9. Teoremi dinamici

1. Impulso

Si definisce impulso elementare $d\mathbf{J}$ di una forza $\mathbf{F}$ la grandezza:

$$d\mathbf{J} = \mathbf{F}dt. \tag{1}$$

Se la forza è costante, l'impulso finito nell'intervallo di tempo Δt è

$$\mathbf{J} = \mathbf{F}\Delta t. \tag{2}$$

Se la forza è funzione del tempo, l'impulso nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ è

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)dt. \tag{3}$$

Nel SI l'impulso di una forza si misura in newton per secondo $(N \cdot s)$ e si definisce come impulso della forza costante di un newton per il tempo di un secondo; esso ha le stesse dimensioni della quantità di moto.

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione fondamentale della dinamica per dt, si ha

$$\mathbf{F}dt = m\mathbf{a}dt = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}dt = d(m\mathbf{v}) = d\mathbf{p}.$$

L'impulso elementare è uguale alla variazione infinitesima della quantità di moto essendo, nell'ambito della meccanica classica, la massa invariante. Dalla precedente si deduce che l'impulso finito, in un certo intervallo di tempo, è dato da

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p} = \Delta\mathbf{p}. \tag{4}$$

La precedente esprime il teorema dell'impulso:
L'impulso della forza agente su un punto materiale in un certo intervallo di tempo, è uguale alla variazione della quantità di moto del punto materiale nello stesso intervallo di tempo.

Il teorema dell'impulso può dare un contributo alla soluzione di problemi di dinamica quando la forza agente sul punto materiale è funzione solo del tempo. La variazione della quantità di moto del punto materiale viene ottenuta integrando la (4), senza risolvere l'equazione differenziale del moto.

Molto spesso, come nei problemi d'urto, non è nota l'esatta espressione di $F(t)$ o l'intervallo di tempo durante il quale essa agisce ma, viceversa, è noto l'effetto integrato della forza, cioè la variazione della quantità di moto, espressa dalla (4). Si noti che una certa variazione di quantità di moto può essere determinata da una forza molto intensa, che agisce per un breve intervallo di tempo, oppure da una forza meno intensa che agisce per un intervallo di tempo più lungo. Per esempio, la stecca che colpisce una palla da bigliardo produce una forza molto intensa in un intervallo di tempo molto breve, determinando una certa variazione di quantità di moto della palla. Viceversa, una forza come la gravità, per produrre la stessa variazione, deve agire per un tempo notevolmente più lungo. In figura 1 sono mostrati qualitativamente due grafici della forza che agisce durante l'urto tra due corpi, in funzione del tempo. La variazione della quantità di moto è la stessa, valore numerico dell'area racchiusa dalla curva e l'asse dei tempi; nel caso (a) l'urto avviene in un tempo più lungo e la forza ha intensità massima minore rispetto al caso (b), in cui l'intervallo di tempo è più breve.

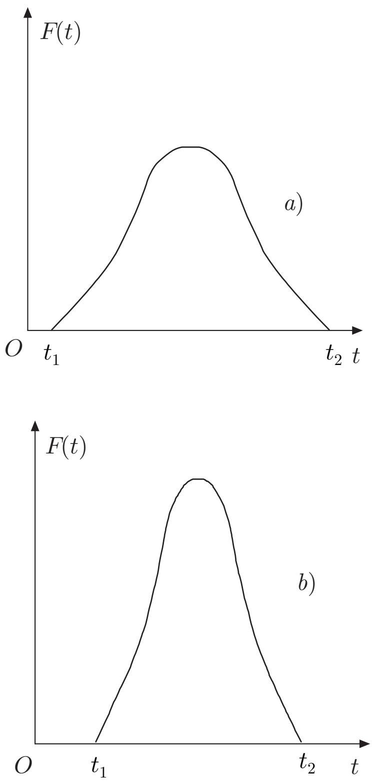

Fig. 9.1

Dal teorema dell'impulso segue che se la risultante delle forze agenti sul punto materiale è nulla, si ha

$$\mathbf{p} = \mathbf{cost},$$

relazione che esprime il teorema della conservazione della quantità di moto:
La quantità di moto di un punto materiale è costante se è nulla la risultante delle forze agenti su esso.

Questo teorema si può dedurre direttamente dalla legge fondamentale della dinamica $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, ponendo $\mathbf{F} = 0$ (legge di inerzia). Si osservi ancora che se la forza agente sul punto materiale è ortogonale ad una certa retta, la componente della quantità di moto lungo tale retta è costante; in particolare la retta può essere coincidente con uno degli assi della terna di riferimento.

Esempi

1. Il battipalo è una macchina che serve a conficcare pali nel terreno facendo cadere pressoché liberamente il maglio sul palo. Supponendo che il maglio abbia una massa di $1000\,kg$ e cada dall'altezza $h = 10\,m$, determinare la forza agente sul palo, assumendo che l'impulso venga trasmesso in $10^{-2}\,s$.

La velocità con cui il maglio giunge sul palo è

$$v = \sqrt{2gh} = 14\,m/s$$

e la corrispondente quantità di moto:

$$p_1 = mv = 1,4 \cdot 10^4\,kg \cdot m/s.$$

Dopo l'urto il maglio in pratica si ferma; la quantità di moto è $p_2 \approx 0$. La variazione della quantità di moto risulta $\Delta p = p_1$; pertanto l'impulso è dato da

$$J = \Delta p = 1,4 \cdot 10^4 \, N \cdot s.$$

La forza corrispondente è

$$F = \frac{J}{\Delta t} = 1,4 \cdot 10^6 \, N.$$

Se invece di impiegare il battipalo si poggiasse semplicemente una massa sul palo, il suo valore dovrebbe essere circa 140 tonnellate.

2. Una palla di 100 grammi cade da un'altezza $h = 2\,m$, con velocità iniziale nulla e, dopo l'urto col pavimento, supponendo l'urto perfettamente elastico, rimbalza verso l'alto, raggiungendo la stessa quota di partenza. Determinare l'impulso impresso alla palla dalla forza di gravità e quello nell'urto col pavimento.

La velocità con cui la palla tocca il pavimento è $v = \sqrt{2gh}$, pertanto il modulo dell'impulso dovuto alla gravità è

$$J = \Delta p = mv - 0 = m\sqrt{2gh} = 0,626 \, N \cdot s.$$

Poiché è nota sia la forza che l'intervallo di tempo, $t_1 = 0$, $t_2 = v/g = 0,639\,s$, è possibile calcolare l'impulso mediante la (3); infatti:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} mgdt = mg(t_2 - 0) = 0,626 \, N \cdot s,$$

risultato identico al precedente.

L'impulso impresso alla palla durante il rimbalzo è

$$\mathbf{J} = \Delta \mathbf{p} = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1,$$

dove $\mathbf{v}_1$ è la velocità con cui la palla raggiunge il pavimento e $\mathbf{v}_2$ la velocità con cui essa rimbalza. Poiché i moduli di tali velocità sono uguali, urto elastico, il modulo dell'impulso risulta

$$J = \Delta p = mv - (-mv) = 2mv = 2m\sqrt{2gh} = 1,25 \, N \cdot s.$$

Confrontando questo valore con quello relativo alla caduta libera, e tenendo conto che l'urto con il pavimento avviene in un tempo molto breve, si conclude che la forza agente durante l'urto, è maggiore della forza di gravità, che agisce nella caduta libera. Se l'intervallo di tempo durante il quale avviene l'urto potesse essere misurato, potremmo ricavare l'intensità della forza. Supponendo che $\Delta t = 10^{-2}\,s$, risulta

$$F = \frac{J}{\Delta t} = 1,25 \cdot 10^2 \, N,$$

maggiore di un fattore 1000 della forza di gravità.

2. Momento di una forza

Si definisce momento $\mathbf{M}$ di una forza rispetto ad un polo O la grandezza:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \tag{5}$$

dove $\mathbf{r}$ è il vettore che individua il punto di applicazione della forza rispetto al polo O. Il momento di una forza gode di tutte le proprietà del prodotto vettoriale; inoltre non muta spostando la forza lungo la sua retta d'azione, né assumendo un qualsiasi altro polo su una retta parallela alla retta d'azione della forza. Le componenti cartesiane del momento sono:

$$M_x = yF_z - zF_y, \qquad M_y = zF_x - xF_z, \qquad M_z = xF_y - yF_x.$$

Nel SI il momento di una forza si misura in newton per metro ($N \cdot m$).

2.1. Momento di più forze applicate ad un punto (forze concorrenti)

Se più forze sono applicate ad un punto, cioè sono concorrenti, la forza agente sul punto è la risultante delle forze:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n.$$

Il momento risultante delle forze rispetto ad un polo O, è ovviamente uguale alla somma dei momenti delle singole forze, valutati rispetto allo stesso polo:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_n;$$

ma per la proprietà distribuitiva del prodotto vettoriale si ha

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Ciò significa che, nel caso di forze concorrenti, *il momento risultante è uguale al momento della risultante delle forze*. In altri termini un sistema di forze concorrenti può essere sostituito da una singola forza: la risultante.

3. Momento angolare (momento della quantità di moto)

Si definisce momento angolare $\mathbf{L}$, rispetto ad un polo O, la grandezza:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}; \tag{6}$$

dove $\mathbf{r}$ è il vettore che individua il punto rispetto al polo. Il momento angolare gode delle proprietà del prodotto vettoriale. Nel SI il momento angolare si misura in $J \cdot s$ oppure in $m^2 \cdot kg \cdot s^{-1}$. Le componenti cartesiane del momento angolare risultano

$$L_x = m(x\dot{z} - z\dot{x}), \qquad L_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \qquad L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Si osservi che il vettore quantità di moto $\mathbf{p}$ può essere scomposto in un componente radiale $\mathbf{p}_r$, avente la direzione di $\mathbf{r}$, ed in un componente trasversale $\mathbf{p}_\theta$ normale ad $\mathbf{r}$, perciò si ha

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (\mathbf{p}_r + \mathbf{p}_\theta) = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_\theta. \tag{7}$$

Nella definizione di momento angolare è efficace solo il componente trasversale della quantità di moto.

Una relazione molto semplice sussiste tra momento angolare e velocità areolare; ricordando che quest'ultima è definita da

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}),$$

si ottiene immediatamente

$$\mathbf{L} = 2m\frac{d\mathbf{S}}{dt}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{\mathbf{L}}{2m}. \tag{8}$$

Velocità areolare e momento angolare sono vettori equiversi.

Il momento angolare è una grandezza fondamentale della dinamica in quanto rappresenta l'analogo rotazionale della quantità di moto. In figura 2 è mostrato il momento angolare, rispetto ad un polo O, di un punto materiale che percorre una traiettoria circolare di raggio R, attorno ad un asse di rotazione fisso, coincidente con l'asse z del riferimento. La componente L_z del momento angolare, secondo l'asse z è

$$L_z = L\sin\theta = mvr\sin\theta;$$

essendo $r\sin\theta = R$ e $v = \omega R$, si ottiene

$$L_z = mR^2\omega.$$

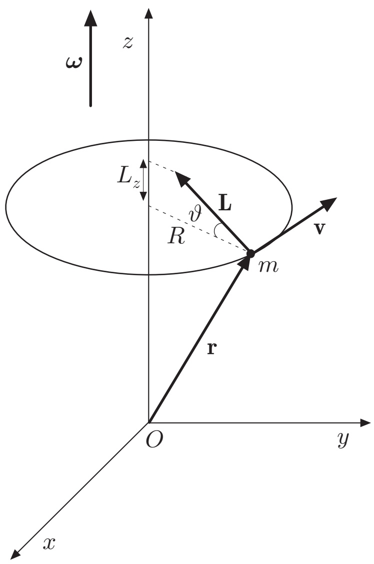

Fig. 9.2

La velocità areolare, in conformità con la 22-III, risulta

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L_z}{2m} = \frac{1}{2}R^2\omega = \frac{1}{2}R^2\dot{\theta}.$$

3.1. Teorema del momento angolare

Nel riferimento inerziale di figura 3 si consideri il momento della forza $\mathbf{F}$ applicata ad un punto, rispetto ad un polo Q:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

ed il momento angolare del punto materiale rispetto allo *stesso polo*,

$$\mathbf{L} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{p}.$$

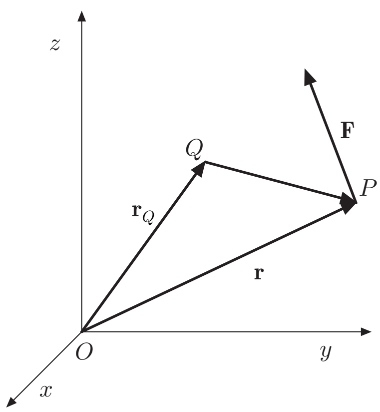

Fig. 9.3

Derivando rispetto al tempo, si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} - \frac{d\mathbf{r}_Q}{dt} \times \mathbf{p} + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

ed osservando che il primo termine del secondo membro è nullo, perché i due vettori sono paralleli, si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\mathbf{v}_Q \times \mathbf{p} + \mathbf{M}.$$

Da quest'ultima relazione si ottiene:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} + \mathbf{v}_Q \times \mathbf{p}. \tag{9}$$

Se il polo Q è fisso o la velocità di quest'ultimo è parallela a $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \tag{10}$$

Le equazioni (9) e (10) sono le analoghe della legge fondamentale della dinamica relativamente alle rotazioni ed esprimono il teorema del momento angolare:
In un riferimento inerziale il momento risultante delle forze agenti sul punto materiale, rispetto ad un polo Q, è uguale alla derivata del momento angolare rispetto al tempo, essendo questo determinato rispetto allo stesso polo, più il prodotto vettoriale tra la velocità del polo e la quantità di moto.

In analogia alle (1) e (2), definiamo *impulso angolare* elementare la quantità:

$$d\mathbf{J}_\theta = \mathbf{M}dt. \tag{11}$$

Poiché dalla (10) $\mathbf{M}dt = d\mathbf{L}$, si ha

$$d\mathbf{J}_\theta = d\mathbf{L}. \tag{12}$$

Se $\mathbf{M}$ dipende solo dal tempo, l'impulso angolare nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, è dato da

$$\mathbf{J}_\theta = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{L} = \Delta\mathbf{L}.$$

Se, in un riferimento inerziale, il momento della risultante delle forze agenti sul punto è nullo, e ciò si verifica quando $\mathbf{F} = 0$, sistema isolato, oppure se $\mathbf{F}$ è diretta come $\mathbf{r}$, si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = cost, \tag{13}$$

relazione che esprime la *conservazione del momento angolare*. Il moto si svolge in un piano ortogonale a $\mathbf{L}$. Il momento angolare si conserva, per esempio, nei campi di forza centrali se si assume come polo il centro delle forze.

In coordinate cartesiane, assumendo un riferimento con origine nel polo O e asse z ortogonale al piano del moto, le componenti del momento angolare risultano

$$L_x = 0, \qquad L_y = 0, \qquad L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \tag{14}$$

L'unica componente del momento angolare è quella lungo l'asse z. Le (14) verificano il legame con la velocità areolare.

3.2. Moti piani

In fondo al paragrafo 3 è stata evidenziata la relazione esistente tra momento angolare e velocità angolare. Nei moti piani, ricordando la (7) e tenendo presente che il modulo della velocità trasversale è dato da

$$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt},$$

si ha:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_\theta = mr^2\frac{d\theta}{dt}\mathbf{k} = mr^2\boldsymbol{\omega}.$$

Definendo momento di inerzia del punto materiale rispetto all'asse passante per il polo O, la quantità $I = mr^2$, si ottiene

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}. \tag{15}$$

In un moto piano momento angolare e velocità angolare sono paralleli e ortogonali al piano del moto.

Si colga l'analogia che esiste tra la quantità di moto $\mathbf{p}$, grandezza che si riferisce alla traslazione, definita dal prodotto della massa per la velocità, ed il momento angolare definito dal prodotto tra il momento di inerzia e la velocità angolare.

Nei moti piani momento delle forze e momento angolare sono ortogonali al piano del moto ma possono avere direzioni opposte. Fissato un riferimento con origine nel polo e asse z ortogonale al piano, derivando rispetto al tempo la (14), si ha

$$\frac{dL_z}{dt} = m(\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y} - \dot{y}\dot{x} - y\ddot{x}) = x(m\ddot{y}) - y(m\ddot{x}).$$

Poiché per la seconda legge della dinamica:

$$m\ddot{x} = F_x, \qquad m\ddot{y} = F_y,$$

si ottiene

$$\frac{dL_z}{dt} = xF_y - yF_x,$$

che è proprio la componente secondo l'asse z del momento della forza, equazione (10). Inoltre dalla (15) si deduce:

$$M_z = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha,$$

dove α è l'accelerazione angolare; il momento della forza determina una accelerazione angolare. Nel moto circolare uniforme è ovviamente $M_z = 0$ e $L = cost$.

Per quanto riguarda l'energia cinetica $T = mv^2/2$, essendo $v = \omega r$, si ha

$$T = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2, \tag{16}$$

e, per la (15):

$$T = \frac{1}{2}L\omega. \tag{17}$$

Più in generale, qualora il moto non fosse piano,

$$T = \frac{1}{2}\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega}.$$

Questa espressione verrà considerata in seguito, a proposito dell'energia cinetica dei sistemi rigidi.

Esempi

3. Momento angolare della Terra rispetto al Sole e dell'elettrone di un atomo di idrogeno rispetto al nucleo. Si supponga, in entrambi i casi, che le orbite siano circolari.

Poiché le forze sono centrali, il momento angolare è costante. Per la Terra si assuma: massa $M_T = 5,98\cdot 10^{24}\,kg$, distanza media dal Sole $r = 1,49\cdot 10^{11}\,m$, periodo di rivoluzione $T = 3,16\cdot 10^{7}\,s$.

Essendo $\omega = 2\pi/T = 1,98\cdot 10^{-7}\,rad/s$, si ha

$$L_T = M_T r^2\omega = 2,67\cdot 10^{40}\,J\cdot s.$$

Per l'elettrone: massa $m_e = 9,11\cdot 10^{-31}\,kg$, distanza media dal nucleo $r_e = 5,29\cdot 10^{-11}\,m$, velocità angolare $\omega = 4,13\cdot 10^{16}\,rad/s$; si ha

$$L_e = mr_e^2\omega = 1,05\cdot 10^{-34}\,J\cdot s.$$

Si noti l'enorme diversità degli ordini di grandezza. Il momento angolare dell'elettrone costituisce una delle costanti fondamentali della fisica; infatti esso è numericamente uguale a $\hbar = h/2\pi$, dove h è la costante di Planck.

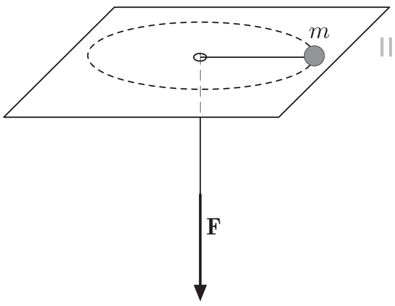

Fig. 9.4

4. Una massa m, fissata ad un estremo di un filo, ruota su una superficie orizzontale priva di attrito come in figura 4. All'altro estremo del filo, che passa attraverso un foro, praticato nel piano in corrispondenza al centro della traiettoria, è applicata una forza che trascina il filo con velocità costante. Determinare l'espressione della forza ed il lavoro compiuto quando il raggio della traiettoria si riduce da r_0 a r_1.

La forza è centrale ed essendo il suo momento rispetto ad O nullo, il momento angolare della massa si conserva:

$$L = mr_0^2\omega_0 = mr^2\omega.$$

Poiché il filo è trascinato con velocità costante, la forza è quella centripeta

$$F = m\omega^2 r,$$

che, tenendo conto dell'espressione del momento angolare, diventa

$$F = m\frac{r_0^4\omega_0^2}{r_0^3} = m\frac{r^4\omega^2}{r^3} = \frac{L^2}{m}\frac{1}{r^3}.$$

Il lavoro per ridurre il raggio della traiettoria da r_0 a r_1 è

$$\mathcal{L} = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}\right),$$

che si può scrivere

$$\mathcal{L} = \frac{L^2}{2m}\frac{1}{r_0^2}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}mv_0^2\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 - 1\right].$$

L'energia cinetica della massa è aumentata; si può dire che il momento angolare si comporta in maniera analoga ad una energia potenziale repulsiva. Per portare una particella in rotazione da una certa distanza a una distanza minore, deve essere compiuto lavoro esterno.

5. Una massa puntiforme m, legata all'estremo di un filo inestendibile di lunghezza l_0, si può muovere su un piano orizzontale privo di attrito. L'altro estremo del filo è fissato al bordo di un perno cilindrico fisso, di raggio R, ortogonale al piano del moto, figura 5. Alla massa è impressa una velocità iniziale v_0, ortogonale al filo che inizia ad avvolgersi attorno al perno. Determinare il momento angolare e la velocità della massa in funzione del tempo.

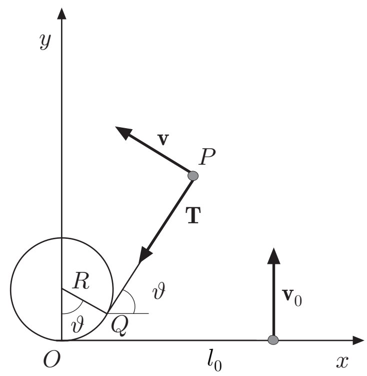

Fig. 9.5

Questo caso è diverso da quello dell'esempio precedente, anche se a prima vista potrebbe sembrare analogo. Infatti osserviamo subito che la forza applicata dal vincolo (perno) alla massa non passa per l'asse del perno. Il momento angolare rispetto a tale asse *non* si conserva. L'energia cinetica è però costante, poiché il vincolo non compie lavoro sul sistema filo massa. Pertanto

$$\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = cost, \quad \Rightarrow \quad \omega r = cost,$$

che dà per ogni valore di $r = |(P-O)|$ il corrispondente valore di ω. Il modulo della velocità è dunque costante nel tempo.

Discutiamo con qualche dettaglio il problema. La lunghezza del filo all'istante t è

$$l = l_0 - R\theta,$$

e, dalla figura, le coordinate di Q sono

$$x_Q = R\sin\theta, \qquad y_Q = R(1-\cos\theta).$$

Le coordinate di P, componenti del vettore $(P-O)$, sono date da

$$x = R\sin\theta + (l_0 - R\theta)\cos\theta$$
$$y = R(1-\cos\theta) + (l_0 - R\theta)\sin\theta;$$

da cui, derivando, si ottengono le componenti della velocità:

$$\dot{x} = -(l_0 - R\theta)\dot{\theta}\sin\theta$$
$$\dot{y} = (l_0 - R\theta)\dot{\theta}\cos\theta.$$

Poiché si conserva l'energia cinetica, il modulo della velocità all'istante t è uguale al modulo della velocità iniziale:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = (l_0 - R\theta)\dot{\theta} = v_0.$$

Integrando questa equazione, si ottiene $\theta(t)$:

$$\int_0^l (l_0 - R\theta)d\theta = \int_0^t v_0 dt, \quad \Rightarrow \quad l\theta - \frac{R}{2}\theta^2 = v_0 t.$$

Si ricava

$$\theta = \frac{l_0}{R} \pm \frac{1}{R}\sqrt{l_0^2 - 2Rv_0 t}.$$

dove va assunto il segno negativo perché devono essere soddisfatte le condizioni iniziali, ossia per $t = 0$, $\theta = 0$.

La tensione del filo varia nel tempo ed è uguale alla reazione del vincolo esercitata in Q; pertanto

$$T = ma_n = m\frac{v^2}{l} = \frac{v_0^2}{l_0 - R\theta}.$$

La tensione cresce ad diminuire di l o all'aumentare di θ, e può raggiungere un valore uguale al carico di rottura del filo.

Essendo il moto piano, il momento angolare è ortogonale al piano del moto e dipende ovviamente dalla scelta del polo. Assumendo come polo l'origine delle coordinate O, l'unica componente del momento angolare è quella lungo l'asse z, ortogonale al piano del moto:

$$L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Sostituendo le espressioni ricavate per x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$, si ottiene

$$L_z = m(l_0 - R\theta)\,\dot{\theta}\,(l_0 - R\theta + R\sin\theta) = mv_0(l_0 - R\theta + R\sin\theta).$$

Poiché il momento angolare iniziale, $\theta = 0$, è

$$L_0 = mv_0 l_0,$$

si deduce che il momento angolare è diminuito.

Ciò si può verificare anche per mezzo della (10); poiché la tensione è orientata sempre verso il centro di curvatura della traiettoria, il suo momento è opposto a $\mathbf{L}$, che deve diminuire ed ha quindi derivata temporale negativa. Analogamente diminuisce il momento angolare rispetto a Q; infatti, pur essendo il momento della tensione rispetto a Q nullo, questo polo non è fisso e per la (9) si ha

$$\frac{dL_z}{dt} = -mv_Q v_0.$$

Si conclude che in ogni caso non si ha conservazione del momento angolare.

4. Sistemi a massa variabile

La seconda legge della dinamica scritta nella forma

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

è stata applicata in tutti i casi in cui la massa si mantiene costante durante il moto. A parte gli effetti relativistici, che qui non prenderemo in esame, esistono casi in cui la massa varia per qualche motivo. Per esempio, un missile durante il moto consuma combustibile e subisce una continua diminuzione di massa. Una fune pesante posta al suolo, un estremo della quale venga sollevato, costituisce un altro esempio di sistema a massa variabile; man mano che la fune viene sollevata una massa sempre maggiore di fune partecipa al moto e la massa aumenta fino al valore della massa totale. In casi del genere, anziché considerare l'accelerazione, bisogna prendere in esame la variazione della quantità di moto e dunque scrivere

$$\mathbf{F} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v} + m\frac{d\mathbf{v}}{dt}, \tag{18}$$

la quale esprime chiaramente come la forza comprenda un termine relativo alla variazione dell'inerzia al moto ed un termine relativo alla variazione di velocità.

Esempi

6. *Moto di un razzo*

L'invenzione dei razzi è attribuita ai Cinesi e risale a circa 1500 anni fa; è certamente noto che l'espulsione dal razzo dei gas di combustione con velocità $\mathbf{v}$ ne provoca il moto in direzione opposta. Il razzo inizialmente è rifornito di combustibile che consuma gradualmente durante il moto, perciò la sua massa diminuisce.

Supponiamo che il razzo inizialmente si trovi in una regione dello spazio in cui non siano presenti forze esterne, per esempio nello spazio interplanetario, e che abbia una certa quantità di moto iniziale. Ad un certo istante viene acceso il motore ed i gas di combustione vengono espulsi, a ritmo costante, con velocità $\mathbf{v}$; figura 6. Poiché $\mathbf{F} = 0$, indicando con le lettere maiuscole le grandezze relative al razzo e con le minuscole quelle relative al gas, la (18) si scrive

$$\frac{d}{dt}(MV) + \frac{d}{dt}(mv) = 0, \tag{19}$$

dove le velocità sono riferite ad una terna inerziale.

Il primo termine, tenendo presente che la massa del razzo diminuisce col ritmo con cui il gas viene espulso $(-dm/dt)$, diventa

$$\frac{d}{dt}(MV) = \frac{dM}{dt}V + M\frac{dV}{dt} = -\frac{dm}{dt}V + M\frac{dV}{dt}. \tag{20}$$

Il secondo termine va considerato con maggiore dettaglio; la velocità v del gas è legata alla velocità V del razzo e alla velocità di espulsione v_e relativa al razzo, di solito costante, dalla relazione $v = V - v_e$, quindi

$$\frac{d}{dt}(mv) = \frac{dm}{dt}(V - v_e) + m\frac{dv}{dt}.$$

La derivata dm/dt è semplicemente la quantità, costante, di combustibile bruciata nell'unità di tempo; il secondo termine è nullo perché il gas, una volta lasciato il razzo, non cambia ulteriormente la sua velocità, pertanto

$$\frac{d}{dt}(mv) = \frac{dm}{dt}(V - v_e). \tag{21}$$

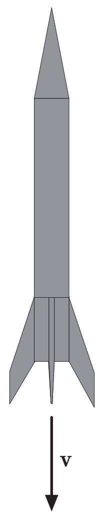

Fig. 9.6

Sostituendo le (20) e (21) nella (19) si ottiene

$$-\frac{dm}{dt}V + M\frac{dV}{dt} + \frac{dm}{dt}(V - v_e) = 0$$

da cui

$$M\frac{dV}{dt} = \frac{dm}{dt}v_e. \tag{22}$$

La precedente definisce la *spinta* del razzo, che dipende dalla massa di combustibile bruciata nell'unità di tempo e dalla velocità di espulsione.

Per ottenere la velocità finale del razzo basta tener presente, nella (22), che la quantità di gas espulso è uguale alla diminuzione di massa del razzo, $dm = -dM$, dunque

$$M\frac{dV}{dt} = -\frac{dM}{dt}v_e, \quad \Rightarrow \quad dV = -\frac{dM}{M}v_e.$$

Integrando:

$$\int_{V_0}^{V_f} dV = -v_e \int_{M_0}^{M_f} \frac{dM}{M},$$

si ottiene

$$V_f - V_0 = -v_e \ln\frac{M_f}{M_0}.$$

Quando il razzo è soggetto a forze esterne, la (22) diventa

$$M\frac{d\mathbf{V}}{dt} - \frac{dm}{dt}\mathbf{v}_e = \mathbf{F}$$

e, se si tratta di un razzo posto in verticale e soggetto all'azione della gravità, assumendo positiva l'orientazione verso l'alto:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{v_e}{M}\frac{dM}{dt} = -g;$$

moltiplicando per dt ed integrando

$$\int_{V_0}^{V} dV + v_e\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M} = -g\int_{t_0}^{t} dt;$$

si ottiene:

$$V - V_0 + v_e \ln \frac{M}{M_0} = -gt,$$

ovvero

$$V = V_0 + v_e \ln \frac{M_0}{M} - gt.$$

Se t_f è il tempo impiegato per bruciare tutto il combustibile, $V = V_f$ e $M = M_f$, velocità e massa sono quelle finali.

7. Un carrello di massa m_0 si muove con velocità v_0 costante su un binario rettilineo privo di attrito. All'istante $t = 0$ e nella posizione $x_0 = 0$ inizia a nevicare e la neve si deposita sul carrello al ritmo costante di $\lambda\, kg/s$. Determinare la posizione del carrello in funzione del tempo in assenza di forze, supponendo che la neve cada verticalmente e che la sua velocità sia trascurabile. Si determini inoltre la forza necessaria per mantenere costante la velocità iniziale del carrello.

Poiché

$$\frac{dm}{dt} = \lambda, \quad \Rightarrow \quad m = m_0 + \lambda t,$$

la (18) diventa

$$\lambda v + (m_0 + \lambda t)\frac{dv}{dt} = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda v = -(m_0 + \lambda t)\frac{dv}{dt}.$$

Separando le variabili:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\lambda}{m_0 + \lambda t}dt$$

e integrando

$$\ln v = -\ln(m_0 + \lambda t) + C_1.$$

La costante di integrazione, per le condizioni iniziali, è $C_1 = \ln m_0 v_0$, dunque

$$\ln v = -\ln(m_0 + \lambda t) + \ln m_0 v_0,$$

da cui

$$v = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \lambda t} = \frac{m_0 v_0}{m},$$

che esprime la conservazione della quantità di moto.

Lo spazio percorso si ottiene integrando l'espressione della velocità:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \lambda t},$$

che, separando le variabili, diventa

$$dx = m_0 v_0 \frac{dt}{m_0 + \lambda t}.$$

Integrando, si ottiene

$$x = \frac{m_0 v_0}{\lambda} \ln(m_0 + \lambda t) + C_1.$$

La costante di integrazione, per le condizioni iniziali, risulta $-m_0 v_0 \ln m_0/\lambda$, pertanto

$$x = \frac{m_0 v_0}{\lambda} \ln\left(\frac{m_0 + \lambda t}{m_0}\right).$$

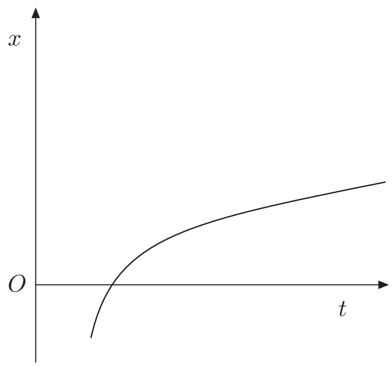

Fig. 9.7

La precedente, in funzione del tempo, ha un andamento logaritmico mostrato qualitativamente in figura 7. Per determinare la forza orizzontale necessaria affinché il carrello mantenga costante la velocità iniziale, basta osservare che nella (18) dev'essere $dv/dt = 0$, perciò

$$F = \frac{dm}{dt}v = \lambda v_0.$$

8. Determinare velocità e accelerazione del carrello dell'esempio precedente, supponendo di applicare una forza orizzontale costante F e che la velocità iniziale v_0 sia nulla. Per la (18) si ha

$$F = \lambda v + (m_0 + \lambda t)\frac{dv}{dt},$$

e separando le variabili:

$$\frac{dv}{F - \lambda v} = \frac{dt}{m_0 + \lambda t},$$

che integrata dà

$$-\frac{1}{\lambda} ln(F - \lambda v) = \frac{1}{\lambda}\ln(m_0 + \lambda t) + C.$$

La costante di integrazione va determinata tenendo conto delle condizioni iniziali; risulta

$$C = -\frac{1}{\lambda}\ln(m_0 F).$$

Sostituendo nella precedente e ricavando v, si ha

$$v = \frac{Ft}{m_0 + \lambda t}.$$

Derivando si ottiene

$$a = \frac{Fm_0}{(m_0 + \lambda t)^2}.$$

9. Una catena omogenea di lunghezza l e densità lineica λ, è appoggiata su un piano orizzontale, privo di attrito, con un tratto di lunghezza x_0 pendente lungo la verticale, figura 8. La catena è inizialmente in quiete; determinare il moto di caduta.

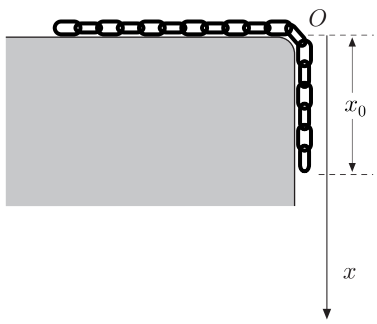

Fig. 9.8

Fissato come riferimento un asse verticale volto verso il basso, assumiamo come coordinata l'estremo libero x della catena. L'energia cinetica e l'energia potenziale sono

$$T = \frac{1}{2}\lambda l \dot{x}^2, \qquad U = -\int_0^x g\lambda x dx = -\frac{1}{2} g\lambda x^2,$$

dove si è assunta nulla l'energia potenziale per $x = 0$, superficie del piano, e si è indicato con λx la massa di catena che all'istante t, partecipa al moto.

Per la conservazione dell'energia meccanica si ha

$$\frac{1}{2}\lambda l\dot{x}^2 - \frac{1}{2} g\lambda x^2 = -\frac{1}{2} g\lambda x_0^2,$$

da cui si ottiene

$$\dot{x}^2 = \frac{g}{l}(x^2 - x_0^2).$$

Separando le variabili si ha l'equazione differenziale:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - x_0^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\, dt,$$

che integrata dà

$$\cosh^{-1}\frac{x}{x_0} = \sqrt{\frac{g}{l}}\, t + C.$$

La costante C nulla perché per $t = 0$, $\cosh^{-1} 1 = 0$. Pertanto

$$x(t) = x_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right).$$

La precedente esprime il moto fino all'istante τ in cui la catena abbandona il piano; dopo di che il moto avviene con accelerazione costante, g. Allo scopo di ricavare il tempo, per comodità, poniamo $\alpha = \sqrt{g/l}$; si ha

$$x = x_0\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}, \quad \Rightarrow \quad x_0 e^{2\alpha t} - 2xe^{\alpha t} + x_0 = 0,$$

$$e^{\alpha t}=\frac{x\pm\sqrt{x^2-x_0^2}}{x_0},\quad\Rightarrow\quad t=\sqrt{\frac{l}{g}}\ln\frac{x\pm\sqrt{x^2-x_0^2}}{x_0},$$

avendo escluso il segno negativo perché privo di significato. Per $x=l$ si ha

$$\tau=\sqrt{\frac{l}{g}}\ln\frac{l\pm\sqrt{l^2-x_0^2}}{x_0}.$$

La velocità della catena prima di lasciare il piano è

$$\dot{x}=v(t)=x_0\sqrt{\frac{g}{l}}\sinh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right).$$

All'istante in cui lascia il piano è

$$v(\tau)=x_0\sqrt{\frac{g}{l}}\sinh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,\tau\right)=x_0\sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{e^{\alpha\tau}-e^{-\alpha\tau}}{2}.$$

Poiché

$$e^{\alpha\tau}=\frac{l+\sqrt{l^2-x_0^2}}{x_0},$$

si ha

$$\begin{aligned}v(\tau)&=\frac{x_0}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\frac{l+\sqrt{l^2-x_0^2}}{x_0}-\frac{x_0}{l+\sqrt{l^2-x_0^2}}\right)\\&=\frac{x_0}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\frac{l+\sqrt{l^2-x_0^2}}{x_0}-\frac{l-\sqrt{l^2-x_0^2}}{x_0}\right)=\sqrt{\frac{g}{l}(l^2-x_0^2)}.\end{aligned}$$

L'accelerazione in funzione della lunghezza x, è data da

$$\ddot{x}=\frac{g}{l}x_0\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)=\frac{g}{l}x.$$

Quando la catena abbandona il piano, $x=l$, come s'è detto, l'accelerazione è quella di gravità.

10. Una cavo omogeneo pesante, di lunghezza $2l$, è posto a cavallo di un piolo liscio. Determinarne il moto di caduta, supponendo che il cavo inizialmente penda da una parte di una lunghezza $l+x_0$ e che inizi a scivolare con velocità iniziale nulla, figura 9.

Il problema è analogo al precedente. Indichiamo con x la lunghezza del tratto più lungo di cavo e assumiamo uguale a zero l'energia potenziale quando il cavo è in equilibrio, cioè i due capi sono alla stessa quota. Per la conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{1}{2}2l\lambda\dot{x}^2-\frac{1}{2}\lambda g(x-l)^2=-\frac{1}{2}\lambda g x_0^2.$$

$$\dot{x}^2=\frac{g}{l}[(x-l)^2-x_0^2].$$

Separando le variabili si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-l)^2-x_0^2}}=\sqrt{\frac{g}{l}}dt,$$

che integrata fornisce

$$x=l+x_0\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right).$$

Il moto è descritto dalla relazione precedente fino all'istante τ in cui $x=2l$. Successivamente il cavo abbandona il piolo con velocità v e cade con l'accelerazione di gravità. Come nell'esempio precedente, si ottiene:

$$\tau=\sqrt{\frac{l}{g}}\ln\frac{l+\sqrt{l^2-x_0^2}}{x_0},$$

$$v=\sqrt{\frac{g}{l}(l^2-x_0^2)}.$$

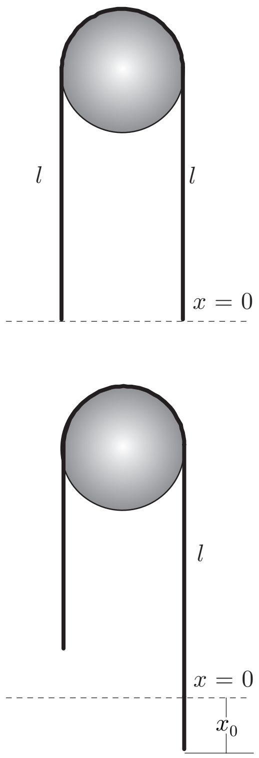

Fig. 9.9