8. Lavoro ed Energia

1. Lavoro

Si definisce lavoro elementare $d\mathcal{L}$ di una forza $\mathbf{F}$, agente su un punto materiale (particella), lo scalare

$$d\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt, \tag{1}$$

in cui $d\mathbf{r}$ è lo spostamento elementare del punto, $\mathbf{v}$ la sua velocità, figura 1. Il lavoro dipende dalla traiettoria l della particella e dal riferimento, essendo spostamento e velocità grandezze relative. Per la definizione di prodotto scalare si ha

$$d\mathcal{L} = F ds \cos\theta,$$

dove θ è l'angolo formato da $\mathbf{F}$ con $d\mathbf{r}$, e ds il modulo di quest'ultimo, ossia l'elemento d'arco della traiettoria. Evidentemente il lavoro elementare dipende da tale angolo ed è positivo o negativo se θ è minore di oppure maggiore di $\pi/2$; in particolare è nullo se $\theta = \pi/2$, supponendo, ovviamente, che né $\mathbf{F}$ né $d\mathbf{r}$ siano nulli. Il lavoro compiuto dalla forza nello spostamento finito lungo una traiettoria l che congiunge le posizioni iniziale A e finale B del punto è dato dall'integrale di linea

$$\mathcal{L} = \int_{A\,(l)}^{B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{2}$$

dove, in genere, la forza è funzione della posizione, del tempo e della velocità.

Nel caso in cui la forza sia vettorialmente costante il suo lavoro è uguale al prodotto scalare della forza per lo spostamento del punto; se inoltre la forza è concorde con lo spostamento il lavoro è uguale semplicemente al prodotto dell'intensità della forza per lo spostamento compiuto.

Esprimendo le (1) e (2) in forma cartesiana si ha

$$d\mathcal{L} = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \tag{3}$$

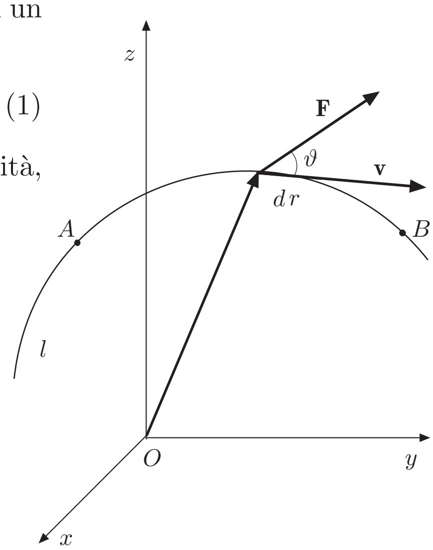

Fig. 8.1

e

$$\mathcal{L} = \int_{A,(l)}^{B} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \qquad (4)$$

In genere, l'integrale di linea (4) dipende dagli estremi A e B della traiettoria l che congiunge tali estremi e dalla traiettoria stessa.

L'unità di lavoro, nel SI, è il *joule* (J) definito come *il lavoro eseguito da una forza avente l'intensità di un newton, quando lo spostamento è concorde con essa ed ha la lunghezza di un metro.*

2. Potenza

Consideriamo una forza che, in generale, dipende dalla posizione del punto materiale, dalla sua velocità, e da altre grandezze variabili col tempo; il rapporto tra il lavoro elementare dato dalla (1) ed il tempo infinitesimo dt, definisce la potenza W al tempo t relativa alla forza $\mathbf{F}$ ed alla velocità $\mathbf{v}$:

$$W = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \qquad (5)$$

La potenza è una grandezza che misura la rapidità con cui viene compiuto lavoro; essa corrisponde quindi al concetto di potenza quale è inteso nel linguaggio ordinario, relativamente a motori e dispositivi atti a generare lavoro. Nel SI l'unità di misura è il *watt* (W), che corrisponde al lavoro di un J/s. Dalla (5) si deduce:

$$\mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} W dt.$$

Il lavoro compiuto nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ è uguale all'integrale della potenza esteso all'intervallo di tempo considerato. Ovviamente anche la potenza è una grandezza che dipende dal riferimento.

Per quanto si è detto, le forze si possono distinguere in motrici e resistenti, a seconda che l'angolo formato con lo spostamento elementare o con la velocità del punto materiale sia acuto oppure ottuso.

Esistono particolari forze la cui potenza è sempre nulla, perchè sono ortogonali alla velocità del punto; tali sono le forze di deviazione, come la forza di Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ che viene esercitata su una carica q in moto con velocità $\mathbf{v}$ in un campo magnetico $\mathbf{B}$, la forza di Coriolis, le forze vincolari esplicate da vincoli bilateri lisci. Queste forze si indicano come forze a potenza nulla. Inoltre una forza si dice dissipativa quando la sua potenza è negativa, come le forze di attrito o le forze di resistenza nel mezzo; infatti nel riferimento solidale col fluido la resistenza del mezzo ha sempre orientamento opposto alla velocità.

3. Teorema dell'energia cinetica

Il concetto di energia cinetica è legato a quello di lavoro e di potenza ora stabiliti. Consideriamo un punto materiale con velocità $\mathbf{v}$ e soggetto ad una forza $\mathbf{F}$; tenendo presente la legge fondamentale della dinamica,

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

e moltiplicando scalarmente per $\mathbf{v}$ ambo i membri, si ottiene:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{6}$$

Il primo membro è la potenza, il secondo membro si può scrivere

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right);$$

e sostituendo nella (6)

$$W = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right). \tag{7}$$

Nella (7) si è introdotta la grandezza

$$T = \frac{1}{2}mv^2,$$

che chiamiamo *energia cinetica*, dipendente dalla massa e dalla velocità del punto. L'energia cinetica si misura in *joule*. La (7) asserisce che: *la derivata rispetto al tempo dell'energia cinetica di un punto è uguale alla potenza della forza che ne determina il movimento*, ed esprime il teorema dell'energia cinetica nella prima forma.

Integrando ambo i membri della (7) in un certo intervallo di tempo, si ha

$$\int_{t_1}^{t_2} W dt = \int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = T_2 - T_1,$$

cioè

$$\mathcal{L} = \Delta T. \tag{8}$$

Il lavoro della forza che determina il moto, in un certo intervallo di tempo, è uguale alla variazione di energia cinetica del punto materiale nello stesso intervallo di tempo.

La (8) esprime il teorema dell'energia cinetica nella seconda forma. Dunque un aumento di energia cinetica di una particella esige lavoro, mentre una sua diminuzione ne fornisce; per esempio, se un grave viene lanciato con una certa velocità iniziale $\mathbf{v}_0$, esso assume una energia cinetica pari a $mv_0^2/2$, corrispondente al lavoro muscolare svolto oppure, se si tratta di un proiettile, all'energia chimica sprigionatasi nello sparo, che imprime al grave di massa

m la velocità $\mathbf{v}_0$. Quando il grave, dopo aver descritto la sua traiettoria tocca il terreno con velocità $\mathbf{v}_1$ e quindi si ferma, la sua energia cinetica passa dal valore $mv_1^2/2$ a zero; il grave fermandosi compie un lavoro esattamente uguale all'energia cinetica finale (perforazione del terreno, calore, onde acustiche, ecc..).

Esempi

1. *Lavoro di una forza costante*

Un pendolo semplice, costituito da una massa puntiforme sospesa ad un filo di lunghezza l, inestendibile e di massa trascurabile, viene abbandonato all'azione della gravità dalla posizione A, figura 2. Determinare il lavoro fatto dalle forze agenti quando il pendolo passa da A, corrispondente all'angolo φ_0, che il filo forma con la verticale, a B cui corrisponde $\varphi = 0$.

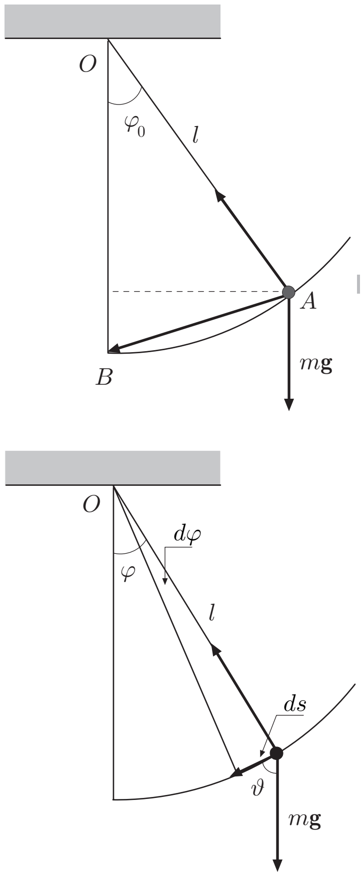

Fig. 8.2

Le forze agenti sono la forza vincolare ed il peso, delle quali la prima non compie lavoro essendo sempre ortogonale allo spostamento. La forza peso è costante e pertanto il lavoro è dato dal prodotto della forza per la proiezione dello spostamento nella direzione della forza. Tale proiezione, come indicato in figura, è h; quindi

$$\mathcal{L} = mgh.$$

Il calcolo esplicito del lavoro ovviamente dà lo stesso risultato; si ha

$$d\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F ds \cos\theta.$$

Assumendo come positivo il verso degli angoli crescenti, è

$$ds = -ld\varphi, \qquad \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi;$$

quindi:

$$d\mathcal{L} = F ds \cos\theta = -mgl \sin\varphi \, d\varphi.$$

Integrando,

$$\mathcal{L} = -mgl \int_{\varphi_0}^{0} \sin\varphi d\varphi = mgl(1 - \cos\varphi_0) = mgh.$$

2. *Lavoro di una forza elastica*

Un blocco di massa m e velocità $\mathbf{v}$ costante, si muove su un piano orizzontale privo di attrito. Esso urta contro l'estremo libero di una molla, di costante k, posta sulla sua traiettoria, figura 3. Trovare la massima compressione della molla in seguito all'urto.

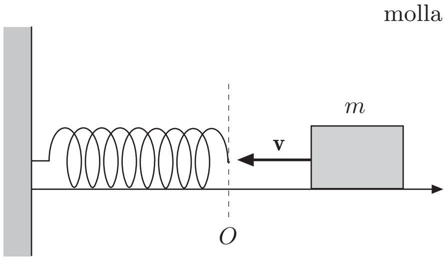

Fig. 8.3

Assumiamo, come in figura, l'asse x con origine nell'estremo libero della molla. L'energia cinetica iniziale del blocco è $T_1 = mv^2/2$, mentre quella finale, nel momento in cui la molla è compressa al massimo ed il blocco è fermo, è $T_2 = 0$. Pertanto la variazione di energia cinetica è

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -\frac{1}{2}mv^2;$$

d'altra parte, se la molla risulta compressa di $|x_1|$, il lavoro compiuto dalla forza elastica è

$$\mathcal{L} = \int_0^{-x_1} kxdx = -\frac{k^{\,2}}{x_{\,1}}.$$

Per il teorema dell'energia cinetica si ha

$$-\frac{1}{2}kx_1^2 = -\frac{1}{2}mv^2, \quad \Rightarrow \quad x_1 = v\sqrt{m/k}.$$

3. *Lavoro di una forza dipendente dal tempo*

Una particella di massa m, in un riferimento inerziale, è soggetta ad una forza che ha direzione costante e modulo che varia nel tempo secondo la relazione $F = F_0 e^{-\alpha t}$, con α coefficiente costante. Calcolare il lavoro della forza tra gli istanti $t = 0$ e $t = t_1$, supponendo che la velocità iniziale v_0 sia nulla.

La traiettoria è rettilinea nella direzione della forza, quindi

$$d\mathcal{L} = F dx = F v dt;$$

poiché l'accelerazione è

$$a = \frac{F_0}{m} e^{-\alpha t}, \quad \Rightarrow \quad v = \frac{F_0}{m} \int e^{-\alpha t} dt = -\frac{F_0}{\alpha m} e^{-\alpha t} + C,$$

dove, in base alla condizione iniziale: $t = 0$, $v_0 = 0$, la costante di integrazione risulta $C = F_0/(\alpha\, m)$. Si ha:

$$v = \frac{F_0}{\alpha\, m}\left(1 - e^{-\alpha t}\right).$$

Il lavoro elementare è

$$d\mathcal{L} = F v dt = \frac{F_0^2}{\alpha\, m} e^{-\alpha t}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) dt.$$

Integrando:

$$\mathcal{L} = \frac{F_0^2}{\alpha\, m} \int_0^{t_1} \left(e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}\right) dt = \frac{1}{2} m \left(\frac{F_0}{\alpha m}\right)^2 \left(1 - e^{-\alpha t_1}\right)^2.$$

Si ottiene lo stesso risultato in maniera più immediata, applicando il teorema dell'energia cinetica:

$$\mathcal{L} = T_1 - T_0 = \frac{1}{2} m v_1^2;$$

sostituendo l'espressione ottenuta per la velocità, si ha:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\frac{F_0}{\alpha m}\right)^2 \left(1 - e^{-\alpha t_1}\right)^2.$$

4. *Lavoro di una forza dissipativa*

Una particella di massa m è soggetta alla forza viscosa $\mathbf{F}_v = -b\mathbf{v}$, proporzionale alla velocità. Supponendo che per $t = 0$, la particella abbia velocità iniziale $\mathbf{v}_0$, determinare il lavoro della forza nell'intervallo di tempo $t = 0$ e $t_1 = m/b$.

Il lavoro è dato da

$$\mathcal{L} = -\int_A^B b\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -\int_0^{t_1} b v^2 dt.$$

Per determinare la velocità, essendo l'accelerazione $a = -bv/m$, occorre risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} v, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} dt.$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali assegnate, si ha

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} \int dt, \quad \Rightarrow \quad \ln v = -\frac{b}{m} t + \ln v_0;$$

da cui:

$$v = v_0 e^{-(b/m)t}.$$

Introducendo la precedente nell'espressione del lavoro si ha

$$\mathcal{L} = -b \int_0^{t_1} v_0^2 e^{-2(b/m)t} dt = \frac{1}{2} m v_0^2 \left[e^{-2(b/m)t}\right]_0^{t_1} = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(e^{-2} - 1\right).$$

Il lavoro della forza dissipativa, come c'era da aspettarsi, è negativo; per t tendente ad infinito l'energia dissipata è uguale all'energia cinetica iniziale.

4. Lavoro di una forza posizionale

Particolare importanza assume il caso in cui la forza sia posizionale, cioè dipenda solo dalle coordinate, ed il lavoro compiuto non dipenda dalla traiettoria l lungo cui viene calcolato, ma solo dalle posizioni A iniziale e B finale. In queste circostanze la forza si dice *conservativa* ed il campo di forza ad essa associato campo conservativo.

In generale, affinchè una forza sia conservativa è necessario, ma non sufficiente, che essa sia posizionale; non sono conservative le forze di deviazione, la forza di attrito e la resistenza nel mezzo che dipendono dalla velocità. Il carattere conservativo della forza dipende dal riferimento; se, infatti, in un certo riferimento la forza risulta conservativa, non risulterà tale in un riferimento in rotazione rispetto al primo dove, in generale, dipende dal tempo.

Esempi di forze conservative sono: una forza vettorialmente costante, come la forza di gravità, in una regione sufficientemente ristretta della superficie terrestre; le forze centrali, come la forza gravitazionale, le forze elastiche, il campo elettrico generato da una distribuzione di cariche, ecc... La circostanza fisica che il lavoro di una forza posizionale conservativa è indipendente dal percorso, matematicamente si traduce nel fatto che il lavoro elementare $d\mathcal{L}$ può essere espresso da un differenziale esatto:

$$d\mathcal{L} = F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz = d\Phi,$$

in cui si è evidenziato che $\mathbf{F}$ è funzione delle coordinate e $d\Phi$ è il differenziale totale di una grandezza scalare Φ, anch'essa funzione delle coordinate. Coordinate che possono essere cartesiane, polari o di qualsiasi altro genere. Ne discende che il lavoro della forza conservativa lungo un percorso chiuso qualsiasi è sempre nullo:

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{9}$$

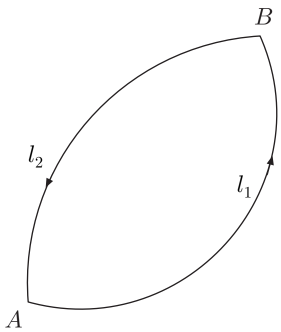

Fig. 8.4

Viceversa, si dimostra immediatamente che la precedente dà una condizione necessaria e sufficiente perché la forza sia conservativa. Consideriamo infatti, figura 4, il lavoro di una forza che verifica la (9), lungo un percorso chiuso che va da A a B lungo la linea l_1, e quindi da B ad A lungo la linea l_2; si ha

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{A(l_1)}^{B} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{B(l_2)}^{A} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0,$$

pertanto:

$$\int_{A(l_1)}^{B} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{B(l_2)}^{A} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

ed invertendo i limiti di integrazione nell'integrale al secondo membro:

$$\int_{A(l_1)}^{B} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{A(l_2)}^{B} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

Essendo i percorsi l_1 ed l_2 arbitrari, resta dimostrato che la forza è conservativa.

In maniera più rigorosa, osserviamo che la (9) non è altro che la circuitazione di $\mathbf{F}$; poiché essa è nulla, il campo è irrotazionale, paragrafo 7.3-VI, e pertanto $\nabla \times \mathbf{F} = 0$; ciò implica l'annullarsi delle componenti del rotore:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0. \tag{10}$$

Le equazioni (9) e (10), se la forza è una funzione regolare delle coordinate, costituiscono le condizioni necessarie e sufficienti perché il campo di forza sia conservativo.

Motivi che evidenziano un significato fisico più preciso inducono, come si comprenderà subito, ad introdurre una grandezza scalare funzione del punto, che chiamiamo energia potenziale, definita da

$$U = -\Phi$$

e tale che la sua variazione sia uguale al lavoro della forza conservativa cambiato di segno:

$$\Delta U = -\Delta \mathcal{L}.$$

Ciò significa che la variazione di energia potenziale del punto materiale viene determinata compiendo un lavoro esterno contro la forza del campo. Valga questa considerazione molto semplice: se un grave viene portato dal suolo ad una certa quota, si è compiuto un lavoro contro la forza di gravità; nello stesso tempo il grave ha acquistato energia potenziale che può, ritornando al suolo, restituire sotto varie forme (energia cinetica, calore, suono, ecc...). In termini differenziali scriviamo

$$dU = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz),$$

e siccome il differenziale totale di U, in coordinate cartesiane, è definito da

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz,$$

confrontando le due ultime relazioni, si ricava

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \tag{11}$$

che sono le componenti cartesiane della forza.

Si ha dunque:

$$U(B) - U(A) = -\int_A^B d\mathcal{L}. \tag{12}$$

La differenza tra i valori che l'energia potenziale assume in corrispondenza alle posizioni finale ed iniziale è uguale al lavoro della *forza conservativa cambiato di segno ed è indipendente dal percorso.*

Dalle (11) si trae che la forza può essere espressa da:

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right),$$

essendo **i**, **j**, **k** rispettivamente, i versori della terna cartesiana.

La precedente, in maniera più compatta si scrive:

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad}\, U = -\nabla U, \tag{13}$$

dove l'operatore gradiente, in coordinate cartesiane, è stato definito al paragrafo 7.4-VI.

Si coglie immediatamente il vantaggio importantissimo nel fatto che un campo di forze conservativo è completamente caratterizzato se è nota la funzione $U(x, y, z)$ in ogni punto del campo, come espresso dalla (13). Viceversa dato un campo conservativo, è possibile determinare l'energia potenziale mediante integrazione, operazione piuttosto semplice nel caso di problemi unidimensionali.

L'energia potenziale come funzione della posizione del punto materiale è data da

$$U(P) = -\int_{P_0}^{P} d\mathcal{L} + U(P_0), \tag{14}$$

dove la posizione P del punto è espressa da ogni genere di coordinate e $U(P_0)$ è l'energia potenziale in una posizione di riferimento opportunamente scelta. Un altro vantaggio dell'energia potenziale è il seguente: poiché vale il principio di sovrapposizione, se si prendono in considerazione più forze conservative di ugual natura, essendo la forza totale $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots$, si ha anche $U = U_1 + U_2 + \dots$. Con l'introduzione di tale funzione dunque, le operazioni vettoriali sui campi si riducono ad operazioni scalari, più semplici, sull'energia potenziale.

Tutti i punti del campo che hanno la stessa energia potenziale sono definiti dalla relazione

$$U(x, y, z) = cost, \tag{15}$$

dunque si trovano su una superficie che si chiama *superficie equipotenziale*. Se il punto materiale si muove su una di tali superfici, è sempre $dU = 0$; quindi:

$$dU = -d\mathcal{L} = |F ds \cos\theta| = 0;$$

ed essendo F e ds diversi da zero, dev'essere $\cos\theta = 0$. *La forza del campo è in ogni punto ortogonale alla superficie equipotenziale.*

Consideriamo ora spostamenti che non avvengono sulla superficie equipotenziale, figura 5; poniamo l'attenzione sulla linea di

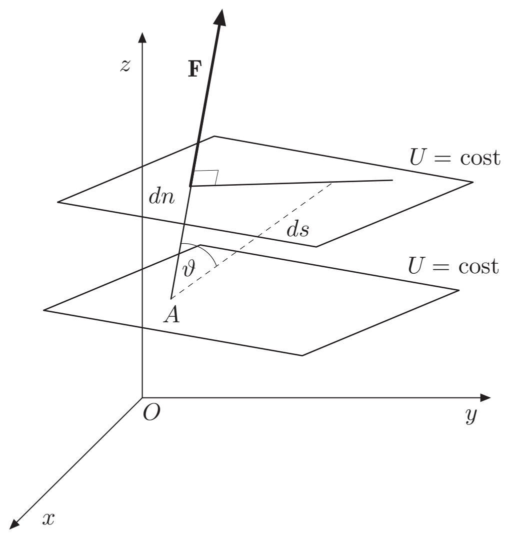

Fig. 8.5

forza che interseca ortogonalmente in A la superficie equipotenziale U_1 e fissiamo su essa come verso positivo quello concorde con $\mathbf{F}$. Per uno spostamento elementare dn lungo la linea di forza, nel verso positivo fissato, si ha

$$-dU = F dn > 0, \tag{16}$$

da cui

$$F = -\frac{dU}{dn}. \tag{17}$$

Ma, per definizione di gradiente, possiamo scrivere

$$\nabla U = \frac{dU}{dn}\hat{\mathbf{n}},$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale alla superficie equipotenziale. Dunque

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{dU}{dn}\hat{\mathbf{n}}. \tag{18}$$

Se consideriamo uno spostamento ds che non avviene lungo la linea di forza considerata, si ha

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dU}{dn}\frac{dn}{ds} = \frac{dU}{dn}\cos\theta.$$

Questa relazione è chiamata *derivata direzionale* lungo una direzione $\hat{\mathbf{u}}$ generica ed esprime il legame tra tale derivata e la derivata direzionale dU/dn secondo la normale alla superficie equipotenziale. Essendo $\cos\theta$ massimo per $\theta = 0$, si deduce che dU/dn è la derivata direzionale massima di U. Pertanto ∇U è un vettore ortogonale alla superficie equipotenziale, il cui modulo è uguale alla derivata direzionale massima di U.

Consideriamo ora la linea di forza che interseca nei punti A e B le superfici equipotenziali U_1 e U_2. Integrando la (16) si ha

$$U_A - U_B = \int_A^B F dn > 0, \quad \Rightarrow \quad U_A > U_B.$$

Ciò significa che la forza del campo è volta verso i punti di energia potenziale decrescenti. Se una particella si muove nel verso della linea di forza, procede nel verso delle energie potenziali decrescenti; in tal caso le forze del campo eseguono un lavoro positivo, quindi favoriscono il moto. Si deduce che, se un campo di forza ha linee di forza chiuse, sulle quali il verso è concorde lungo tutto il percorso, non può esistere energia potenziale; il campo non è conservativo e, come s'è detto, non è irrotazionale.

Definiamo inoltre *potenziale* l'energia potenziale per unità di massa o per unità di carica e la indichiamo col simbolo V. Questa grandezza, che gode di tutte le proprietà dell'energia potenziale, è particolarmente utile in Elettromagnetismo.

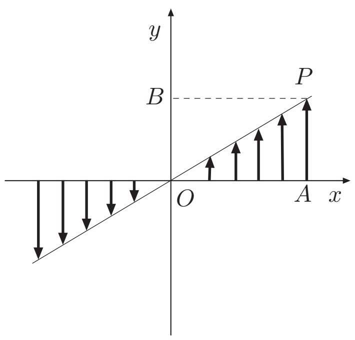

Fig. 8.6

Non tutte le forze posizionali sono conservative; ciò si verifica spesso in molti campi della Fisica anche se in meccanica tale eventualità è meno frequente. Consideriamo la forza posizionale

$$\mathbf{F} = Ax\mathbf{j},$$

in cui il modulo è proporzionale a x, la direzione è quella dell'asse y ed A è una costante, figura 6. Per mezzo delle (10) si verifica immediatamente che la forza non è conservativa; si può inoltre constatare che il lavoro dipende dalla traiettoria. Si considerino infatti i percorsi $l_1 = OAP$ e $l_2 = OBP$, indicati in figura, che congiungono l'origine col punto di coordinate $x = 1\,m$, $y = 1\,m$. Il lavoro lungo l_1 comprende il tratto orizzontale OA dove è nullo, ed il tratto AP dove è diverso da zero, quindi $\mathcal{L}_1 = A$; il lavoro lungo l_2 comprende il tratto OB ed il tratto BP; in entrambi i tratti il lavoro è nullo, $\mathcal{L}_2 = 0$. Si trova dunque che il lavoro dipende dal percorso, pertanto la forza non è conservativa.

Un altro esempio riguarda la *forza di betatrone.* È noto che una particella, con carica q e velocità $\mathbf{v}$, in un campo di induzione magnetica B, è soggetta alla forza di Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Essendo $\mathbf{F}\times\mathbf{v} = 0$, la forza è ortogonale in ogni punto alla traiettoria ed è a potenza nulla, quindi l'energia cinetica della particella non varia. Se in particolare $\mathbf{B}$ è costante ed ortogonale a $\mathbf{v}$, il moto è circolare uniforme; detto R il raggio della circonferenza e uguagliando i moduli della forza centripeta e della forza di Lorentz si ha

$$\frac{mv^2}{R} = qvB, \quad \Rightarrow \quad mv = qRB.$$

Nel caso che $\mathbf{B}$ sia variabile nel tempo, derivando la precedente:

$$\frac{d(mv)}{dt} = qR\frac{dB}{dt},$$

si trova una forza tangente alla traiettoria, proporzionale a dB/dt, che accelera la particella nella fase in cui questa derivata è crescente. Per i nostri scopi e senza entrare nei dettagli, possiamo schematizzare la forza con l'espressione

$$\mathbf{F} = F(R)\hat{\boldsymbol{\theta}},$$

dove $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ è il versore trasversale, ortogonale ad R, figura 7. Fissando la nostra attenzione su un certo valore di R, il lavoro della forza lungo la circonferenza di raggio R è

$$\mathcal{L} = F(R)2\pi R,$$

diverso da zero; la forza non è conservativa. Esaminiamo ora alcuni campi di forza.

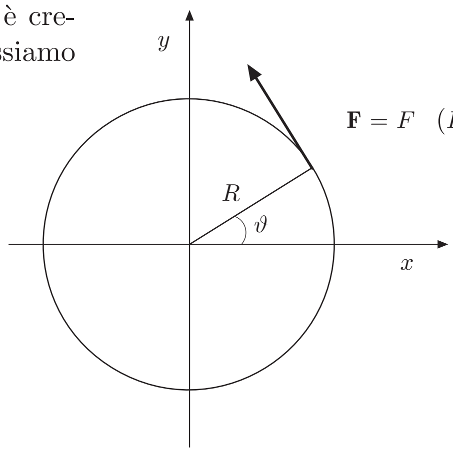

Fig. 8.7

4.1. Campo di forza uniforme

Un campo di forza si dice uniforme quando $\mathbf{F}$ è vettorialmente costante in tutti i punti del campo. Come si è detto, il campo della gravità $\mathbf{g}$ può ritenersi uniforme in uno spazio limitato della superficie terrestre; le linee verticali costituiscono le linee di forza, la forza peso è costante. Assumendo dunque come unico asse di riferimento, l'asse z volto lungo la verticale discendente, le linee di forza sono concordi con esso e l'unica componente di $\mathbf{F}$ o di $\mathbf{g}$ è diretta lungo z. Sono verificate immediatamente le (10); la forza è irrotazionale e quindi conservativa. Poiché

$$F = mg = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{dU}{dz}, \quad \Rightarrow \quad dU = -Fdz,$$

integrando, si ottiene l'energia potenziale:

$$U = -mgz + C, \tag{19}$$

con C costante di integrazione che dipende dal valore che assume U in corrispondenza ad una quota z_0 prefissata. Il grafico della (19) è mostrato in figura 8.

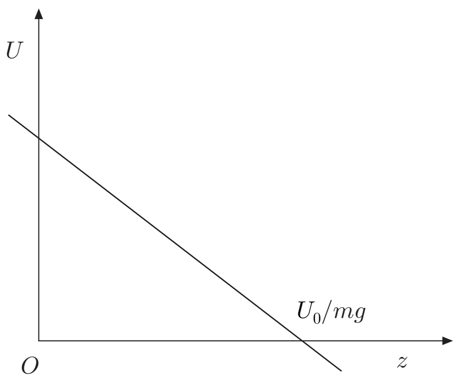

Fig. 8.8

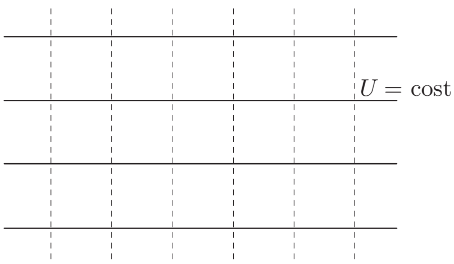

Fig. 8.9

In figura 9 sono mostrate le superfici equipotenziali del campo; esse hanno per equazione $U = cost$, cioè $z = cost$, pertanto sono piani orizzontali; le linee di forza (tratteggiate) sono verticali.

La variazione di energia potenziale è

$$\begin{aligned}\Delta U &= -\int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz)\\ &= -\int_{z_1}^{z_2} mg dz = -mg(z_2 - z_1).\end{aligned} \tag{20}$$

La proprietà conservativa della forza si può verificare anche esaminando se il lavoro dipende o meno dalla traiettoria. Poiché la forza è vettorialmente costante, il lavoro lungo un percorso l qualsiasi è dato dal prodotto del modulo della forza per la proiezione dello spostamento $\mathbf{s}$ nella direzione della forza, figura 10, perciò:

$$\mathcal{L} = mg(z_2 - z_1),$$

indipendente da l.

Più esplicitamente, il lavoro elementare

$$d\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F ds \cos\theta = F dz,$$

è palesemente indipendente dal percorso l; esso dipende solo dalla coordinata z.

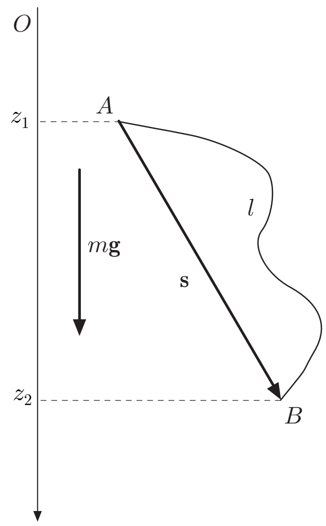

Fig. 8.10

Molte volte è più opportuno assumere l'orientazione dell'asse z verso l'alto; in tal caso le (19) e (20) cambiano di segno:

$$F = -mg = -\frac{dU}{dz},$$

da cui

$$U = mgz + C.$$

Se si conviene di assumere nulla l'energia potenziale per $z = 0$, allora la costante C è uguale a zero, dunque:

$$U = mgz. \tag{21}$$

La variazione di energia potenziale diventa

$$\Delta U = mg(z_2 - z_1) = mgh. \tag{22}$$

4.2. Campo di forze centrali

Un campo di forza si dice centrale se la forza definita nel generico punto P del campo è costantemente diretta lungo la retta che congiunge un punto fisso O, detto centro delle forze o polo, e il punto P ed è funzione solo della loro distanza r. La forza è attrattiva se ha verso opposto al vettore $\mathbf{r}$ che, a partire da O, individua il punto; repulsiva se ha verso concorde. Un campo siffatto è conservativo.

Consideriamo, figura 11, la forza $\mathbf{F}(r)$ nel riferimento cartesiano con origine nel polo O; poiché la forza è esclusivamente funzione di r, detti x/r, y/r, z/r i coseni direttori di $\mathbf{r}$, si ha

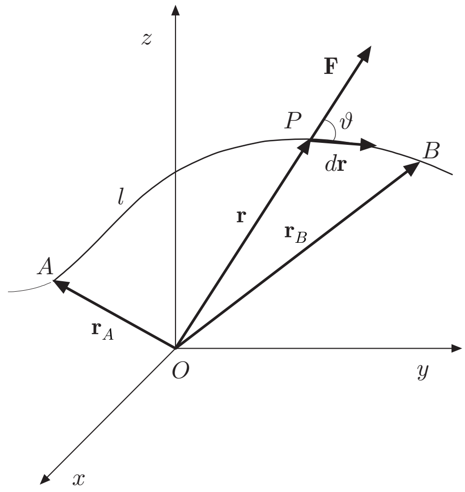

Fig. 8.11

$$F_x = F(r)\frac{x}{r}, \qquad F_y = F(r)\frac{y}{r}, \qquad F_z = F(r)\frac{z}{r},$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. La prima delle (10) impone

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}.$$

Per il primo membro si ha

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{rF'(r) - F(r)}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y}z,$$

per il secondo

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_y}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{rF'(r) - F(r)}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z}y.$$

Essendo

$$\frac{\partial r}{\partial y}z = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} yz;$$

e analogamente

$$\frac{\partial r}{\partial z}y = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} yz$$

l'uguaglianza risulta manifesta; nello stesso modo si possono verificare le altre due condizioni imposte dalla (10).

La proprietà conservativa della forza si può dedurre verificando, al solito, che il lavoro della forza è indipendente dalla traiettoria. Si dimostrerà che il moto di un punto materiale soggetto ad una forza centrale è piano. Supponendo che la forza sia attrattiva e giacente nel piano del moto, figura 12, osserviamo che il lavoro elementare

$$d\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F(r)ds\cos\theta = F(r)dr,$$

essendo dr la proiezione di dl secondo $\mathbf{r}$, è funzione solo di r, coordinata che caratterizza la forza. Il lavoro lungo una traiettoria generica dalla posizione iniziale A a quella finale B, si scrive

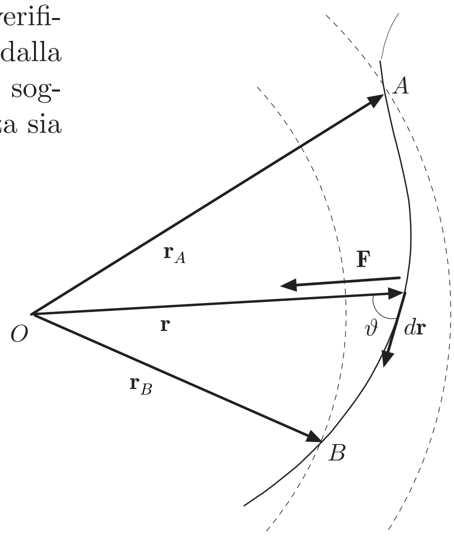

Fig. 8.12

$$\mathcal{L} = \int_A^B F(r)dr,$$

e dipende esclusivamente da r. Qualunque traiettoria può essere sostituita dal percorso radiale tra r_A e r_B. L'energia potenziale è

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} F(r)dr + U(r_0);$$

ovvero

$$U(r) = -\int F(r)dr + C, \qquad (21)$$

dove la costante C dipende dal valore che assume l'energia potenziale in un punto r_0 opportunamente scelto. Esaminiamo ora alcuni casi particolari.

Forza gravitazionale

Assegnata la forza gravitazionale

$$\mathbf{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

l'energia potenziale della massa m_1 nel campo creato dalla massa m_2 e viceversa, è data da

$$U(r) = -\int -G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = -G\frac{m_1 m_2}{r} + C.$$

La costante C è uguale a zero se si fa l'ipotesi che l'energia potenziale si annulli all'infinito. Tale ipotesi è confortata dal fatto che, essendo $U < 0$, il lavoro fatto contro le forze del campo, nello spostamento della massa m_1 da una certa posizione all'infinito è negativo; cioè la forza, attrattiva, ostacola tale spostamento. All'infinito, essendo nulla l'azione del campo, poiché esso decresce come $1/r^2$, il lavoro risulta nullo; pertanto

$$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}. \qquad (22)$$

Il grafico di $U(r)$, nell'ipotesi di masse puntiformi, è mostrato in figura 13. Le superfici equipotenziali sono sfere con centro nella massa attraente, le linee di forza raggi convergenti in essa, figura 14.

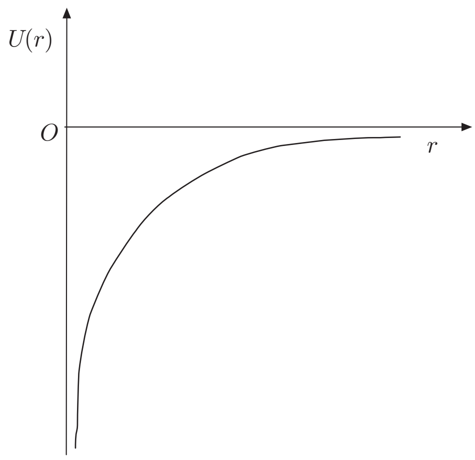

Fig. 8.13

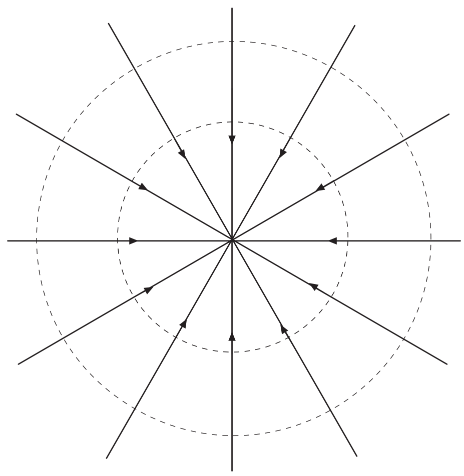

Fig. 8.14

Forza coulombiana

La forza coulombiana tra due cariche è data da

$$\mathbf{F} = \pm\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}};$$

essa è attrattiva $(-)$ o repulsiva $(+)$ se le cariche sono di segno opposto oppure dello stesso segno. L'espressione dell'energia potenziale è analoga a quella ottenuta per il campo gravitazionale.

Forza elastica

Una forza elastica è espressa dall'equazione

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r},$$

dove k è la costante elastica ed $\mathbf{r}$ il vettore che individua la posizione del punto materiale, rispetto al centro O della forza. La forza elastica è conservativa, come si verifica subito considerando le sue componenti cartesiane,

$$F_x = -kx, \qquad F_y = -ky, \qquad F_z = -kz,$$

e imponendo le (10).

L'oscillatore armonico unidimensionale è un esempio di punto materiale soggetto a forza elastica che, come abbiamo visto, può essere schematizzato mediante una massa puntiforme collegata all'estremo libero di una molla ideale. La molla, quando subisce una deformazione x lungo il suo asse, esercita una forza opposta $F = -kx$.

Essendo

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx, \quad \Rightarrow \quad dU = kxdx,$$

l'energia potenziale risulta:

$$U = \int dU = k\int xdx = \frac{1}{2}kx^2 + C.$$

La costante C è uguale a zero se si assume nulla l'energia potenziale per $x = 0$. Pertanto:

$$U = \frac{1}{2}kx^2. \tag{23}$$

Il grafico della (23), mostrato in figura 15, è una parabola con vertice nell'origine, definita per i valori x compresi tra i punti di inversione del moto ($-A \leq x \leq A$) ed è *tipica delle oscillazioni armoniche*.

La relazione

$$F = -\frac{dU}{dx},$$

come le (11) in generale, ha un significato geometrico ben preciso; infatti dU/dx dà il valore numerico della tangente alla curva nel punto generico, perciò rappresenta la forza cambiata di segno. In figura 15 la tangente è positiva in P, quindi la forza è negativa, volta verso il centro delle oscillazioni; in P' la tangente è negativa, la forza è positiva, ancora rivolta verso il centro delle oscillazioni. Per $x = 0$, vertice della parabola, la forza è nulla; questo punto rappresenta una posizione di equilibrio dell'oscillatore. In altri termini se una particella, soggetta a forza elastica, si trova in equilibrio nel centro delle oscillazioni, una volta spostata da tale posizione, esegue oscillazioni armoniche.

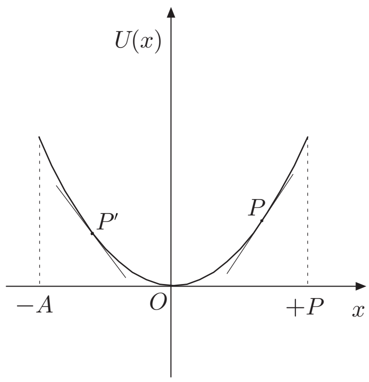

Fig. 8.15

5. Conservazione dell'energia

Si è stabilito che il lavoro di una forza è sempre uguale alla variazione dell'energia cinetica del punto materiale. Se la forza è posizionale e conservativa, il lavoro è uguale alla variazione di energia potenziale cambiata di segno, cioè

$$\mathcal{L} = -\Delta U = U_A - U_B.$$

Dalla (8) discende che

$$U_A - U_B = T_B - T_A,$$

ossia

$$T_A + U_A = T_B + U_B = E = cost, \tag{24}$$

In assenza di forze dissipative, al punto materiale, nel suo movimento, sono attribuite due forme di energia: l'energia cinetica T che dipende dalla velocità e l'energia potenziale U che dipende dalla posizione. La somma di queste due energie si chiama *energia totale o meccanica E.*

In virtù della (24), essendo i punti A e B arbitrari, questa energia non varia durante il movimento e *si conserva*, ossia è *una quantità costante indipendente dal tempo e dalla posizione*; se cresce l'energia cinetica di altrettanto diminuisce l'energia potenziale e viceversa. In altri termini, durante il moto del punto, l'energia cinetica si trasforma in energia potenziale e viceversa ma l'energia totale resta sempre costante. Si ha dunque la seguente legge di conservazione dell'energia meccanica:
l'energia totale di un punto materiale soggetto ad una forza conservativa si mantiene costante durante il moto.

La legge di conservazione dell'energia meccanica, insieme alle leggi di conservazione della quantità di moto e del momento angolare ha, in Fisica, una importanza straordinaria. Essa, come le altre citate, costituisce uno strumento molto potente per lo studio dei fenomeni fisici poiché le conclusioni che si ottengono sono molto più generali e indipendenti dalle equazioni del moto; perciò è possibile eliminare il tempo come variabile esplicita.

Tuttavia ciò non significa che le forze non conservative non rispettino la conservazione dell'energia nella sua formulazione più generale; in tal caso, nella (24) devono essere considerati altri termini che riguardano il lavoro di tali forze che, in genere, si traduce in dissipazione di energia sotto forma di calore, suono ecc. Inoltre, nel bilancio energetico, vanno considerati termini che rappresentano l'energia nelle sue varie forme: elettromagnetica, termica, chimica e così via.

Esempi

5. *Moto di un corpo soggetto all'azione della gravità*
a) Caduta libera

Il problema cinematico della caduta libera di un grave di massa m, in assenza di forze dissipative può essere risolto in maniera molto semplice per mezzo della legge di conservazione dell'energia, senza studiare i dettagli del moto e, in particolare, senza l'intervento della variabile tempo.

Consideriamo il grave fermo ad una altezza y dal suolo, figura 16; esso è caratterizzato da una energia potenziale U e da una energia cinetica $T = 0$; quindi la sua energia totale è

$$E = U + T = U = mgy.$$

Successivamente il grave viene abbandonato all'azione della gravità; alla quota y_0 la sua energia totale è

$$E = U_0 + T_0 = mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Essendo costante E, dalle due precedenti si ottiene

$$mgy = mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2. \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2g(y - y_0)} = \sqrt{2gh}.$$

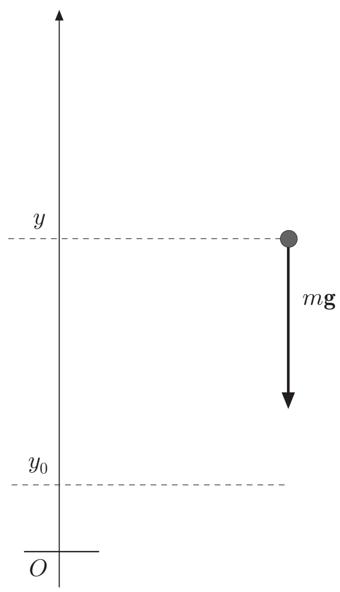

Fig. 8.16

In particolare y_0 può coincidere con la quota zero della superficie terrestre, dove di solito si assume nulla l'energia potenziale.

Lo stesso valore della velocità si ottiene se il grave viene lanciato con velocità v_0 dalla quota y_0 e raggiunge y con velocità nulla. I risultati sono identici a quelli ottenuti con considerazioni cinematiche, ma nel procedimento non sono intervenute le equazioni del moto.

b) Moto lungo un piano inclinato

Si consideri un grave, con velocità iniziale nulla, che scivola dalla sommità di un piano inclinato, privo di attrito. Il grave è soggetto alla forza peso e alla reazione vincolare; quest'ultima è ortogonale al piano perché privo di attrito, pertanto non compie lavoro. Se h è l'altezza del piano inclinato, alla sommità si ha $T = 0$, $U = mgh$; $E = T + U = mgh$. Alla base del piano, supponendo che si trovi alla superficie terrestre, dove si assume nulla l'energia potenziale, si ha $T = (mv^2)/2$, $U = 0$, pertanto:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Lo stesso risultato vale se, viceversa, il grave, con una certa velocità v iniziale, risale dalla base lungo il piano fino a raggiungere la sommità, con velocità nulla.

c) Pendolo semplice

Il lavoro delle forze agenti sul pendolo semplice è stato determinato nell'esempio 1. È ovvio che vale la legge di conservazione dell'energia: il pendolo inizialmente, viene abbandonato dalla posizione corrispondente all'angolo φ_0, dove possiede l'energia potenziale mgh_0, e raggiunge la posizione corrispondente a $\varphi = 0$, dove, assumendo che l'energia potenziale sia nulla, possiede energia cinetica massima. Essendo costante l'energia totale, si ha

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh_0, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh_0}.$$

Se il pendolo è in una posizione corrispondente all'angolo φ generico, figura 17, la conservazione dell'energia meccanica impone

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = mgh_0,$$

da cui:

$$v = \sqrt{2g(h_0 - h)} = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}.$$

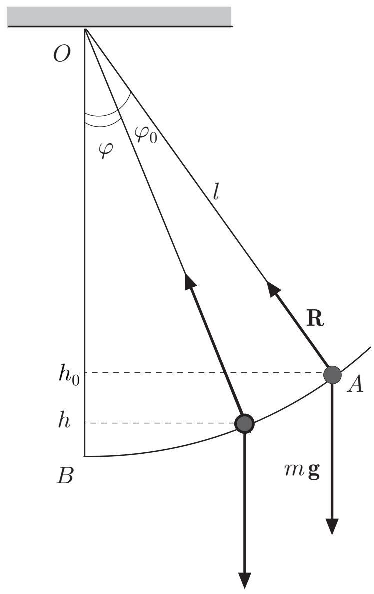

Fig. 8.17

5.1. Energia totale dell'oscillatore armonico

L'energia totale dell'oscillatore armonico,

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

deve essere costante, indipendente dal tempo e dalla posizione x. Per determinare il valore di E basta tener presente che l'equazione oraria e la velocità dell'oscillatore sono date da

$$x = A\sin(\omega t + \varphi), \qquad \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi),$$

e sostituendo nella precedente:

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi);$$

ma, $k = m\omega^2$; pertanto:

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2[\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)] = \frac{1}{2}mA^2\omega^2,$$

che è la velocità massima con cui l'oscillatore transita nell'origine.

Si ha anche

$$E = \frac{1}{2}kA^2,$$

energia potenziale massima che l'oscillatore possiede nel punto di massima elongazione; pertanto:

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

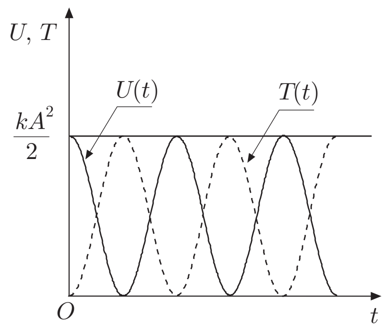

Fig. 8.18

L'andamento nel tempo di T ed U sono mostrate in figura 18; si osservi che la loro somma è sempre costante ed uguale all'energia totale, indipendente dal tempo.

L'energia totale è altresì indipendente da x; infatti

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = T + \frac{1}{2}kx^2,$$

da cui si ottiene l'energia cinetica in funzione di x:

$$T = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

Il grafico di questa funzione è una parabola ad asse verticale, concavità rivolta verso il basso e vertice sull'asse delle ordinate nel punto $kA^2/2$. Dalla figura 19, in cui sono riportate T ed U, si osserva che la loro somma è sempre costante, uguale all'energia totale, indipendente da x.

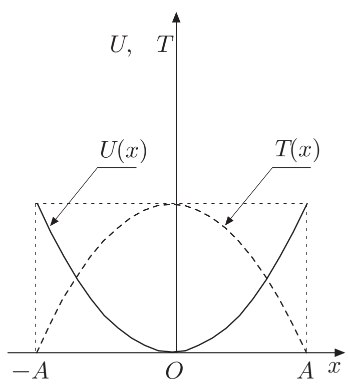

Fig. 8.19

Eseguendo la media dell'energia potenziale in un periodo T, simbolo da non confondere con l'energia cinetica, si ottiene l'energia potenziale media:

$$\overline{U(t)} = \frac{1}{2}kA^2\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi)dt.$$

Per risolvere l'integrale, posto $\omega t + \varphi = x$, si ottiene:

$$\frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{\omega}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{\omega};$$

pertanto

$$\overline{U(t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}kA^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m\omega^2A^2\right). \tag{25}$$

L'energia potenziale media è uguale a metà dell'energia potenziale massima o dell'energia cinetica massima. La stessa conclusione vale per l'energia cinetica media.

5.2. Energia di un oscillatore quasi armonico

Consideriamo, paragrafo 2.3-IV, l'oscillazione che si ottiene sovrapponendo due moti armonici di ampiezze A_1 e A_2 e frequenze ν_1, ν_2, diverse. Posto $\overline{\omega} = (\omega_2 + \omega_1)/2$ e $\omega_m = (\omega_2 - \omega_1)/2$, l'oscillazione, formula (10)-IV, ha ampiezza:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos 2\omega_m t}.$$

Pertanto l'energia totale dell'oscillatore è data da

$$E = \frac{1}{2}m\overline{\omega}^2A^2 = \frac{1}{2}m\overline{\omega}^2(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos 2\omega_m t).$$

Nel caso che le ampiezze siano uguali:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\overline{\omega}^2A^2 = \frac{1}{2}m\overline{\omega}^2(2A_1^2 + 2A_1^2\cos 2\omega_m t) \\ &= 2m\overline{\omega}^2A_1^2\frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega_m t) = 2m\overline{\omega}^2A_1^2\cos^2\omega_m t. \end{aligned} \tag{26}$$

Ciò è conforme al fatto che l'oscillazione risultante è data dalla formula:

$$x = x_1 + x_2 = A_1(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = 2A_1\cos\omega_m t\cos\overline{\omega}t,$$

alla quale si può attribuire una ampiezza, funzione del tempo,

$$A = 2A_1\cos\omega_m t.$$

Esempi

6. Una particella di massa m è vincolata a muoversi senza attrito su una guida circolare di raggio R, giacente in un piano verticale come in figura 20. Scelto un sistema di coordinate x-y, con origine nel punto O più basso della guida, determinare l'energia potenziale della particella in funzione di x nel caso che sia $x \ll R$, ed il periodo delle piccole oscillazioni intorno ad O.

Questo problema è analogo a quello del pendolo semplice; la diversità consiste nel modo di realizzare il vincolo che però impone, in entrambi i casi, una traiettoria circolare.

Le forze che agiscono sulla particella sono il peso e la reazione vincolare; quest'ultima, essendo il vincolo liscio, è ortogonale alla traiettoria e non compie lavoro. L'energia potenziale della particella alla quota y è dunque

$$U = mgy.$$

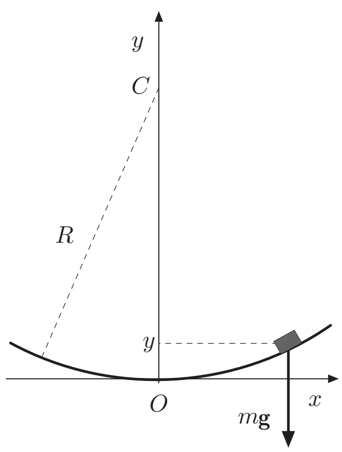

Fig. 8.20

Poiché vogliamo ottenere l'energia potenziale in funzione di x, occorre fare uso dell'equazione del vincolo che è la circonferenza con centro O, di coordinate $x = 0$ e $y = R$, quindi per una generica posizione (x, y) della particella si ha:

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2, \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2Ry + x^2 = 0;$$

da cui

$$y = R \pm \sqrt{R^2 - x^2} = R\left(1 \pm \sqrt{1 - (x/R)^2}\right).$$

Scegliendo nell'espressione ottenuta il segno negativo, il segno positivo porterebbe, per $x \ll R$, al risultato $y \approx 2R$, privo di significato, e sviluppando in serie di potenze la radice, si ottiene

$$y = R\left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2R^2} - \frac{x^4}{8R^4} - \cdots\right)\right] = \frac{x^2}{2R}\left(1 + \frac{x^2}{4R^2} + \cdots\right).$$

Trascurando i termini di ordine superiore ad x^2, si ha

$$y \approx \frac{x^2}{2R};$$

ne segue che l'energia potenziale della particella diventa

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{R}\right)x^2,$$

che è del tipo armonico. Al termine mg/R si riconosce il ruolo della costante k; si conclude che, per le condizioni imposte, essendo y molto piccolo rispetto ad R, si può ritenere il moto come armonico sull'asse x. Infine essendo $k = m\omega^2$, come per il pendolo semplice, il periodo delle piccole oscillazioni è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}},$$

dove il raggio R della guida equivale alla lunghezza del pendolo.

7. Un blocchetto di massa m e velocità iniziale nulla scivola lungo la guida $ABCD$, giacente su un piano verticale, la cui parte BCD è circolare di raggio R, figura 21. In assenza di attrito, determinare la minima quota h dalla quale deve essere abbandonato il blocchetto affinché raggiunga il punto più alto C della circonferenza, senza distaccarsene.

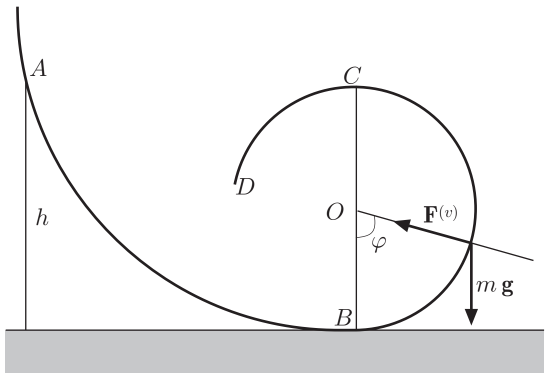

Fig. 8.21

Le forze alle quali è soggetto il blocchetto sono il peso $m\mathbf{g}$ e la reazione vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$; quest'ultima, essendo il vincolo privo di attrito, è sempre ad esso ortogonale e non compie lavoro. Affinché il blocchetto non si distacchi dalla guida deve transitare in C con una velocità tale che $\mathbf{F}^{(v)} \geq 0$.

La reazione vincolare in un punto generico della circonferenza si ottiene proiettando nella direzione centripeta le forze agenti sul blocchetto. Fissando in B l'origine degli archi, si ha

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}^{(v)} = m\mathbf{a},$$

che proiettata sul raggio, assumendo positivo il verso centripeto, dà

$$F^{(v)} - mg\cos\varphi = m\frac{v^2}{R}.$$

Poiché si vuole determinare l'altezza minima, in C è $F^{(v)} = 0$ ed essendo $\cos\varphi = \cos\pi = -1$, si ha

$$m\frac{v_0^2}{R} = mg, \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = gR.$$

Infine, per la legge di conservazione dell'energia, si ottiene

$$mgh = 2mgR + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{5}{2}mgR, \qquad h = \frac{5}{2}R.$$

8. Una particella si trova in equilibrio, nel punto A più alto di una guida circolare liscia di raggio R, disposta in un piano verticale. Una piccola perturbazione fa scivolare la particella lungo la guida dalla quale se ne distacca in un punto P, figura 22. Determinare la posizione di tale punto.

Le forze che agiscono sulla particella sono la reazione vincolare, ortogonale alla guida perché liscia, ed il peso. Durante il moto sulla guida la seconda equazione della dinamica si scrive

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}^{(v)} = m\mathbf{a}.$$

Al distacco $F^{(v)} = 0$ e proiettando nella direzione centripeta si ha

$$mg\cos\varphi = m\frac{v^2}{R}.$$

Indicando con h la differenza di quota tra A e P, $h = R(1 - \cos\varphi)$, per la conservazione dell'energia meccanica, possiamo scrivere

$$mgR(1 - \cos\varphi) = \frac{1}{2}mv^2, \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gR(1 - \cos\varphi),$$

che sostituita nella precedente permette di ricavare

$$\cos\varphi = \frac{2}{3}.$$

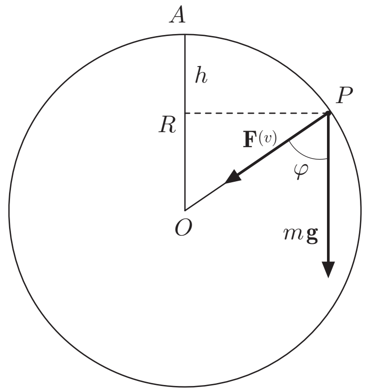

Fig. 8.22

9. Determinare la velocità iniziale necessaria da imprimere ad un grave che si trova sulla superficie terrestre, affinché possa sfuggire all'attrazione gravitazionale (velocità di fuga).

L'energia totale di un grave che ha velocità v, nel campo gravitazionale è

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T},$$

dove M_T ed R_T sono rispettivamente la massa e il raggio della terra.

Supponiamo che il grave raggiunga con velocità nulla una distanza infinita dalla terra, dove l'energia potenziale è zero; allora l'energia totale E dev'essere nulla e tale deve rimanere per la legge di conservazione dell'energia; pertanto:

$$\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{M_T m}{R_T}, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}.$$

Essendo, alla superficie della terra $g = GM_T/R_T^2$, si ottiene

$$v_{min} = \sqrt{2gR_T}.$$

6. Lavoro delle forze non conservative

Oltre ad alcune categorie di forze posizionali, esistono forze che dipendono da grandezze diverse dalla posizione come, per esempio, la resistenza viscosa e la resistenza idraulica; queste forze non sono conservative. Infatti, il lavoro eseguito dalla forza, quando la particella si sposta dalla posizione iniziale A a quella finale B, dipende dalla velocità e non può essere espresso come funzione della posizione; pertanto non è possibile definire l'energia potenziale.

Anche la forza di attrito cinetico non è conservativa anche se, in prima approssimazione, il suo modulo non dipende dalla velocità; la sua direzione, infatti, è sempre opposta al moto. Si capisce facilmente che il lavoro delle forze non conservative è sempre negativo, dipende dal percorso ed, in particolare, è diverso da zero lungo un percorso chiuso.

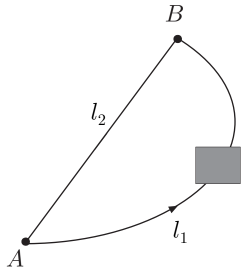

Fig. 8.23

Consideriamo, figura 23, un corpo poggiato su una superficie orizzontale scabra; supponendo che la forza di attrito sia costante in modulo, spostiamo il corpo dalla posizione A alla posizione B, lungo la traiettoria l_1. Essendo la forza d'attrito parallela in ogni punto allo spostamento elementare, il lavoro compiuto è

$$\mathcal{L}_{(1)} = -\int_A^B F_A ds_1 = F_A l_1.$$

Analogamente, spostando il corpo da A a B, lungo la traiettoria l_2, il lavoro sarà

$$\mathcal{L}_{(2)} = -\int_A^B F_A ds_2 = F_A l_2.$$

Poichè si è supposto F_A costante, i lavori lungo le due traiettorie sono diversi e la forza non è conservativa.

Analogo ragionamento si può fare a proposito della resistenza viscosa o della resistenza idraulica. Ad esempio, consideriamo un natante soggetto a resistenza idraulica del tipo $\mathbf{F} = -\kappa_i v^2 \hat{\mathbf{v}}$ e supponiamo che segua una rotta rettilinea di lunghezza l. Il lavoro compiuto dalla forza di resistenza è

$$\mathcal{L} = -\kappa_i v^2 l,$$

che, fissato il percorso l, dipende chiaramente dalla velocità. Altra forza non conservativa è la forza muscolare che si esplica su un corpo mediante trazioni o compressioni.

Si supponga che sul punto materiale agiscano forze conservative e non conservative. Il teorema dell'energia cinetica permette di asserire che il lavoro di tutte le forze, conservative $L^{(c)}$ e non conservative $L^{(nc)}$, è uguale alla variazione di energia cinetica del punto:

$$\mathcal{L}^{(c)} + L^{(nc)} = T_B - T_A.$$

Poichè il lavoro delle forze conservative è

$$\mathcal{L}^{(c)} = U_A - U_B,$$

sostituendo nella precedente si ha

$$U_A - U_B + \mathcal{L}^{(nc)} = T_B - T_A,$$

da cui:

$$\mathcal{L}^{(nc)} = (U_B + T_B) - (U_A + T_A) = \Delta E, \qquad (27)$$

Come prevedibile, il lavoro delle forze non conservative è uguale alla variazione dell'energia totale.

Esempi

10. Un corpo viene spinto dalla base di un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale, con una velocità iniziale v_0. Assegnato il coefficiente di attrito cinetico μ_c, determinare la massima quota h raggiunta.

Siamo in presenza di forze non conservative, forza d'attrito, il cui lavoro è sempre negativo; tale lavoro, indicando con l la lunghezza del piano inclinato, è

$$\mathcal{L}^{(nc)} = -mgl\mu_c \cos\theta = -mg\mu_c h \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Per la (27) possiamo scrivere:

$$-mg\mu_c h \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = mgh - \frac{1}{2}mv_0^2,$$

da cui:

$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 - \mu_c \cos\theta/\sin\theta)}.$$

11. Un blocchetto di massa m è vincolato a muoversi su una guida costituita da un arco di circonferenza di raggio R, disposta in un piano verticale, figura 24. Il blocchetto è abbandonato con velocità iniziale nulla da una posizione A, ad una quota h_0 rispetto al punto più basso della guida, e raggiunge la posizione B, di inversione del moto, ad una quota $h < h_0$. Determinare il modulo F_A della forza di attrito, supposto costante, e la velocità massima del blocchetto.

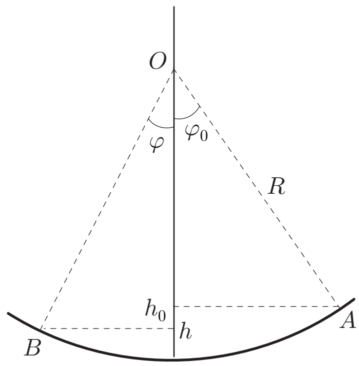

Fig. 8.24

Considerando la figura, per la (27) si ha

$$-F_A R(\varphi_0 + \varphi) = mgh - mgh_0,$$

da cui

$$F_A = \frac{mg(h_0 - h)}{R(\varphi_0 + \varphi)} = \frac{mg(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}{\varphi + \varphi_0}.$$

La velocità massima si ha in corrispondenza al punto più basso della guida; ancora per la (27), è

$$-F_A R\varphi_0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgh_0,$$

da cui

$$v = \left[2gh_0 - 2\frac{F_A}{m}R\varphi_0\right]^{1/2} = \left[2gR(1 - \cos\varphi_0) - 2\frac{F_A}{m}R\varphi_0\right]^{1/2}.$$

7. Studio dell'energia potenziale in una dimensione

Lo studio dell'andamento dell'energia potenziale in una dimensione è particolarmente semplice ma conduce a risultati generali di importanza fondamentale. Esemplificando, consideriamo l'energia potenziale di una particella, espressa da una relazione del tipo:

$$U(x) = x^2(1 + x)^2,$$

il cui andamento, come si può facilmente verificare, è mostrato in

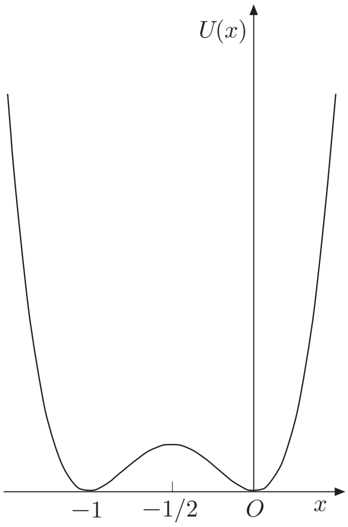

Fig. 8.25

figura 25. La curva è regolare e sempre positiva; i punti in cui la forza si annulla sono dati dai valori di x che annullano la derivata dU/dx; ossia dai valori: $x_1 = 0$, $x_2 = -1/2$, $x_3 = -1$. Geometricamente, significa che in questi punti la curva ha tangente orizzontale, in corrispondenza ai valori di massimo, $d^2U/dx^2 < 0$, e di minimo, $d^2U/dx^2 > 0$. I minimi corrispondenti a $x_1 = 0$, $x_3 = -1$, rappresentano punti di equilibrio stabile; se la particella viene spostata leggermente a destra o a sinistra da tali punti, tende a ritornavi. Il massimo corrispondente a $x_2 = -1/2$, rappresenta un punto di equilibrio instabile poiché, se la particella viene spostata leggermente verso destra è soggetta ad una forza positiva che tende a portarla nel punto $x_1 = 0$, mentre se viene spostata leggermente verso sinistra, la forza è negativa e tende a portarla nel punto $x_3 = -1$. Ancora: a destra del primo, la forza agente sulla particella è negativa, mentre a sinistra del secondo è positiva. In assenza di forze dissipative, come abbiamo supposto, l'energia totale $E = T + U$ si conserva e se la particella possiede una energia totale E_1, oscillerà tra certe posizioni x_A ed x_B, punti di inversione del moto, con velocità data da

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 + U(x), \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2}{m}[E_1 - U(x)]}.$$

Le oscillazioni evidentemente non sono armoniche poiché l'energia potenziale non ha andamento parabolico.

Tuttavia possiamo chiederci sotto quali condizioni le oscillazioni si possono assumere come armoniche. Intuitivamente, se nell'intorno di un minimo fissiamo un intervallo δx, sufficientemente piccolo, possiamo ritenere che la curva, in quell'intorno, si adatti ad un arco di parabola; pertanto le piccole oscillazioni possono essere considerate armoniche.

In generale, prendiamo in esame l'energia potenziale di una particella che presenta un minimo in corrispondenza a $x = x_0$, figura 26. Se l'energia totale è E_1, la particella è *legata*, ovvero si trova in una *buca di potenziale*, e nel suo moto non può oltrepassare i punti x_A ed x_B, punti di inversione del moto; le oscillazioni, in genere, non sono armoniche.

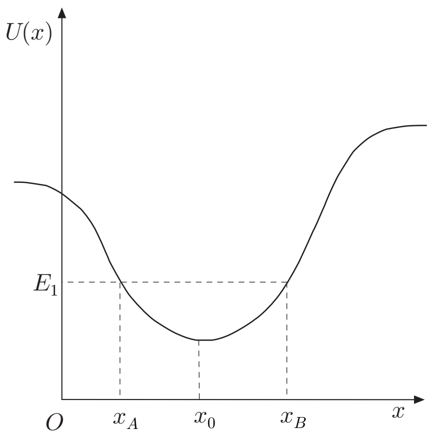

Fig. 8.26

Come è noto dall'Analisi, una funzione regolare e derivabile nell'intorno di un punto x_0, può essere espressa mediante uno sviluppo in serie di Taylor; pertanto l'energia potenziale sarà:

$$U(x) = U(x_0) + \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_0} \delta x + \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0} \frac{(\delta x)^2}{2!} + \cdots,$$

dove $\delta x = x - x_0$. Pertanto, se x_0 è il punto di equilibrio

$(dU/dx)_{x_0} = 0$, si ha

$$U(x) = U(x_0) + \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0} \frac{(\delta x)^2}{2!} + \cdots$$

Scegliendo l'intervallo δx sufficientemente piccolo è lecito trascurare, nella precedente i termini di ordine superiore al secondo; inoltre il fattore $(d^2U/dx^2)_{x_0}$, nel minimo, è una costante positiva che indichiamo con k; dunque si ottiene

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2,$$

che è l'energia potenziale di un oscillatore armonico, al quale è attribuito un certo valore $U(x_0)$ di riferimento dell'energia potenziale.

Nel caso si consideri un intorno di $x_0 = 0$, la funzione può essere approssimata con uno sviluppo in serie di MacLaurin; l'energia potenziale si scrive

$$U(x) = U(0) + \left(\frac{dU}{dx}\right)_0 + \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

Ritorniamo all'energia potenziale considerata prima; sviluppando in serie di potenze e tenendo conto che $U(0) = 0$, $(dU/dx)_0 = 0$, si ha

$$U(x) = x^2 + 2x^3 + \cdots$$

Limitandoci a piccoli valori di x, tali da potere trascurare le potenze superiori alla seconda, la precedente si può approssimare a

$$U(x) = x^2,$$

che è una parabola ad asse verticale e vertice nell'origine, le oscillazioni sono armoniche, di costante $k = 2$. Lo stesso procedimento si può adottare nell'altro punto di minimo.

7.1. Energia di mutua interazione tra due particelle

L'energia potenziale di interazione tra due particelle, siano esse due molecole o due atomi di una molecola, è descritta molto bene dall'espressione

$$U(r) = U_0 \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6\right], \qquad (28)$$

dove r è la mutua distanza tra le particelle ed r_0 la distanza di equilibrio. Il grafico della (28), nota come potenziale di Lennard-Jones è mostrato in figura 27; U_0 ed r_0 dipendono dalla struttura delle molecole interagenti.

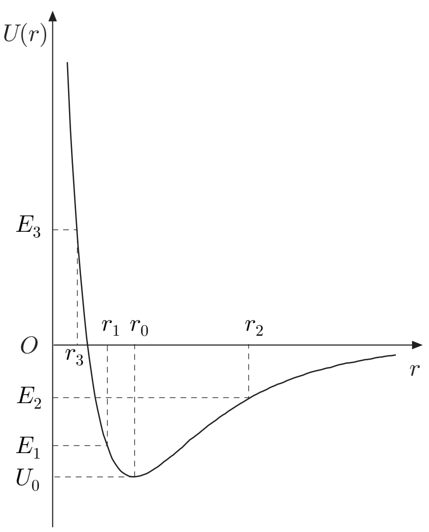

Fig. 8.27

Nel punto r_0 si ha un minimo dell'energia potenziale, poiché la derivata

$$\frac{dU}{dr} = U_0 \left[12\frac{r_0^6}{r^7} - 12\frac{r_0^{12}}{r^{13}} \right]$$

si annulla per $r = r_0$. Questo punto corrisponde alla distanza di equilibrio delle molecole dove $F = -dU/dr = 0$. A sinistra di r_0 la forza è repulsiva e cresce molto rapidamente al diminuire di r (derivata negativa, forza positiva). A destra la forza è attrattiva e diminuisce al crescere di r (derivata positiva, forza negativa).

Supponiamo, come è indicato in figura, che l'energia totale sia E_1; le molecole oscilleranno intorno alla posizione di equilibrio come due masse collegate ad una molla. Siccome gli spostamenti sono piccoli e la curva, nell'intorno di r_0, può essere approssimata ad un arco di parabola, le oscillazioni possono essere ritenute armoniche.

La derivata seconda della (28) è

$$\frac{d^2U}{dr^2} = U_0 \left[156\frac{r_0^{12}}{r^{14}} - 84\frac{r_0^6}{r^8} \right],$$

che per $r = r_0$ dà

$$\left(\frac{d^2U}{dr^2} \right)_{r=r_0} = 72\frac{U_0}{r_0^2}.$$

Pertanto $k = 72U_0/r_0^2$ e le oscillazioni hanno pulsazione $\omega = k/\mu$, dove μ è la massa ridotta, che definiremo al paragrafo 9.1-XII.

Se l'energia totale è E_2, il moto sarà ancora oscillatorio ma, ovviamente, non armonico; i punti r_1 ed r_2, punti di inversione del moto, non sono simmetrici rispetto a r_0. Quando l'energia è $E_3 > 0$ le molecole non sono legate; esse possono recarsi fino al punto r_3 di massimo avvicinamento per poi allontanarsene indefinitamente. C'è da notare che, nella posizione di equilibrio, le molecole non sono mai in quiete a causa dell'energia termica posseduta ma, se questa non è molto elevata come ordinariamente avviene, si può ritenere che le oscillazioni, con buona approssimazione, siano armoniche. Si deduce che quando energia viene ceduta dall'esterno, il sistema passa a valori di energia crescenti, finché le particelle non si separano. Dal grafico si osserva che l'energia minima occorrente, che si chiama *energia di legame* o di dissociazione, è proprio pari all'energia U_0, corrispondente alla distanza di equilibrio r_0; in realtà è leggermente minore perché le particelle, a causa dell'agitazione termica, oscillano con un'energia totale un poco più alta dell'energia potenziale minima.

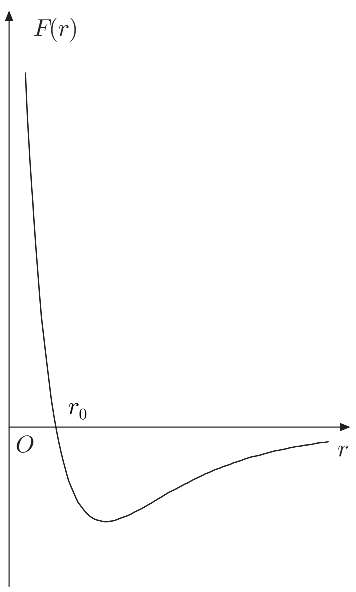

Fig. 8.28

La figura 28 riporta il grafico della forza in funzione di r; essa si annulla in corrispondenza della distanza di equilibrio ed è importante osservare che in un intorno di r_0 sufficientemente piccolo, la forza ha un andamento lineare come accade per l'oscillatore armonico, $(F = -kr)$.

Esempi

12. L'energia potenziale di una particella di massa m, in funzione della posizione x, è data dall'espressione

$$U(x) = Ax^2 - U_0.$$

Supponendo che per $U = 0$, $v = v_0 = 0$, descrivere il moto della particella e determinare la sua velocità massima.

L'energia potenziale ha andamento parabolico, figura 29, quindi il moto è armonico; infatti la forza $F = -dU/dx = -2Ax$ è di tipo elastico. Ponendo $U = 0$ si trova che le oscillazioni avvengono con centro in $x = 0$ ed ampiezza

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{U_0}{A}}.$$

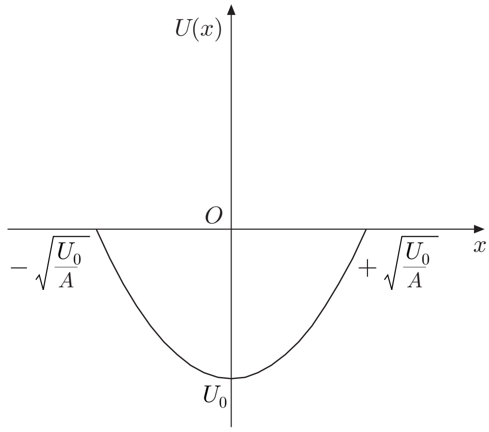

Fig. 8.29

Infatti in questi due punti $v = v_0 = 0$, quindi essi corrispondono a punti di inversione del moto. Si deduce che l'energia meccanica, costante, è uguale a zero. Pertanto

$$T + U = \frac{1}{2}mv^2 + Ax^2 - U_0 = 0,$$

da cui:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(U_0 - Ax^2)}, \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{2\frac{U_0}{m}}.$$

13. L'energia potenziale di una particella in funzione della posizione x, è data da

$$U(x) = -U_0 \cos\frac{\pi x}{l},$$

definita per $-l \leq x \leq l$, con U_0 ed l assegnati. Determinare i punti di equilibrio, l'energia cinetica, l'energia di legame E_{min} ed i punti di inversione del moto, supponendo che nel punto di equilibrio stabile l'energia totale sia $E = -U_0/2$.

L'andamento di $U(x)$, figura 30, non è armonico. I punti di equilibrio sono dati dai valori di x che soddisfano la relazione

$$F = -\frac{dU}{dx} = -U_0\frac{\pi}{l}\sin\frac{\pi x}{l} = 0,$$

cioè $x = nl$; $(n = 0, \pm 1)$. Il solo punto di equilibrio stabile si ha per $n = 0$. In corrispondenza si ha $U(x) = -U_0$, quindi l'energia totale è

$$E = T + U = T - U_0 = -\frac{1}{2}U_0, \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}U_0.$$

Ciò significa che in fondo alla buca di potenziale l'energia della particella è tutta cinetica. L'energia di legame è data da

$$E_{min} = 2U_0 - \frac{1}{2}U_0 = \frac{3}{2}U_0.$$

Nei punti di inversione del moto si ha $T = 0$ ed $U = -U_0/2$, pertanto

$$-\frac{1}{2}U_0 = -U_0\cos\frac{\pi x}{l}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi x}{l} = \pm\frac{\pi}{3}, \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{l}{3}.$$

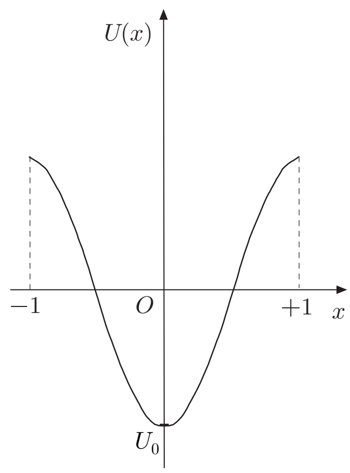

Fig. 8.30

8. Integrali del moto

La legge di conservazione dell'energia permette molte volte di determinare l'equazione del moto. Supponendo che il punto materiale abbia un solo grado di libertà, cioè si muova lungo un asse o una linea e l'energia potenziale possa essere espressa in funzione di una sola coordinata, l'ascissa x dell'asse o la coordinata curvilinea s della traiettoria, possiamo scrivere

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x),$$

da cui

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}, \tag{29}$$

la quale mostra che il moto della particella può avvenire solo nell'intervallo in cui l'energia potenziale è minore dell'energia totale, altrimenti la velocità sarebbe immaginaria.

Dalla (29), separando le variabili, si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{dx}{\sqrt{(2/m)[E - U(x)]}} = dt, \tag{30}$$

da cui, nota l'energia potenziale ed integrando, si può ricavare l'equazione del moto $x(t)$. Si ha dunque il vantaggio di risolvere una equazione differenziale del primo ordine piuttosto che del secondo, come impone la seconda legge della dinamica.

Esempi

14. *Moto di una particella soggetta a forza costante*

Poiché la forza è costante ammette energia potenziale. Orientato l'asse x nella direzione di $\mathbf{F}$ e assegnate le condizioni iniziali: $t = 0$, $x = 0$, $U = 0$, si ha:

$$F = -\frac{dU}{dx}, \quad \Rightarrow \quad U = -\int F dx = -Fx + C.$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali, la costante di integrazione $C = 0$; quindi $U(x) = -Fx$. Per la (29) si ha

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2/m)[E + Fx]}} = \int dt.$$

Integrando

$$\frac{2}{F}\sqrt{E + Fx} = \sqrt{\frac{2}{m}}\, t + C_1,$$

dove $C_1 = (2/F)E^{1/2}$; pertanto:

$$\frac{2}{F}\sqrt{E + Fx} - \frac{2}{F}\sqrt{E} = \sqrt{\frac{2}{m}}\, t.$$

Ricavando x, si ottiene

$$x = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + \sqrt{\frac{2E}{m}}\, t.$$

Poiché, per le condizioni iniziali assegnate ($t = 0, x = 0$), l'energia totale

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 - Fx,$$

risulta tutta cinetica, $E = mv_0^2/2$, sostituendo nella precedente si ottiene

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t,$$

equazione oraria del moto rettilineo con accelerazione costante.

15. *Oscillatore armonico*
Dalla conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2,$$

si ottiene

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \omega\sqrt{A^2 - x^2}.$$

Separando le variabili

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega dt,$$

ed integrando

$$\sin^{-1}\frac{x}{A} = \omega t + \varphi;$$

infine:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi).$$