-\gamma-i\omega)t} = e^{-\gamma t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}); \quad (30)$$

derivando:

$$\dot{x} = -\gamma e^{-\gamma t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) + e^{-\gamma t} (i\omega C_1 e^{i\omega t} - i\omega C_2 e^{-i\omega t}).$$

Le precedenti, per  $t = 0$ , danno

$$x_0 = C_1 + C_2, \quad v_0 = -\gamma x_0 + i\omega(C_1 - C_2);$$

da cui

$$C_1 = \frac{x_0}{2} - i \frac{v_0 + \gamma x_0}{2\omega}, \quad C_2 = \frac{x_0}{2} + i \frac{v_0 + \gamma x_0}{2\omega}.$$

Infine, sostituendo nella (30):

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left( x_0 \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + \frac{\gamma x_0 + v_0}{\omega} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right),$$

e, tenendo presente le formule di Eulero

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left( x_0 \cos \omega t + \frac{\gamma x_0 + v_0}{\omega} \sin \omega t \right).$$



Introducendo le costanti  $A$  e  $\varphi$  e ponendo:

$$x_0 = A \cos \varphi, \quad \frac{\gamma x_0 + v_0}{\omega} = A \sin \varphi,$$

si ottiene

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t - \varphi). \quad (31)$$

La soluzione trovata rappresenta oscillazioni smorzate di ampiezza

$$Ae^{-\gamma t};$$

tale ampiezza decresce nel tempo tanto più rapidamente quanto più elevato è  $\gamma$ , come mostrato in figura 16. Ad essa si può associare una costante di tempo  $\tau = 1/\gamma = 2m/b$ , che indica la rapidità con cui le oscillazioni si attenuano; infatti dopo un intervallo di tempo  $\tau$  l'ampiezza si riduce di un fattore  $e^{-1} = 1/e \approx 0,37$ . Ovviamente la pulsazione  $\omega$  non è più quella dell'oscillatore libero; ma a questa si riduce nel caso in cui  $\gamma = 0$ , ( $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ).

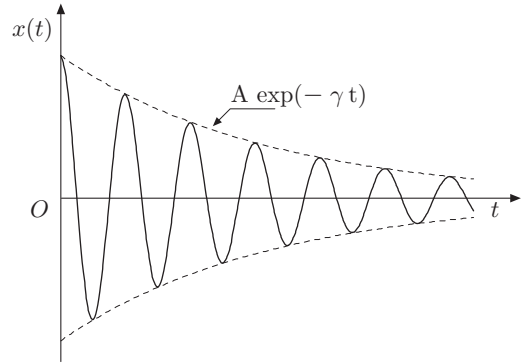


Fig. 10.16

### || 3.4. Dissipazione di energia

L'energia totale dell'oscillatore armonico smorzato diminuisce nel tempo. Per ottenere una valutazione dell'energia dissipata, consideriamo il caso in cui lo smorzamento sia debole,  $\gamma$  piccolo, o meglio, costante di tempo  $\tau$  lunga rispetto al periodo  $T_0$  dell'oscillatore libero. Ciò significa inoltre che la pulsazione è  $\omega \approx \omega_0$ . Derivando la (31),

$$\dot{x} = -\gamma Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t - \varphi) - A\omega e^{-\gamma t} \sin(\omega t - \varphi)$$

e trascurando, per le ipotesi fatte, il primo termine

$$\dot{x} \approx -A\omega e^{-\gamma t} \sin(\omega t - \varphi).$$

Sostituendo quest'ultima e la (31) nell'espressione dell'energia totale dell'oscillatore

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

e tenendo conto che  $\omega \approx \sqrt{k/m}$ , si ottiene:

$$E = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\gamma t} = E_0e^{-2\gamma t},$$

avendo indicato con  $E_0$  l'energia totale dell'oscillatore all'istante  $t = 0$  e con  $A$  l'ampiezza dell'oscillazione allo stesso istante.

La rapidità con cui varia l'energia è

$$\frac{dE}{dt} = -2\gamma E_0e^{-2\gamma t} = -2\gamma E.$$

Poiché lo smorzamento non è molto elevato, la perdita di energia in un periodo  $\Delta E/T$  è piccola, quindi, con buona approssimazione, uguale alla derivata  $dE/dt$ :

$$\frac{\Delta E}{T} \approx \frac{dE}{dt} = -2\gamma E.$$

Pertanto l'energia relativa, dissipata in un periodo risulta:

$$\frac{\Delta E}{E} = -2\gamma T \approx -2\gamma \frac{2\pi}{\omega_0} = -\frac{2\pi}{Q},$$

dove si è introdotta la grandezza

$$Q = \frac{2\pi}{|\Delta E/E|} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{m\omega_0}{b}, \quad (32)$$

chiamata  $Q$  o *fattore di qualità* oppure *fattore di merito* dell'oscillatore. Esso dà la misura del rapporto tra l'energia dell'oscillatore e l'energia dissipata in un periodo. Sistemi che mantengono a lungo le oscillazioni hanno un  $Q$  elevato.

#### OSSERVAZIONE

L'ipotesi che, nello smorzamento debole, si possa assumere  $\omega \approx \omega_0$ , è giustificata dalle seguenti considerazioni quantitative. Supponendo che in un oscillatore smorzato l'energia dissipata in un periodo sia un decimo dell'energia totale

$$\left| \frac{\Delta E}{E} \right| = 2\gamma \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{10},$$

che corrisponde ad uno smorzamento non debole, determinare la variazione percentuale della pulsazione rispetto a quella dell'oscillatore libero.

Scriviamo la pulsazione come

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}.$$

Essendo

$$\frac{\gamma}{\omega} \approx \frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{1}{10} \frac{1}{4\pi},$$

risulta:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{15775}}.$$

Poiché per  $x$  piccolo  $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$ , si ha

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{31550}\right), \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{1}{31550} = -0,003\%.$$

Si riconosce che la variazione è piuttosto piccola; pertanto, in alcuni casi, anche per smorzamenti piuttosto forti non si commette un errore sensibile se si assume  $\omega = \omega_0$ .

### 4. Oscillazioni forzate

Quando sull'oscillatore, studiato nel paragrafo precedente, agisce una forza esterna di tipo sinusoidale  $F \cos \omega t$ , la seconda equazione della dinamica si scrive

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \cos \omega t. \quad (33)$$

La soluzione di questa equazione differenziale del secondo ordine, non omogenea, come insegna l'Analisi, è data dalla somma della soluzione dell'omogenea associata, che si è già ricavata, e di una soluzione particolare da ricercare. Fisicamente ci si attende che, una volta esaurito il transitorio smorzato, l'oscillatore esegua le oscillazioni della forza impressa, però con ampiezza e fase diverse. Ne segue che per determinare tali grandezze, basta assumere come soluzione:

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \quad (34)$$

dove  $C_1$  e  $C_2$  sono costanti da stabilire.

Derivando successivamente rispetto al tempo la (34), si ha

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t \\ \ddot{x} &= -C_1 \omega^2 \sin \omega t - C_2 \omega^2 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (33):

$$\begin{aligned} m(-C_1 \omega^2 \sin \omega t - C_2 \omega^2 \cos \omega t) + b(C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t) \\ + k(C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) - F \cos \omega t = 0. \end{aligned}$$

Raccogliendo i termini  $\sin \omega t$  e  $\cos \omega t$  si ottiene:

$$\begin{aligned} (-mC_1 \omega^2 - bC_2 \omega + kC_1) \sin \omega t &= 0 \\ (-mC_2 \omega^2 + bC_1 \omega + kC_2 - F) \cos \omega t &= 0, \end{aligned}$$

e poiché  $\sin \omega t$  e  $\cos \omega t$  non sono mai contemporaneamente nulli, si deve avere:

$$\begin{aligned} (k - m\omega^2)C_1 - b\omega C_2 &= 0 \\ (k - m\omega^2)C_2 + b\omega C_1 &= F. \end{aligned}$$

Risolviendo il sistema, si ricava

$$C_1 = \frac{Fb\omega}{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}, \quad C_2 = \frac{(k - m\omega^2)F}{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}.$$

Pertanto la (34) si scrive:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \left[ \frac{b\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \sin \omega t \right. \\ &\quad \left. + \frac{k - m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \cos \omega t \right]. \end{aligned}$$

Ponendo:

$$\sin \varphi = \frac{b\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{k - m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}; \quad (35)$$

posizione legittima, poiché si verifica subito che  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ , e ricordando che la pulsazione dell'oscillatore libero è data da  $\omega_0^2 = k/m$ , si ha

$$x(t) = \frac{F}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi) = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (36)$$

dove l'ampiezza di oscillazione è

$$A = \frac{F}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \quad (37)$$

La soluzione generale della (33) è dunque combinazione lineare di una oscillazione smorzata e della (36):

$$x(t) = A'e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \varphi') + A \cos(\omega t - \varphi).$$

Il primo termine si attenua più o meno rapidamente, cosicché la soluzione a regime o stazionaria, è data dal secondo termine. In figura 17 è mostrato l'andamento della forza impressa (a), dell'oscillazione smorzata (b) e dell'oscillazione risultante (c).

Dalle (35) si ottiene

$$\tan \varphi = \frac{b\omega}{k - m\omega^2} = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (38)$$

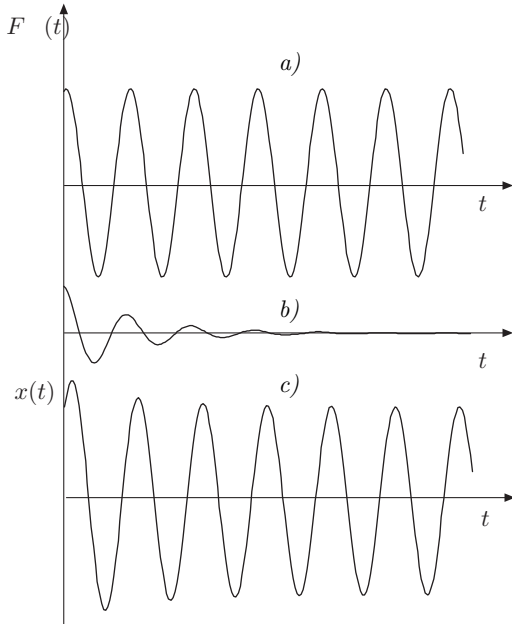


Fig. 10.17

La fase, come indica la (36), è sempre negativa; ciò significa che l'oscillatore segue in ritardo la sollecitazione impressa. È importante osservare che ampiezza di oscillazione e fase dipendono dalla pulsazione  $\omega$  della forza impressa e dal fattore di smorzamento  $b$ .

L'ampiezza può essere opportunamente espressa evidenziando il fattore di merito  $Q$ , equazione (32),

$$\begin{aligned} A &= \frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2/m^2}} \\ &= \frac{F}{m\omega_0^2\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + b^2\omega^2/m^2\omega_0^4}} \\ &= \frac{F}{m\omega_0^2\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + (\omega/\omega_0 Q)^2}}, \end{aligned}$$

analogamente la fase:

$$\tan \varphi = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2}.$$

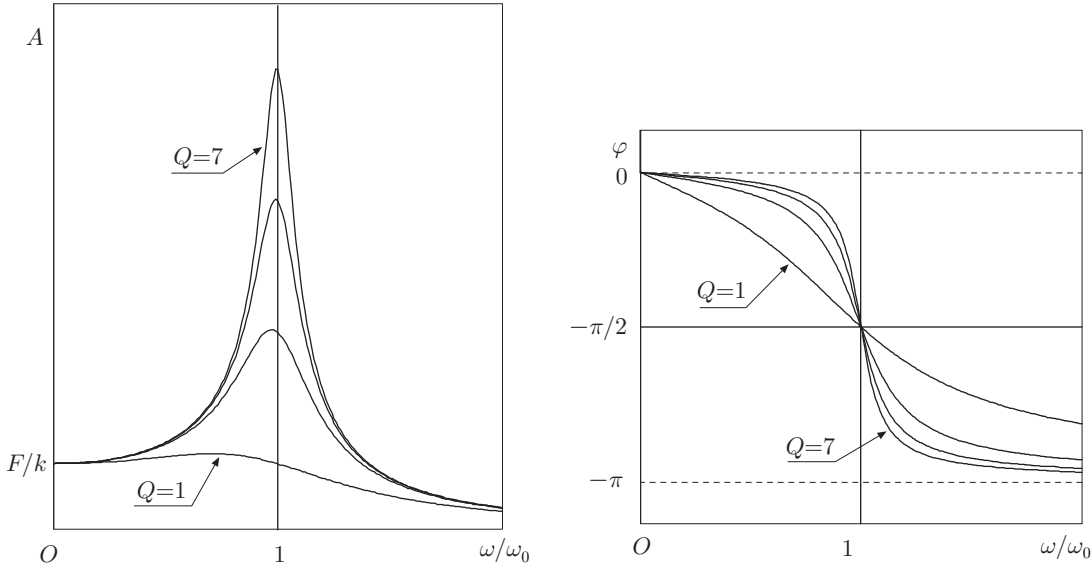


Fig. 10.18

In figura 18 è riportato qualitativamente l'andamento di  $A$  e di  $\varphi$  in funzione di  $\omega/\omega_0$ , per differenti valori di  $Q = \omega_0/2\gamma$ . L'ampiezza, per  $\omega = 0$ , risulta sempre  $F/k$ ; assume il valore massimo per  $\omega$  che rende minimo il denominatore della (37), ossia per

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

Ciò significa che il massimo dell'ampiezza, per valori elevati dello smorzamento o valori piccoli di  $Q$ , si trova a sinistra di  $\omega/\omega_0 = 1$ , mentre per  $b \rightarrow 0$ , o valori elevati di  $Q$ , corrisponde sensibilmente a  $\omega = \omega_0$ . L'ampiezza infine tende a zero al crescere di  $\omega$ . In coincidenza col massimo dell'ampiezza si verifica il fenomeno della *risonanza*.

La fase varia da 0 a  $-\pi/2$ , per  $\omega$  che va da 0 a  $\omega_0$ ; da  $-\pi/2$  a  $-\pi$ , per  $\omega$  che va da  $\omega_0$  a  $\infty$ .

In condizioni di regime l'oscillatore ha una energia totale  $E$ , somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale. L'energia cinetica è

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{F^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2} \sin^2(\omega t - \varphi) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - \varphi). \end{aligned} \quad (39)$$

Essa raggiunge il suo valore massimo nell'istante in cui l'oscillatore transita per la sua posizione di equilibrio. Il valore medio di tale energia, come il valore medio dell'energia potenziale, per la (25)-VIII, è  $E/2$ .

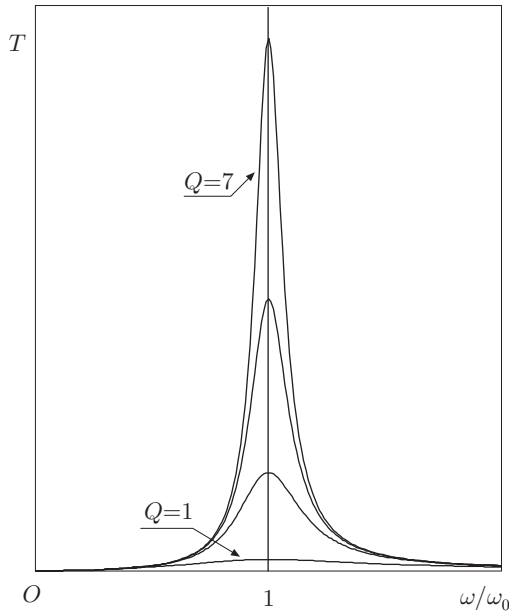


Fig. 10.19

È notevole dedurre dalla precedente, che la risonanza per l'energia si ha, in ogni caso, per  $\omega = \omega_0$ , figura 19, cioè

$$T_{max} = \frac{1}{2}m \frac{F^2}{b^2} = \frac{1}{2}m \frac{F^2}{4m^2\gamma^2} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{m\omega_0^2} Q^2. \quad (40)$$

La risonanza è tanto più alta quanto più elevato è  $Q$ .

Si osservi che i problemi oscillatori esaminati, sono perfettamente equivalenti a quelli relativi a circuiti elettrici contenenti in serie, induttanza  $L$ , corrispondente alla massa  $m$ , capacità  $C$ , corrispondente a  $1/k$ , e resistenza  $R$ , corrispondente a  $b$ . Nell'oscillatore forzato la forza periodica corrisponde ad una tensione elettrica  $V = V_0 \cos \omega t$ .

I sistemi meccanici devono avere un valore di  $Q$  piuttosto basso, di solito inferiore a 100. Infatti una struttura meccanica, soggetta a sollecitazione periodica, come raffiche di vento, vibrazioni esterne,

moto ondoso, può assumere una ampiezza di oscillazione molto elevata, se la frequenza della sollecitazione esterna coincide con la frequenza propria del sistema. In tal caso possono verificarsi effetti disastrosi, come quello del ponte sospeso di Tacoma Narrows a Ponget Sound, Washington, crollato nel 1940 perché investito da raffiche di vento che eccitarono la frequenza propria della struttura. Viceversa oscillatori elettrici di buona qualità possono avere  $Q$  dell'ordine di  $10^5$ .

### Esempi

#### III 4. Larghezza di banda della curva di risonanza.

La buona qualità di un sistema elettrico oscillante, richiede una risposta elevata in ampiezza solo in un intervallo di frequenze piuttosto ristretto, centrato intorno ad  $\omega_0$ . Un criterio per fissare tale intervallo,  $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$ , può essere quello di determinare la larghezza della curva di risonanza per cui l'energia si riduce a metà del valore che ha in  $\omega_0$ .

Ricordando la (39), scriviamo l'energia cinetica massima:

$$T_{max} = \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{F^2}{m^2 [(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)]^2 + 4m^2\gamma^2\omega^2};$$

Supponendo che  $\omega_1$  e  $\omega_2$  non differiscano molto da  $\omega_0$ , si può assumere  $\omega_0 + \omega \approx 2\omega_0$  e  $\omega \approx \omega_0$ ; perciò l'equazione precedente diventa:

$$T_{max} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 \frac{F^2}{4m^2\omega_0^2 [(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2]} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{4m\gamma^2 [(\omega_0 - \omega)^2/\gamma^2 + 1]}.$$

Per  $\omega - \omega_0 = \pm\gamma$ , questa espressione diventa la metà di quella che si ottiene alla risonanza, equazione (40).

La differenza tra le due frequenze  $\omega_2 = \omega_0 + \gamma$  e  $\omega_1 = \omega_0 - \gamma$ , è uguale a

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = 2\gamma;$$

La larghezza relativa della curva risulta

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\gamma}{\omega_0} = \frac{1}{Q}.$$

Questo risultato dimostra che la risonanza dell'energia è tanto più stretta e tanto più alta è la sua ampiezza, quanto più elevato è il fattore di merito dell'oscillatore.

### ||| 5. Energia dissipata.

L'energia dissipata dall'oscillatore forzato è data dal lavoro della forza esterna  $F \cos \omega t$ . In un periodo è

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^T F \cos \omega t dx \\ &= - \int_0^T F \cos \omega t \frac{F\omega}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) dt, \end{aligned}$$

che per la prima delle (35), si scrive:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= - \frac{F^2 \sin \varphi}{b} \int_0^T \cos \omega t \sin(\omega t - \varphi) dt \\ &= - \frac{F^2 \sin \varphi}{b} \left[ \int_0^T \cos \varphi \sin \omega t \cos \omega t dt - \int_0^T \sin \varphi \cos^2 \omega t dt \right]. \end{aligned}$$

Il primo integrale è nullo; il secondo risulta

$$\frac{F^2 \sin^2 \varphi}{b} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{F^2 \sin^2 \varphi}{b\omega} \pi > 0.$$

La potenza dissipata in un periodo è

$$W = \frac{F^2 \sin^2 \varphi}{b\omega T} \pi = \frac{F^2 \sin^2 \varphi}{2b}.$$

Entrambe le grandezze dipendono dallo sfasamento e da  $b$ . A parità di smorzamento sono massime per  $\varphi = -\pi/2$  che corrisponde alla risonanza per l'energia.

.....

### ||| 5. Oscillatori accoppiati

È importante sottolineare che il problema delle oscillazioni finora studiato è governato da equazioni differenziali lineari, in cui viene escluso che la forza di richiamo dipenda da potenze di  $x$  superiori alla prima, cioè  $x^2$ ,  $x^3$ , ..., o da funzioni più complicate; in tale circostanza l'equazione differenziale è detta non lineare. È facile convincersi che questi casi sono frequenti: basta pensare al pendolo, in cui la forza di richiamo dipende da  $\sin \theta$ . Per angoli piccoli,  $\sin \theta \approx \theta$ , l'oscillazione è armonica; per angoli che non soddisfano questa approssimazione il problema non è semplice e ne daremo la soluzione nel prossimo paragrafo.

Un altro esempio è il sistema massa-molle che esegue oscillazioni trasversali, cioè ortogonali all'asse delle molle. In figura 20 è schematizzata una massa, collegata a due molle identiche tese, di costanti elastiche  $k$  uguali, che può oscillare lungo l'asse delle

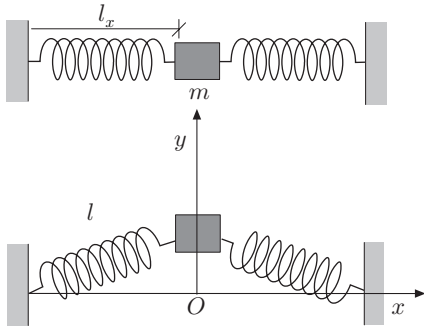


Fig. 10.20

molle, asse  $x$ , e in direzione ortogonale ad esso, asse  $y$ . L'oscillazione lungo l'asse è armonica e avviene con pulsazione  $\omega = \sqrt{2k/m}$ , esempio 6-VII.

Per studiare l'oscillazione lungo  $y$ , chiamiamo  $l_0$  la lunghezza propria delle molle,  $l_x$  la lunghezza delle molle tese e  $T = k(l_x - l_0)$  la tensione alla quale ciascuna è soggetta quando sono allineate. Spostando la massa in una posizione  $y$  e detta  $l$  la lunghezza che assume ciascuna molla in questa posizione, la tensione risulta  $T = k(l - l_0)$ , perciò la forza alla quale è soggetta la massa è

$$F = -2T \sin \theta = -2T \frac{y}{l} = -2k \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) y,$$

dove  $l$  è ovviamente funzione di  $y$ . Poiché

$$l^2 = l_x^2 + y^2 = l_x^2 \left(1 + \frac{y^2}{l_x^2}\right),$$

si può scrivere

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_x} \left(1 + \frac{y^2}{l_x^2}\right)^{-1/2}.$$

Sviluppando in serie di potenze la quantità in parentesi, si ha

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_x} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y^2}{l_x^2} + \dots\right),$$

dunque la forza diventa:

$$F = -\frac{2k}{l_x} (l_x - l_0) y - k l_0 \left(\frac{y}{l_x}\right)^3 + \dots$$

Se lo spostamento  $y$  è piccolo rispetto ad  $l_x$ , oscillazioni di piccola ampiezza, è lecito trascurare le potenze di  $y$  superiori alla prima. Le oscillazioni si possono ritenere armoniche.

Nel seguito si prenderanno in considerazione problemi che rientrano nell'ambito dell'approssimazione armonica. C'è da osservare che nei sistemi masse-molle ideali, interviene la lunghezza propria  $l_0$  della molla. Tale lunghezza può essere ritenuta trascurabile, rispetto agli allungamenti elastici, solo nel caso di certe molle, *slinky*, che hanno lunghezza propria di alcuni centimetri e si possono tendere fino a qualche metro, rimanendo nell'ambito degli allungamenti lineari. In queste condizioni, come si deduce dall'ultima relazione, le oscillazioni risultano armoniche.

Consideriamo ora il sistema costituito da due particelle  $a$  e  $b$  di uguale massa.  $a$  è sospesa ad un punto fisso  $O$  per mezzo di un filo inestensibile e di massa trascurabile, di lunghezza  $l$ ;  $b$  è sospesa ad  $a$  per mezzo di un filo identico. All'equilibrio il sistema si trova lungo la verticale passante per  $O$ ; una volta spostato da



questa posizione e abbandonato a se stesso, inizia ad oscillare in un piano verticale in modo più o meno complesso. Per studiare il moto, fissiamo un riferimento con origine  $O$ , asse  $x$  orizzontale e asse  $y$  volto verso il basso, figura 21. Se  $\mathbf{T}_a$  e  $\mathbf{T}_b$  sono le tensioni nel filo superiore ed inferiore e  $(x_a, y_a)$ ,  $(x_b, y_b)$  le coordinate delle particelle, le componenti delle forze agenti sono:

$$\begin{aligned} F_{a,x} &= T_b \sin \varphi - T_a \sin \theta & F_{b,x} &= -T_b \sin \varphi \\ F_{a,y} &= mg + T_b \cos \varphi - T_a \cos \theta & F_{b,y} &= mg - T_b \cos \varphi, \end{aligned}$$

dove

$$\sin \theta = \frac{x_a}{l}, \quad \sin \varphi = \frac{x_b - x_a}{l}.$$

Supponiamo che gli angoli siano piccoli e tali che  $\cos \theta$  e  $\cos \varphi$  siano circa uguali ad uno; sostanzialmente risulta anche  $T_b \approx mg$  e  $T_a \approx T_b + mg = 2mg$ . Le equazioni della dinamica di  $a$  e  $b$  sono:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_a &= mg \frac{x_b - x_a}{l} - 2mg \frac{x_a}{l} = \frac{mg}{l} (x_b - 3x_a) \\ m\ddot{x}_b &= -\frac{mg}{l} (x_b - x_a). \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} \ddot{x}_a + 3\frac{g}{l}x_a - \frac{g}{l}x_b &= 0 \\ \ddot{x}_b + \frac{g}{l}x_b - \frac{g}{l}x_a &= 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Le equazioni ottenute si dicono *accoppiate* nel senso che ognuna di esse contiene le coordinate di entrambe le particelle. Esse non possono essere risolte con i metodi esposti finora; tuttavia poiché le equazioni sono lineari e si presuppongono soluzioni di tipo armonico, è possibile costruire soluzioni generali mediante combinazioni lineari di soluzioni particolari, tali che il rapporto  $x_b/x_a$  resti costante durante il moto. Assegnate certe condizioni iniziali, tali soluzioni devono essere del tipo

$$x_a = A_1 \cos(\omega t + \varphi), \quad x_b = A_2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Sostituendo le precedenti e le loro derivate seconde nelle (41), si ottiene:

$$\begin{aligned} (3\omega_0^2 - \omega^2)A_1 - \omega_0^2 A_2 &= 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)A_2 - \omega_0^2 A_1 &= 0, \end{aligned} \quad (42)$$

dove  $\omega_0^2 = g/l$ .

Eliminando  $A_1$  e  $A_2$ , si ottiene

$$(3\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^4 = 0, \quad \Rightarrow \quad \omega^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + 2\omega_0^4 = 0,$$

che ha come radici:

$$\omega^2 = \omega_0^2 (2 \pm \sqrt{2}).$$

Entrambe le radici sono positive, quindi danno valori reali di  $\omega^2$ :

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 (2 + \sqrt{2}), \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 (2 - \sqrt{2}).$$

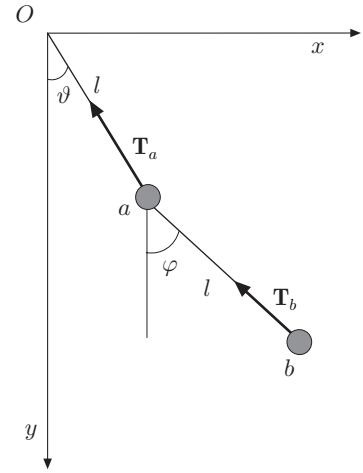


Fig. 10.21

Ricavando dalle (42) il rapporto  $A_2/A_1$ :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{3\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2},$$

per ognuna delle radici si ottiene:

$$\frac{A_2}{A_1} = 1 - \sqrt{2}, \quad \frac{A_2}{A_1} = 1 + \sqrt{2}.$$

Si deducono due possibili coppie di soluzioni:

$$\begin{aligned} x_{1a} &= C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_{2a} &= C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_{1b} &= C_1 (1 - \sqrt{2}) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_{2b} &= C_2 (1 + \sqrt{2}) \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned}$$

dove sono coinvolte quattro costanti arbitrarie  $C_1, C_2, \varphi_1, \varphi_2$ , dipendenti dalle condizioni iniziali.

Si verifica facilmente che, per la linearità delle equazioni, principio di sovrapposizione, le soluzioni:

$$\begin{aligned} \xi_a &= C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \xi_b &= C_1 (1 - \sqrt{2}) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 (1 + \sqrt{2}) \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \tag{43}$$

soddisfano le (41). Le (43) contengono il numero richiesto di costanti, determinabili una volta assegnate posizioni e velocità iniziali, quindi rappresentano la soluzione generale del problema.

Se le condizioni iniziali sono tali che la costante  $C_2$  risulti nulla,  $x_a$  e  $x_b$  hanno andamento armonico di uguale frequenza; inoltre il rapporto  $x_b/x_a$  è costante, ossia la configurazione del sistema rimane costante durante il moto. Allora si dice che il sistema si trova in uno dei *modi normali di vibrazione*. Analogo comportamento si ha per  $C_1 = 0$ . In figura 22 sono schematizzati i due modi. Si sottolinea il fatto che tali modi vengono determinati da particolari condizioni iniziali; loro caratteristica è che il rapporto tra le ampiezze rimane costante durante il movimento. Il sistema considerato, che ha due gradi di libertà, presenta dunque due modi normali con due frequenze normali. Il moto più generale è combinazione lineare dei due modi ed è espresso dalle (43). Si può dimostrare, in generale, che un sistema oscillante con  $n$  gradi di libertà presenta  $n$  modi normali di vibrazione.

**Complementi ed esempi** .....

III 6. *Sistema masse-molle.*

Consideriamo il sistema costituito da due masse  $a$  e  $b$  uguali collegato con tre molle identiche di costante elastica  $k$ , libero di oscillare su un piano privo di attrito.

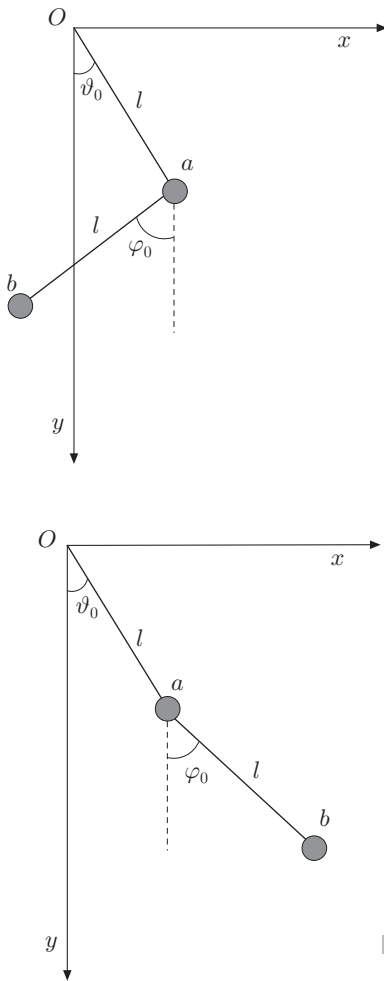


Fig. 10.22

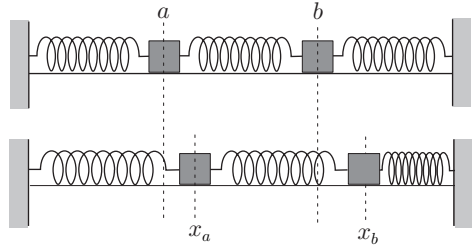


Fig. 10.23

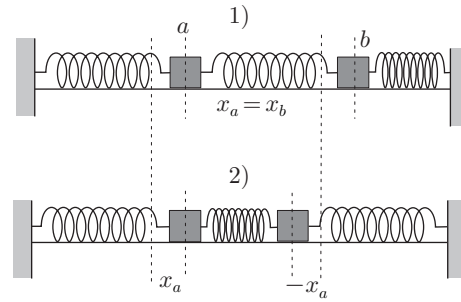


Fig. 10.24

Il sistema ha due gradi di libertà, dunque devono esistere due modi normali di vibrazione. Supponiamo di perturbare il sistema dall'equilibrio e siano  $x_a$  e  $x_b$  gli spostamenti di  $a$  e  $b$ , rispetto alla posizione di riposo, entrambi verso destra, figura 23. Le forze che agiscono su  $a$  sono  $-kx_a$  e  $k(x_b - x_a)$ ; le forze che agiscono su  $b$  sono  $-kx_b$  e  $-k(x_b - x_a)$ . Le equazioni della dinamica delle due masse si scrivono:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_a &= -kx_a + k(x_b - x_a) \\ m\ddot{x}_b &= -kx_b - k(x_b - x_a). \end{aligned}$$

Sommando e sottraendo le precedenti, si ottengono le equazioni non accoppiate del moto:

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_a + \ddot{x}_b) &= -k(x_a + x_b) \\ m(\ddot{x}_a - \ddot{x}_b) &= -3k(x_a - x_b), \end{aligned} \tag{44}$$

nelle variabili  $(x_a + x_b)$  e  $(x_a - x_b)$ . Le (44) hanno le soluzioni

$$\begin{aligned} x_a + x_b &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_a - x_b &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned}$$

con  $\omega_1^2 = k/m$  e  $\omega_2^2 = 3k/m$ . Esse rappresentano i modi normali.

Si osserva subito che la prima soluzione descrive il moto del centro di massa del sistema, la cui posizione è proprio  $(x_a + x_b)/2$ ; la seconda lo spostamento relativo delle masse. I due modi sono mostrati in figura 24; nel primo la molla centrale non risulta deformata, nel secondo viene compressa.

Il moto più generale, come s'è detto, si ottiene dalla combinazione lineare dei due modi; sommando e sottraendo le precedenti si ha

$$\begin{aligned} \xi_a = 2x_a &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \xi_b = 2x_b &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \tag{45}$$

Il primo modo normale si ottiene per  $A_2 = 0$ , in cui  $\xi_a = \xi_b$ ; il secondo, per  $A_1 = 0$ , in cui  $\xi_b = -\xi_a$ .

### 7. Pendoli accoppiati.

Prendiamo in esame il sistema costituito da due pendoli  $a$  e  $b$  identici accoppiati per mezzo di una molla di costante elastica  $k$ , figura 25. Per le considerazioni precedenti, è semplice prevedere quali siano i due modi normali delle piccole oscillazioni.

Nel primo modo si deve avere  $x_a = x_b$ ; la molla di accoppiamento potrebbe essere eliminata poiché le ampiezze si mantengono sempre uguali. La forza di richiamo è dovuta alla gravità e la pulsazione del modo è  $\omega_1 = \sqrt{g/l}$ . Nel secondo modo è  $x_a = -x_b$ . Si ha una forza di richiamo della molla  $-2kx_a$ , il fattore 2 dipende dal fatto che la molla è compressa di  $2x_a$ , e una forza di richiamo dovuta alla gravità  $-mg \sin \theta \approx -mg \theta = -mgx_a/l$ , quindi la pulsazione risulta  $\omega_2 = \sqrt{g/l + 2k/m}$ .

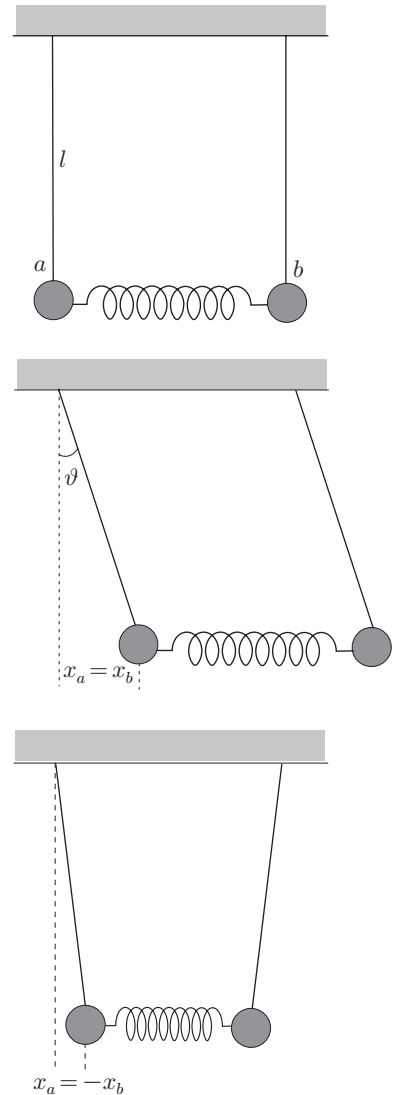


Fig. 10.25

In virtù delle (45), il moto generico del sistema risulta dalla sovrapposizione dei due modi normali. Se le frequenze dei modi sono vicine si osserva il fenomeno dei battimenti, paragrafo 2.2-IV, particolarmente evidente nel caso in cui le ampiezze dei modi sono uguali. Altrettanto si può affermare per il sistema masse-molle, descritto più sopra; tuttavia i pendoli accoppiati si prestano meglio a visualizzare questo fenomeno perché è più semplice rendere la frequenza del battimento,  $\nu_1 - \nu_2$ , piccola rispetto alla frequenza media,  $(\nu_1 + \nu_2)/2$ , scegliendo una molla di costante elastica tale che  $2k/m \ll g/l$ .

Esaminiamo in quali condizioni si possono osservare i battimenti; le equazioni generali del moto di  $a$  e  $b$  si possono esprimere mediante la combinazione dei modi normali:

$$\begin{aligned}\xi_a &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \xi_b &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).\end{aligned}$$

Assumendo  $A_1 = A_2 = A$  e  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ; le precedenti diventano

$$\begin{aligned}\xi_a &= A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t \\ \xi_b &= A \cos \omega_1 t - A \cos \omega_2 t.\end{aligned}\tag{46}$$

Derivando, si hanno le velocità di oscillazione:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_a &= -\omega_1 A \sin \omega_1 t - \omega_2 A \sin \omega_2 t \\ \dot{\xi}_b &= -\omega_1 A \sin \omega_1 t + \omega_2 A \sin \omega_2 t.\end{aligned}$$

Per  $t = 0$ , si trovano le seguenti condizioni iniziali:

$$\xi_a(0) = 2A, \quad \xi_b(0) = 0, \quad \dot{\xi}_a(0) = 0, \quad \dot{\xi}_b(0) = 0.$$

Si tenga la massa  $a$  nella posizione  $2A$ , la massa  $b$  nella posizione di equilibrio e si liberino entrambe con velocità iniziale nulla. Si osserva che l'ampiezza di oscillazione di  $a$  decresce e  $b$  inizia ad oscillare; in seguito  $a$  si ferma e  $b$  oscilla con l'ampiezza iniziale di  $a$ . L'oscillazione si è completamente trasferita a  $b$ ; il processo continua e l'oscillazione fluisce lentamente da  $a$  verso  $b$  e viceversa.

Per comprendere il fenomeno, basta ricordare le considerazioni del paragrafo 2.2-IV, a proposito dei battimenti. Usando le formule di prostaferesi, le (46) si possono scrivere:

$$\begin{aligned}\xi_a &= 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \\ \xi_b &= -2A \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t,\end{aligned}$$

che rappresentano oscillazioni in cui l'ampiezza è modulata al 100%. Esse si interpretano, paragrafo 2.3-IV, come oscillazioni in cui l'ampiezza, espressa da

$$A' = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t, \quad B' = 2A \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t,$$

è modulata alla frequenza  $(\nu_1 - \nu_2)/2$ . I corrispondenti battimenti, proporzionali ad  $A'^2$  e  $B'^2$ , hanno frequenza  $\nu_1 - \nu_2$  e periodo uguale al tempo impiegato perché l'energia si trasferisca da un pendolo all'altro e viceversa.

#### ENERGIA

Supponiamo che la molla di accoppiamento abbia costante elastica piccola, cosicché l'energia trasferita nella molla sia trascurabile. Posto  $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$  e  $\omega_m = (\omega_1 - \omega_2)/2$ , l'energia totale di ciascun pendolo, paragrafo 5.2-VIII, è data dalle relazioni:

$$\begin{aligned}E_a &= \frac{1}{2} m \bar{\omega}^2 A'^2 = 2m A^2 \bar{\omega}^2 \cos^2 \omega_m t \\ E_b &= \frac{1}{2} m \bar{\omega}^2 B'^2 = 2m A^2 \bar{\omega}^2 \sin^2 \omega_m t.\end{aligned}$$

L'energia totale di entrambi i pendoli è costante:

$$E_a + E_b = 2m A^2 \bar{\omega}^2 = E.$$

La differenza di energia tra i due pendoli è

$$\begin{aligned} E_a - E_b &= E(\cos^2 \omega_m t - \sin^2 \omega_m t) \\ &= E \cos 2\omega_m t = E \cos(\omega_1 - \omega_2)t. \end{aligned}$$

Dalle relazioni precedenti si ottiene

$$\begin{aligned} E_a &= \frac{1}{2}E[1 + \cos(\omega_1 - \omega_2)t] \\ E_b &= \frac{1}{2}E[1 - \cos(\omega_1 - \omega_2)t]. \end{aligned}$$

Si deduce che l'energia totale  $E$  è costante e che fluisce da un pendolo all'altro alla frequenza del battimento. La figura 26 mostra gli andamenti di  $x_a$ ,  $x_b$ ,  $E_a$ ,  $E_b$ .

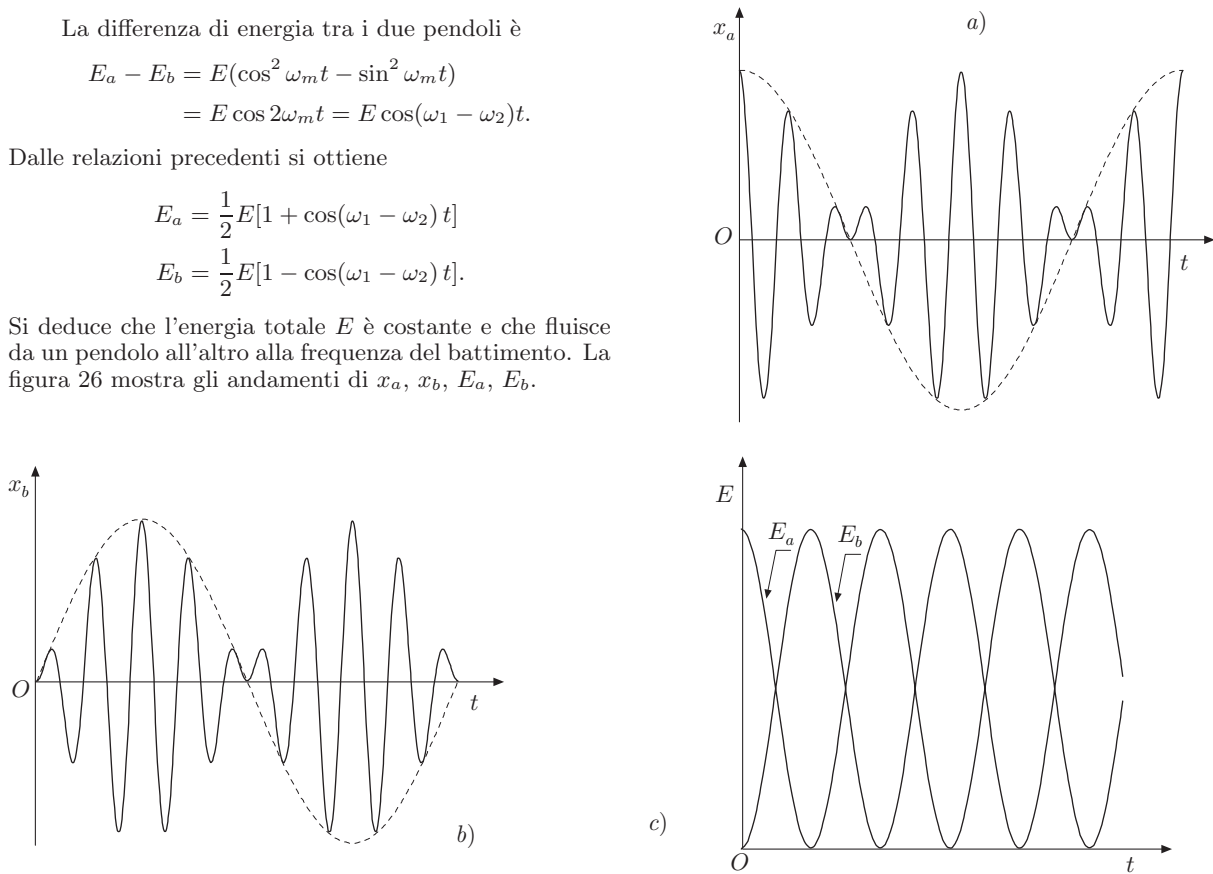


Fig. 10.26

III 8. Oscillazioni trasversali di due particelle identiche collegate ad un filo teso.

Le particelle  $a$  e  $b$ , distanti tra loro  $d = l/3$  siano fissate, come in figura 27, ad un filo di lunghezza  $l$  e massa trascurabile, teso tra  $O$  e  $O'$ . Supponendo che gli spostamenti trasversali siano piccoli, detta  $T$  la tensione del filo, la componente trasversale della forza che agisce su  $a$  è data da

$$\begin{aligned} F_{a,y} &= -T \sin \theta_a + T \sin \varphi_a = -T \frac{y_a}{\sqrt{d^2 + y_a^2}} + T \frac{y_b - y_a}{\sqrt{d^2 + (y_b - y_a)^2}} \\ &= -T \frac{y_a}{d\sqrt{1 + y_a^2/d^2}} + T \frac{y_b - y_a}{d\sqrt{1 + (y_b - y_a)^2/d^2}}. \end{aligned}$$

Trascurando i termini  $y_a^2/d^2$  e  $(y_b - y_a)^2/d^2$ , si ha

$$F_{a,y} = -\frac{T}{d}(2y_a - y_b).$$

Analogamente per la particella  $b$ :

$$F_{b,y} = -\frac{T}{d}(2y_b - y_a).$$

Scrivendo le equazioni della dinamica,

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_a &= -\frac{T}{d}(2y_a - y_b) \\ m\ddot{y}_b &= -\frac{T}{d}(2y_b - y_a), \end{aligned}$$

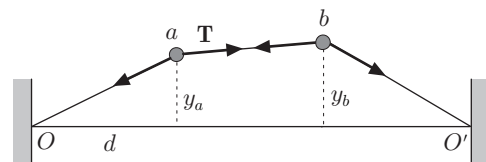


Fig. 10.27

si ottiene:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_a + 2\omega_0^2 y_a - \omega_0^2 y_b &= 0 \\ \ddot{y}_b + 2\omega_0^2 y_b - \omega_0^2 y_a &= 0, \end{aligned} \quad (47)$$

dove  $\omega_0^2 = T/md = 3T/ml$ .

I modi normali di vibrazione sono due:

$$y_a = A_1 \cos(\omega t + \varphi), \quad y_b = A_2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Sostituendo le precedenti e le loro derivate seconde nelle (47), si ottiene:

$$\begin{aligned} (2\omega_0^2 - \omega^2)A_1 - \omega_0^2 A_2 &= 0 \\ (2\omega_0^2 - \omega^2)A_2 - \omega_0^2 A_1 &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Eliminando  $A_2$  e  $A_1$ , si deduce l'equazione in  $\omega^2$ :

$$\omega^4 - 4\omega_0^2 \omega^2 + 3\omega_0^4 = 0,$$

che ammette le radici:

$$\omega_1^2 = 3\omega_0^2, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2.$$

Ricavando il rapporto tra le ampiezze dalle (48) e sostituendo la prima radice, si ha

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\omega_0^2}{2\omega_0^2 - 3\omega_0^2} = -1;$$

sostituendo la seconda:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\omega_0^2}{2\omega_0^2 - \omega_0^2} = 1.$$

Infine, tenuto conto del rapporto tra le ampiezze trovato, l'equazione del modo a frequenza inferiore è

$$y_a = C_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) = y_b,$$

quella del modo a frequenza superiore:

$$y_a = C_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi_2) = -y_b.$$

Il primo modo si chiama simmetrico, il secondo antisimmetrico; la loro configurazione è mostrata in figura 28.

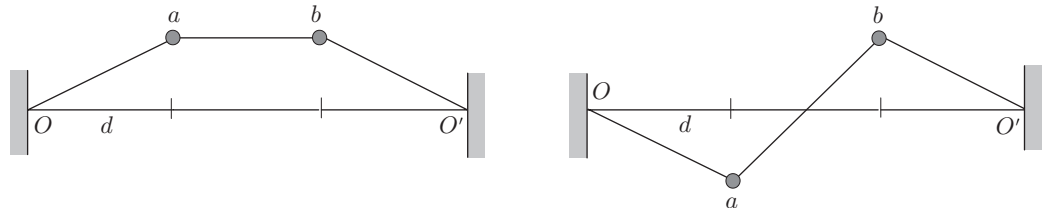


Fig. 10.28

### III 9. Coordinate normali.

È possibile trovare i modi normali di vibrazione con la ricerca degli autovalori che si ottengono mediante la diagonalizzazione della matrice della trasformazione lineare, rappresentativa di un vettore.

Si consideri il problema masse-molle, collegate come nell'esempio 6. L'energia cinetica del sistema è data da

$$T = \frac{1}{2}m(x_a^2 + x_b^2);$$

l'energia potenziale:

$$U = \frac{1}{2}kx_a^2 + \frac{1}{2}kx_b^2 + \frac{1}{2}k(x_a - x_b)^2 = \frac{1}{2}k(2x_a^2 + 2x_b^2 - 2x_a x_b).$$

Sia l'energia cinetica che l'energia potenziale possono essere scritte sotto forma di matrici, come segue:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_a \quad \dot{x}_b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{pmatrix}, \quad (49)$$

$$U = \frac{1}{2}k(x_a \quad x_b) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix}. \quad (50)$$

La matrice quadrata dell'energia cinetica è una matrice diagonale, in particolare unitaria; mentre la matrice quadrata dell'energia potenziale va diagonalizzata.

A questo proposito va rammentato che un vettore  $\mathbf{r}'$ , di componenti  $r' \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ , può essere espresso mediante un vettore  $\mathbf{r}$ , di componenti  $r \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , secondo la trasformazione lineare:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad r' = Mr, \quad (51)$$

dove  $a, b, c, d$  sono costanti.

Diagonalizzare la matrice  $M$  significa individuare i possibili vettori  $\mathbf{r}' = \lambda \mathbf{r}$ , *autovettori*, una volta trovati gli *autovalori*  $\lambda$ . Pertanto la (51) diventa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Sotto forma di equazioni:

$$\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (a - \lambda)x + by = 0 \\ cx + (d - \lambda)y = 0. \end{cases}$$

Perché questo sistema abbia soluzioni diverse da zero, si deve annullare la matrice:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

da cui si ottengono gli autovalori.

Gli autovalori della matrice quadrata dell'energia potenziale sono dati da

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0,$$

ossia

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Pertanto la matrice diagonale risulta

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esiste dunque una matrice  $C$  ortogonale, inversa uguale alla sua trasposta,  $CC^T = CC^{-1} = 1$ , tale che

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad C^{-1}MC = D, \quad (53)$$

dove  $M$  è la matrice quadrata della (50).

Per trovare le coordinate normali  $X_a, X_b$ , dell'energia potenziale, si consideri la trasformazione ortogonale

$$\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} X_a \\ X_b \end{pmatrix}, \quad (54)$$

Dalla (50) si ha

$$(x_a \quad x_b)M \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = (x_a \quad x_b)MC \begin{pmatrix} X_a \\ X_b \end{pmatrix}.$$

Ricordando che la trasposta del prodotto di due matrici è uguale al prodotto delle trasposte nell'ordine inverso, la trasposta della (54) risulta

$$(x_a \ x_b) = (X_a \ X_b)C^{-1},$$

pertanto sostituendo nella precedente e tenendo conto della (54)

$$\begin{aligned} (x_a \ x_b)MC \begin{pmatrix} X_a \\ X_b \end{pmatrix} &= (X_a \ X_b)C^{-1}MC \begin{pmatrix} X_a \\ X_b \end{pmatrix} \\ &= (X_a \ X_b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_a \\ X_b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nelle nuove variabili, l'energia potenziale è data da

$$U = \frac{1}{2}k(X_a^2 + 3X_b^2). \quad (55)$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica, si noti che essendo  $C$  una costante, derivando rispetto al tempo la (54), si ha:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \dot{X}_a \\ \dot{X}_b \end{pmatrix}.$$

La matrice quadrata che compare nell'energia cinetica è unitaria, quindi

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C = C^{-1}C = 1.$$

Pertanto l'energia cinetica nelle nuove variabili, risulta

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{X}_a^2 + \dot{X}_b^2).$$

Dalla (55) si deducono le equazioni della dinamica del sistema:

$$m\ddot{X}_a = -kX_a, \quad m\ddot{X}_b = -3kX_b,$$

che ammettono soluzioni:

$$X_a = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad X_b = B \sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$

con

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}},$$

ed  $A, B, \varphi_1, \varphi_2$  costanti dipendenti dalle condizioni iniziali.

Per trovare la matrice  $C$ , si osservi che per le (50) e (52) si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_a \\ \lambda x_b \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Pertanto:

$$\mathbf{r}' = (2x_a - x_b)\mathbf{i} + (-x_a + 2x_b)\mathbf{j}. \quad (57)$$

Ponendo, nella (56), gli autovalori trovati,  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ , si hanno i sistemi

$$\begin{cases} 2x_a - x_b = x_a \\ -x_a + 2x_b = x_b, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_a - x_b = 3x_a \\ -x_a + 2x_b = 3x_b, \end{cases},$$

che ammettono soluzioni

$$x_a = x_b, \quad x_a = -x_b.$$

Sostituendo la prima soluzione nella (57), si ottiene il vettore

$$\mathbf{r}' = x_a \mathbf{i} + x_a \mathbf{j},$$

che ha modulo:

$$r' = x_a \sqrt{2}.$$



Pertanto il vettore unitario risulta:

$$\frac{\mathbf{r}'}{r'} = \frac{x_a}{x_a\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{x_a}{x_a\sqrt{2}} \mathbf{j}.$$

Esso ha come componenti i coseni direttori degli assi  $X_a$ ,  $x_a$ , ossia:

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Sostituendo la seconda soluzione nella (57), si ha il vettore

$$\mathbf{r}' = -3x_b \mathbf{i} + 3x_b \mathbf{j},$$

che ha modulo:

$$r' = 3x_b\sqrt{2}.$$

Il vettore di modulo unitario è

$$\frac{\mathbf{r}'}{r'} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j},$$

che fornisce l'altra coppia di coseni direttori:

$$\cos \alpha'_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \alpha'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pertanto si ha:

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Infine la (54) diventa:

$$\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_a \\ X_b \end{pmatrix}.$$

Si ottiene:

$$x_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_a - X_b), \quad x_b = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_a + X_b).$$

In generale il moto risulta combinazione delle due vibrazioni di pulsazioni  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .

Imponendo la condizione iniziale  $B = 0$ , si ha

$$x_a = x_b = \frac{X_a}{\sqrt{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \sin(\omega_1 t + \varphi_1).$$

Le oscillazioni sono concordi, ossia  $\rightarrow \rightarrow$ , oppure  $\leftarrow \leftarrow$ , con pulsazione  $\omega_1$ .

Se  $A = 0$ , si ottiene

$$x_a = -x_b = -\frac{X_b}{\sqrt{2}} = -\frac{B}{\sqrt{2}} \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

In questo caso le oscillazioni avvengono in direzioni opposte, ossia  $\leftarrow \rightarrow$ , oppure  $\rightarrow \leftarrow$ , con pulsazione  $\omega_2$ .

.....

### 6. Oscillazioni di grande ampiezza del pendolo

Le piccole oscillazioni del pendolo sono state considerate al capitolo VII, esempio 9. Nello studio delle oscillazioni di grande ampiezza va applicato il teorema di conservazione dell'energia; tuttavia anche in questo modo non si ottiene una soluzione analitica del problema.

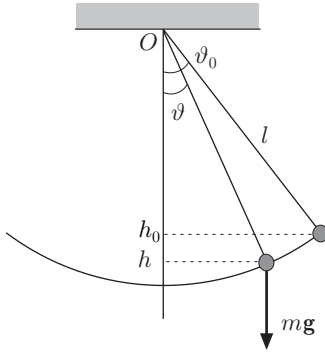


Fig. 10.29

Scriviamo la conservazione dell'energia meccanica del pendolo nella posizione corrispondente al generico angolo  $\theta$ , figura 29; si ha

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = mgh_0, \quad (58)$$

dove  $h$  e  $h_0$  sono le quote assunte rispetto al punto più basso della traiettoria. Essendo  $h = l(1 - \cos \theta)$  e  $h_0 = l(1 - \cos \theta_0)$ , dalla (58) si trae

$$v^2 = 2gl(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

ed essendo  $v = \omega l = \dot{\theta}l$ ,

$$\dot{\theta}^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_0).$$

Separando le variabili:

$$\sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = dt;$$

il semiperiodo  $\tau$  dell'oscillazione è dunque dato da

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}. \quad (59)$$

Questo integrale è improprio perché presenta una singolarità per  $\theta = \theta_0$ , che non ha significato fisico, perché il periodo è finito. La singolarità va eliminata con le seguenti sostituzioni:

$$k = \sin \frac{\theta_0}{2}, \quad k \sin u = \sin \frac{\theta}{2}; \quad (60)$$

differenziando la seconda si ottiene

$$k \cos u \, du = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta,$$

da cui, tenuto conto della (60):

$$d\theta = \frac{2k \cos u \, du}{\cos(\theta/2)} = \frac{2k \cos u \, du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}.$$

D'altra parte si può porre:

$$\begin{aligned} \cos \theta - \cos \theta_0 &= (1 - \cos \theta_0) - (1 - \cos \theta) = 2 \left( \sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 2 \left( k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = 2k^2(1 - \sin^2 u); \end{aligned}$$

pertanto sostituendo nella (59) si ottiene

$$\tau = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}.$$

Questo integrale si chiama integrale ellittico di prima specie e va calcolato sviluppando l'integrando in serie di potenze. Posto  $x = k^2 \sin^2 u$ , è

$$(1 - k^2 \sin^2 u)^{-1/2} = (1 - x)^{-1/2}.$$

Sviluppando in serie di potenze si ottiene

$$(1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

cioè:

$$(1 - k^2 \sin^2 u)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 u + \frac{3}{4} \frac{1}{2}k^4 \sin^4 u + \dots$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 u)^{-1/2} du &= \int_0^{\pi/2} du + \frac{1}{2}k^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 u du \\ &+ \frac{3}{8}k^4 \int_0^{\pi/2} \sin^4 u du + \dots \end{aligned}$$

Risulta:

$$\int_0^{\pi/2} du = \frac{\pi}{2};$$

$$\frac{k^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 u du = \frac{k^2}{2} \left[ \frac{1}{2}u - \frac{1}{4} \sin 2u \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}k^2 \pi;$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{8}k^4 \int_0^{\pi/2} \sin^4 u du &= \frac{3}{8}k^4 \left[ -\frac{\sin^3 u \cos u}{4} + \frac{3}{4} \left( \frac{1}{2}u - \frac{1}{4} \sin 2u \right) \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{9}{128}k^4 \pi. \end{aligned}$$

Infine

$$\int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 u)^{-1/2} du = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}k^2 \pi + \frac{9}{128}k^4 \pi + \dots$$

Pertanto si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} &= \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \dots \right) \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \dots \right). \end{aligned}$$

Poiché  $k = \sin \theta_0/2$ , ed essendo lecito ritenere che, per potenze superiori alla prima, si possa porre  $k \approx \theta_0/2$ , si ha

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{9}{64} \frac{\theta_0^4}{16} + \dots \right).$$

Si trova dunque che per oscillazioni di piccola ampiezza, il periodo è

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

la frequenza è unica. Per oscillazioni di ampiezza tale che sia lecito trascurare i termini successivi al secondo, si ha

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)^{-1} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{16}\right).$$

Pur limitandosi ai soli due termini considerati, si osserva che oltre alla frequenza  $\omega_0$  è presente una frequenza multipla di quest'ultima. Le oscillazioni sono anarmoniche.

### 7. Moto verticale di un grave soggetto a forza viscosa

È il caso del moto di un punto materiale soggetto ad una forza costante e ad una forza viscosa che, per velocità modeste, è del tipo  $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$ .

Il coefficiente  $b = \chi\eta$  dipende dal coefficiente di viscosità  $\eta$  del mezzo e dal fattore di forma  $\chi$  del corpo; quest'ultimo, di solito, va determinato sperimentalmente. Solo nel caso di una sfera di raggio  $R$ , calcoli piuttosto laboriosi danno come risultato  $\chi = 6\pi R$  (legge di Stokes).

Supponiamo di lasciar cadere una pallina in un fluido viscoso, in modo che all'istante  $t = 0$ , posizione  $x_0$  e velocità  $v_0$  siano nulle. Assumendo come riferimento un asse con origine in corrispondenza al pelo libero del fluido e volto verso il basso, la seconda equazione della dinamica si scrive

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - b\mathbf{v}, \quad (61)$$

avendo trascurato la spinta di Archimede.

Il moto è unidimensionale, perciò dalla (61) si ha:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v.$$

Separando le variabili:

$$\frac{dv}{g - (b/m)v} = dt.$$

Integrando

$$\int \frac{dv}{g - (b/m)v} = \int dt,$$

si ottiene:

$$-\frac{m}{b} \ln \left( g - \frac{b}{m}v \right) = t + C_1. \quad (62)$$

La costante  $C_1$ , tenendo conto delle condizioni iniziali:  $t = 0$ ,  $v_0 = 0$ , risulta  $C_1 = -(m/b) \ln g$ . Dunque

$$-\frac{m}{b} \ln \left( g - \frac{b}{m} v \right) = t - \frac{m}{b} \ln g,$$

cioè

$$\ln \frac{g - bv/m}{g} = -\frac{b}{m} t, \quad \Rightarrow \quad g - \frac{b}{m} v = g e^{-(b/m)t},$$

da cui

$$v = \frac{mg}{b} \left( 1 - e^{-(b/m)t} \right). \quad (63)$$

L'andamento della velocità in funzione del tempo è mostrato in figura 30, per  $b_1 > b_2 > b_3$ . Essa cresce fino a un valore costante  $mg/b$ , che si chiama velocità limite, valore per cui si ha equilibrio dinamico tra la forza di gravità e la forza viscosa. Infatti ponendo nella (61)  $a = 0$ , si ottiene

$$mg - bv = 0, \quad \Rightarrow \quad v = \frac{mg}{b}.$$

La pallina raggiunge tanto più rapidamente la velocità limite, quanto più elevato è il fattore di smorzamento  $b/m$  dell'esponenziale; tale fattore ha le dimensioni dell'inverso di un tempo e si può indicare con  $1/\tau$  dove  $\tau$  è chiamata costante di tempo. Per avere una stima della rapidità con cui la velocità assume il valore limite, si osservi che per  $t = \tau$  si ha

$$v = \frac{mg}{b} (1 - e^{-1}) \approx \frac{mg}{b} (1 - 0,37);$$

pertanto quanto più piccola è la costante di tempo o più elevato è  $b/m$ , tanto più rapidamente viene raggiunta la velocità limite. Si colga l'analogia con i transistori elettrici; circuiti  $R, C$  ed  $R, L$ .

Se la velocità iniziale  $v_0$  è diversa da zero, la costante  $C_1$ , ricavata dalla (62), diventa

$$C_1 = -\frac{m}{b} \ln \left( g - \frac{b}{m} v_0 \right).$$

Allora la velocità è

$$v = \frac{mg}{b} - \left( \frac{mg}{b} - v_0 \right) e^{-(b/m)t}.$$

Se  $v_0 < mg/b$ , la velocità, dal valore iniziale, tende asintoticamente alla velocità limite  $mg/b$ , come c'era da aspettarsi. Se  $v_0 > mg/b$ , si ha:

$$v = \frac{mg}{b} - \left( v_0 - \frac{mg}{b} \right) e^{-(b/m)t};$$

la velocità tende ancora a  $mg/b$ . L'andamento di  $v(t)$  nei due casi, è mostrato in figura 31.

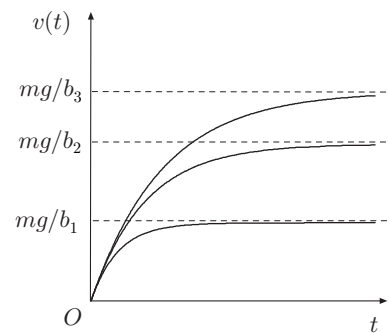


Fig. 10.30

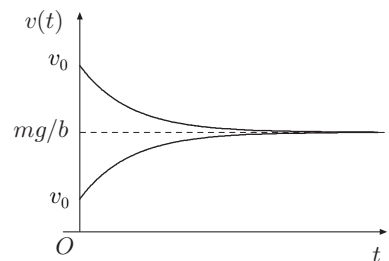


Fig. 10.31

L'equazione oraria del moto si ottiene dalla (63) che, separando le variabili, si scrive

$$dx = \frac{mg}{b} dt - \frac{mg}{b} e^{-(b/m)t} dt;$$

integrando si ottiene:

$$x(t) = \frac{mg}{b} t + \frac{m^2 g}{b^2} e^{-(b/m)t} + C_2.$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali, la costante risulta  $C_2 = -m^2 g/b^2$ . Infine:

$$x(t) = \frac{mg}{b} t + \frac{m^2 g}{b^2} e^{-(b/m)t} - \frac{m^2 g}{b^2}. \quad (64)$$

Il controllo dimensionale assicura che  $mg/b$  è una velocità e che  $m^2 g/b^2$  è una lunghezza. Per studiare l'andamento della (64), si osservi che essa è somma del termine lineare

$$x_1 = \frac{mg}{b} t - \frac{m^2 g}{b^2}$$

e del termine esponenziale

$$x_2 = \frac{m^2 g}{b^2} e^{-(b/m)t}.$$

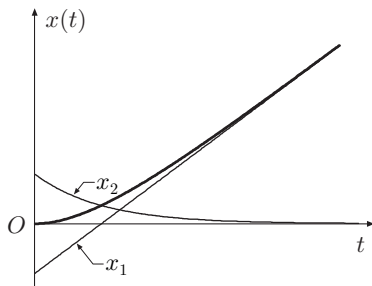


Fig. 10.32

Il termine lineare, in figura 32, è rappresentato da una retta, le cui intercette con gli assi sono  $-m^2 g/b^2$  ed  $m/b = \tau$ . Il secondo è un esponenziale decrescente che per  $t = 0$  assume il valore  $m^2 g/b^2$  e per  $t = \tau$ , il valore  $(m^2 g/b^2)e^{-1}$ . La somma dei due termini dà l'equazione oraria; è chiaro che per  $t$  sufficientemente grande rispetto a  $\tau$  l'andamento è solo lineare; il moto, esaurito il transitorio, è uniforme con velocità  $mg/b$ . Si lascia al lettore lo studio dell'equazione oraria nel caso in cui la velocità iniziale sia diversa da zero.

### 8. Moto verticale dei gravi nell'aria

In questo caso la forza agente sul grave è una forza di resistenza idraulica che scalarmente scriviamo  $F(v) = -\kappa_i v^2$ , dove  $\kappa_i = \chi \rho l^2$ , con  $\chi$  coefficiente di forma,  $l$  una lunghezza caratteristica del grave e  $\rho$  densità dell'aria.

Supponiamo che per  $t = 0$ ,  $x_0$  e  $v_0$  siano uguali a zero; assunto come riferimento un asse verticale volto verso il basso, la seconda equazione della dinamica è

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \kappa_i v^2. \quad (65)$$

Separando le variabili si ha

$$\frac{dv}{g - (\kappa_i/m)v^2} = dt, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{1 - v^2/v_L^2} = g dt,$$

avendo indicato con  $v_L^2 = mg/\kappa_i$  una grandezza che ha le dimensioni del quadrato di una velocità. Integrando:

$$\int \frac{dv}{1 - v^2/v_L^2} = g \int dt, \quad \Rightarrow \quad \frac{v_L}{2} \ln \frac{v_L + v}{v_L - v} = gt + C_1,$$

la quale è valida per  $0 \leq v < v_L$ . La costante di integrazione è uguale a zero. Dalla precedente si ottiene

$$v = v_L \frac{e^{2gt/v_L} - 1}{e^{2gt/v_L} + 1} = v_L \tanh \frac{gt}{v_L}, \quad (66)$$

la quale mostra che al crescere di  $t$ ,  $v$  cresce tendendo al valore  $v_L$ , per  $t \rightarrow \infty$ . Si deduce che  $v_L$  è la velocità *asintotica o limite*, che si può ottenere immediatamente dalla (65) ponendo  $dv/dt = 0$ .

Integrando la (66) e ricordando che per  $t = 0$ ,  $x_0 = 0$ , si ottiene l'equazione del moto:

$$x(t) = \frac{v_L^2}{g} \ln \cosh \frac{gt}{v_L}. \quad (67)$$

L'andamento delle (66) e (67) è mostrato nelle figure 33 e 34.

È interessante confrontare la (58) con la legge di caduta dei gravi nel vuoto

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

indicata con tratteggio in figura 34.

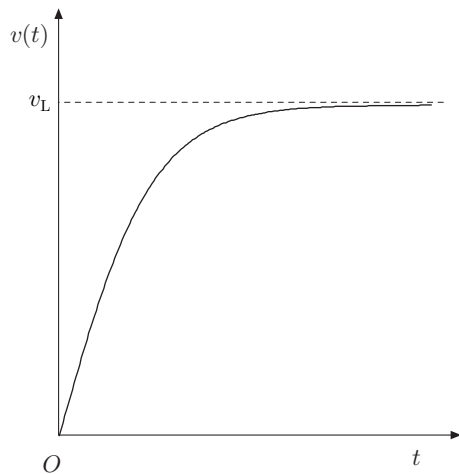


Fig. 10.33

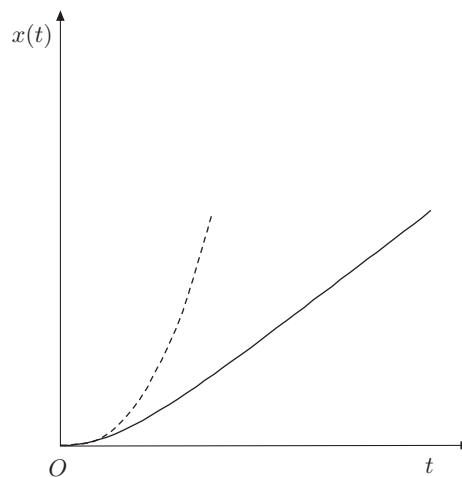


Fig. 10.34

### Esempi .....

- III 10. Un paracadutista incontra una forza di resistenza idraulica  $F = -\kappa_i v^2$ , dove  $\kappa_i = 0,8R^2$  con  $R$  raggio del paracadute. Si vuole determinare  $R$  in modo che il paracadutista col suo equipaggiamento, di massa totale  $m$ , raggiunga il suolo con la stessa velocità con cui vi perverrebbe cadendo da una altezza di un metro.

Uguagliando la velocità limite

$$v_L = \sqrt{\frac{mg}{\kappa_i}} = \sqrt{\frac{mg}{0,3R^2}}$$

a quella che il paracadutista assumerebbe in caduta libera da un metro,  $v = \sqrt{2gh}$ , si ricava  $R$ .

- ||| **11.** Determinare la velocità di caduta di un grave soggetto al peso e alla forza di resistenza idraulica, in funzione della distanza  $x$  percorsa.

Esprimiamo l'equazione della dinamica nella variabile  $x$ :

$$m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mg - \kappa_i v^2, \quad m \frac{dv}{dx} v = mg - \kappa_i v^2. \quad (68)$$

Ponendo  $u = v^2$ , si ha

$$du = 2v dv, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2v} \frac{du}{dx}.$$

Sostituendo nella (68), si ottiene:

$$\frac{du}{dx} = 2 \left( g - \frac{\kappa_i}{m} u \right).$$

Questa equazione è analoga a quelle considerate nel paragrafo 7; supponendo che per  $x = 0$ ,  $v = v_0$  sia maggiore di  $mg/\kappa_i$ , si ottiene:

$$v^2 = \frac{mg}{\kappa_i} - \left( \frac{mg}{\kappa_i} - v_0^2 \right) e^{-2(\kappa_i/m)x}.$$

### ||| 9. Moto di una particella carica in un campo di induzione magnetica uniforme

Come s'è visto, una particella carica, animata di velocità  $\mathbf{v}$ , in un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$ , è soggetta alla forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Supponiamo che  $\mathbf{B}$  sia diretto come l'asse  $z$  positivo di una terna cartesiana ortogonale e che  $\mathbf{v}$  giaccia nel piano  $xy$ ; si ha

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \dot{y}B\mathbf{i} - \dot{x}B\mathbf{j}.$$

Per la seconda legge della dinamica, il sistema di equazioni differenziali da risolvere è

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qB\dot{y} & \ddot{x} &= (qB/m)\dot{y} = \omega\dot{y} \\ m\ddot{y} &= -qB\dot{x} & \ddot{y} &= -(qB/m)\dot{x} = -\omega\dot{x}, \end{aligned}$$

avendo indicato con  $\omega = qB/m$  la *frequenza di ciclotrone*.

Si osservi che ciascuna equazione contiene sia le derivate di  $x$  che le derivate di  $y$ , complicando il problema matematico. Tuttavia derivando successivamente rispetto al tempo, si ha

$$\frac{d}{dt}\ddot{x} = \omega\ddot{y}, \quad \frac{d}{dt}\ddot{y} = -\omega\ddot{x},$$



e sostituendo a  $\ddot{x}$  e  $\ddot{y}$  le rispettive espressioni, si ottiene

$$\frac{d}{dt}\dot{x} = -\omega^2\dot{x}, \quad \frac{d}{dt}\dot{y} = -\omega^2\dot{y}.$$

Ponendo  $p = \dot{x}$  e  $q = \dot{y}$ , le precedenti diventano:

$$\ddot{p} + \omega^2 p = 0, \quad \ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad (69)$$

che rappresentano equazioni di oscillazioni armoniche su assi ortogonali.

Supponiamo che le condizioni iniziali per  $t = 0$  siano:

$$\begin{aligned} x = 0, & \quad p = \dot{x} = v_0, & \quad \dot{p} = \ddot{x} = 0, \\ y = y_0, & \quad q = \dot{y} = 0, & \quad \dot{q} = \ddot{y} = -\omega v_0 \\ z = 0 & \quad \dot{z} = 0. \end{aligned}$$

Ciò significa che la particella entra nella regione in cui è presente il campo di induzione magnetica a distanza  $y_0$  dall'origine, con velocità iniziale  $v_0$  parallela all'asse  $x$  e subendo l'accelerazione centripeta iniziale  $-\omega v_0$ .

Le soluzioni delle (69) si ricavano come descritto al paragrafo 3.

$$\begin{aligned} p(t) &= C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}, \\ \dot{p}(t) &= i\omega C_1 e^{i\omega t} - i\omega C_2 e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene  $C_1 = C_2 = v_0/2$ , dunque:

$$p(t) = \dot{x} = \frac{v_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = v_0 \cos \omega t,$$

che integrata, tenuto conto delle condizioni iniziali, dà

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (70)$$

Analogamente si procede per  $q(t)$  e  $y(t)$ ; si ha

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos \omega t + y_0 - \frac{v_0}{\omega}. \quad (71)$$

Quadrando e sommando le (70) e (71) si ottiene la traiettoria:

$$x^2 + \left[ y - \left( y_0 - \frac{v_0}{\omega} \right) \right]^2 = \left( \frac{v_0}{\omega} \right)^2,$$

che è una circonferenza con centro  $C$  di coordinate  $C \equiv [0; (y_0 - v_0/\omega)]$  e raggio  $v_0/\omega$ . Se esistesse una componente della velocità lungo l'asse  $z$ , la traiettoria sarebbe un'elica cilindrica.