# 6. Dinamica del punto materiale

## 1. Introduzione

Il problema fondamentale della dinamica consiste nello studio del moto dei corpi in dipendenza delle cause che lo determinano. L'esperienza comune fa osservare che il moto di un corpo è il risultato delle sue interazioni con altri corpi che lo circondano: la traiettoria di un grave, tenuto conto delle condizioni iniziali, è il risultato dell'interazione del grave con la terra; il moto di un elettrone attorno al nucleo è il risultato della sua interazione col nucleo e con gli altri elettroni; la deviazione della traiettoria di una particella in seguito all'urto con un'altra particella è il risultato della loro interazione. Prima di chiarire e definire operativamente ciò che abbiamo chiamato genericamente *interazione* vanno fatte alcune considerazioni introduttive.

In dinamica si fa sovente uso della nozione di punto materiale, nel senso precisato in Cinematica. Un corpo le cui dimensioni siano molto piccole rispetto alle dimensioni del campo di movimento e tale che non sia necessario considerare il moto indipendente di alcuna sua parte, può essere assimilato ad un punto materiale. Un sistema di corpi, ciascuno dei quali assimilabile ad un punto, si dirà sistema di punti materiali. Il sistema solare è un esempio di sistema siffatto; un atomo costituito dall'insieme dei suoi elettroni e dal nucleo è un altro esempio.

In cinematica le terne di riferimento possono essere prese con larga arbitrarietà in quanto si conoscono le leggi che permettono di esprimere le grandezze cinematiche in qualsiasi riferimento, sia esso inerziale oppure no. Viceversa per stabilire le leggi fondamentali della dinamica classica occorre fissare un riferimento inerziale nel quale, come si è visto, l'accelerazione è uguale a quella misurata in ogni altro riferimento di questo tipo; un tale riferimento, come s'è detto, viene spesso indicato con l'aggettivo assoluto.

Il tempo misurato in questi riferimenti si chiama tempo assoluto e coincide col tempo definito mediante un orologio al cesio; riterremo che questo tempo, secondo i postulati classici, sia indipendente dal moto dell'osservatore.

In questo modo, come apparirà chiaro, le leggi della dinamica non richiedono correzioni dipendenti dal moto dell'osservatore, sono valide in tutti i riferimenti inerziali e sono invarianti, cioè hanno sempre la stessa forma. Naturalmente tutto questo non impedisce di studiare la dinamica di un punto materiale in un riferimento non inerziale, come si vedrà studiando la dinamica relativa; ciò sarà possibile tenendo presente i risultati ottenuti a proposito della composizione delle accelerazioni.

## 2. Legge di inerzia o prima legge della dinamica

L'esperienza comune indica che l'interazione di un punto materiale con altri punti ha come conseguenza la variazione del suo stato di moto; si osserva inoltre che, una volta cessata l'interazione, esso tende a mantenere lo stato di moto acquistato, vale a dire, in un riferimento inerziale e con buona approssimazione in un riferimento legato con la Terra, tende a mantenere costante la sua velocità.

Poniamo l'attenzione su una palla di bigliardo in quiete su un tavolo, essa rimane in quiete fin quando non subisce un urto; la superficie del tavolo compensa l'interazione della palla con la Terra. Dopo l'urto essa acquista velocità in una certa direzione e, se è ben levigata e la superficie del tavolo perfettamente orizzontale, tende a mantenere la sua velocità nella direzione intrapresa. In pratica dopo un intervallo di tempo più o meno lungo la palla rallenta e si ferma. Possiamo spiegare questo comportamento ipotizzando che c'è stata un'interazione aggiuntiva tra palla e superficie del tavolo, detta *attrito*.

Lo stesso Galilei fece l'ipotesi che un corpo in moto, non soggetto ad interazioni con altri corpi, viene rallentato da fenomeni d'attrito e di resistenza del mezzo in cui si muove; anzi, si può affermare che egli per primo ebbe la geniale intuizione dell'esistenza della legge d'inerzia, formulata poi esattamente da Newton, quando descrive le sue osservazioni nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*.

Con esperienze analoghe a quella descritta, realizzate in condizioni tali da eliminare, per quanto è possibile, l'attrito (tavoli e guide a cuscino d'aria), figura 1, si può verificare, estrapolando, l'ipotesi che in un riferimento inerziale e, con buona approssimazione, in un riferimento solidale con la Terra, un corpo, una volta cessata l'interazione, si muove di moto rettilineo ed uniforme. Si è trascurato l'attrito del corpo nel mezzo in cui si muove, altrimenti l'esperienza in laboratorio diventerebbe molto complessa; tuttavia i risultati dell'osservazione astronomica del moto dei corpi celesti, di cui lo stesso Newton tenne conto, permettono di enunciare la legge di inerzia:

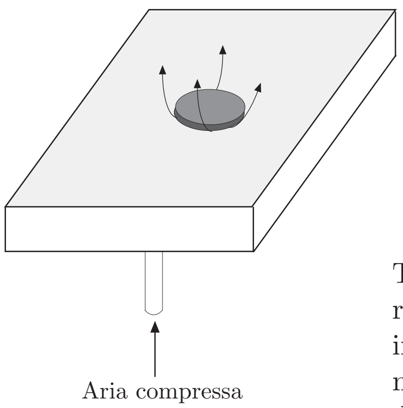


Fig. 6.1

*In un riferimento inerziale un punto materiale, sottratto ad ogni interazione, permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.*

Legge che da Isacco Newton nella sua opera "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", (1686), viene così enunciata:

Lex I. *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare .*

In questa legge compare il concetto di forza che finora abbiamo indicato genericamente con interazione.

## 3. Forza, seconda legge della dinamica, massa

Il concetto di forza va introdotto in maniera accurata anche se esso deriva essenzialmente dall'intuizione. Prima di Galilei, della forza si aveva un'idea molto rudimentale; la caduta libera di un grave veniva attribuita alla forza di gravità e si riteneva, in generale, che essendo lo *stato naturale* di ogni corpo la quiete, per far muovere un corpo su questo dovesse agire un qualche ente esterno chiamato forza. Pertanto per mantenere il moto uniforme di un corpo doveva essere esercitata una forza per spingerlo continuamente, altrimenti avrebbe cessato naturalmente di muoversi. Se così fosse, nelle esperienze del tipo descritto nel paragrafo precedente questa ipotesi dovrebbe essere verificata; viceversa si trova che il moto del corpo, appena l'azione esterna cessa, tende ad essere rettilineo uniforme.

D'altra parte i risultati sperimentali di Galilei mostrarono che i gravi in prossimità della terra cadono con accelerazione costante; ciò portò all'affermarsi dell'idea che una forza determinasse una variazione della velocità e non la velocità stessa. Riportiamo la definizione data da Newton nei " Principia":

Definizione quarta: *Una forza impressa è un'azione esercitata su un corpo per mutarne lo stato, sia esso di quiete o di moto rettilineo uniforme.*

Se la forza determina una variazione del moto del punto materiale, si riconosce ad essa una natura vettoriale; infatti nell'intervallo di tempo $\Delta t$ durante il quale essa agisce, il punto subisce una variazione di velocità $\Delta \mathbf{v}$ e quindi un'accelerazione, data sensibilmente dal rapporto $\Delta \mathbf{v}/\Delta t$. Se ne deduce che la forza è necessariamente proporzionale al vettore accelerazione. Enunciamo con Newton la seconda legge della dinamica (Principia):

Lex II. *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

La variazione del moto è proporzionale alla forza motrice impressa, e segue la retta secondo cui tale forza è stata applicata. "Se una forza genera un moto qualsiasi, una forza doppia ne produrrà uno doppio, una tripla triplo: sia che essa agisca tutta insieme e in una volta, sia che essa agisca a poco a poco e successivamente. E questo moto (essendo sempre determinato nella stessa direzione della forza generatrice), se il corpo già si moveva, o si aggiungerà al moto precedente se cospira con esso, o ne sarà detratto se gli è contrario; o infine sarà sommato o detratto parzialmente da esso, se ha direzione obliqua; producendo così un nuovo moto risultante dalle determinazioni dei due moti considerati". Newton riconosce dunque il principio di sovrapposizione che è espresso nei Principia con i seguenti corollari.

Corollario primo: *Un corpo sotto l'azione simultanea di due forze descrive la diagonale del parallelogrammo nel tempo stesso che impiegherebbe a descrivere i lati di esso sotto l'azione delle singole forze separatamente.*

Corollario secondo: *Donde si spiega la composizione di una forza diretta $AD$ a partire da forze oblique $AB$ e $BD$, e viceversa la scomposizione di una forza diretta $AD$ in due forze oblique $AB$ e $BD$. Tale composizione e risoluzione sono ampiamente confermate dalla meccanica.*

Per confrontare quantitativamente le proprietà inerziali dei corpi Newton introdusse il concetto di massa ed eseguì esperimenti con materiali diversi trovando che l'inerzia di un corpo, al variare del suo stato di moto, è sempre proporzionale al suo peso, cioè alla forza di attrazione esercitata su di esso dalla Terra. Riportiamo la definizione dai Principia:

Definizione prima: *La quantità di materia è la misura di questa, derivante dal prodotto della sua densità per il volume. Quindi aria di densità doppia occupante uno spazio doppio è in quantità quadrupla; in uno spazio triplo è in quantità sestupla. Lo stesso vale per la neve, e per le sostanze finissime o polveri, condensate per liquefazione o per compressione, e così pure per tutti i corpi per qualsiasi causa diversamente condensati. Non tengo conto, in questa sede, se alcuno ne esiste, del mezzo che pervade liberamente gli interstizi tra le parti dei corpi. D'ora in avanti è sempre a questa quantità che mi riferisco parlando di corpo o di massa. Essa viene conosciuta attraverso il peso di ciascun corpo, in quanto essa è proporzionale al peso, come ho trovato con esperimenti molto precisi sui pendoli, che descriverò in seguito.*

Definizione seconda: *La quantità di moto è la misura di esso, derivante dal prodotto della velocità per la quantità di materia.*

Definizione terza: *La vis insita o forza propria della materia è una potenza a resistere, per la quale ogni corpo, per quanto sta in esso, permane nel suo stato presente, sia esso uno stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.*

Consideriamo un corpo assimilabile ad un punto materiale, inizialmente in quiete, in prossimità della superficie terrestre; se esso cade, la semplice osservazione della variazione del suo stato di moto indica che è soggetto ad una forza che chiamiamo "peso". Possiamo impedire che il punto materiale cada applicando ad esso una forza $\mathbf{F}$ per mezzo di un filo inestendibile. In questa condizione la forza equilibra il peso; ciò significa che il peso è rappresentabile con un vettore $\mathbf{F}_p$ applicato al punto ed opposto ad $\mathbf{F}$. L'esperienza mostra che $\mathbf{F}$ è volta come la verticale verso l'alto del luogo dove si effettua l'esperienza ed il peso $\mathbf{F}_p$ come la verticale discendente. Possiamo misurare il modulo di $\mathbf{F}$ inserendo nel filo un dinamometro, il quale è un corpo elastico, ordinariamente una molla, che subisce un allungamento in corrispondenza biunivoca con l'intensità della forza e che si annulla con questa. Per un dato corpo il dinamometro denuncia sempre lo stesso allungamento in tutti i punti di una regione non troppo estesa della Terra; il modulo di $\mathbf{F}$ è costante. Ripetendo l'esperienza con corpi di varia natura e dimensioni diverse, per il modulo di $\mathbf{F}$ si trovano valori diversi nell'ambito considerato.

Le esperienze di Galilei indicano peraltro che l'accelerazione di gravità è costante per tutti i corpi in prossimità della Terra, per cui, introducendo un certo coefficiente $C$ positivo, si può scrivere

$$\mathbf{F}_p = \frac{p}{C}\mathbf{g}, \tag{1}$$

da cui si trae

$$C = |\mathbf{g}|.$$

La costante $C$ si identifica col modulo di $\mathbf{g}$. Le esperienze condotte con corpi di natura e dimensioni diverse ci permettono di concludere che il rapporto $p/g$ dipende dal corpo considerato e, con Newton, diremo *massa* tale rapporto:

$$m = \frac{p}{g}.$$

Si sottolinea che essa è distinta dal peso pur essendo legata al modulo di questo da una semplice relazione di proporzionalità. Per essere più precisi, chiamiamo la massa definita in questo modo, *massa gravitazionale*, perché ottenuta considerando l'interazione gravitazionale del corpo con la Terra.

Se, secondo Newton, l'inerzia del corpo è proporzionale al suo peso, la (1), che è servita a determinare la costante $C$, può essere estesa ad ogni forza nel modo seguente

$$\mathbf{F} = \frac{p}{g}\,\mathbf{a} = m\mathbf{a} \tag{2}$$

È questa la forma consueta che si dà a quella che si chiama, per eccellenza, *Legge fondamentale della Dinamica*; forza ed accelerazione di un punto materiale sono proporzionali ed il coefficiente di proporzionalità è la massa. La (2) esprime la seconda legge di Newton; in realtà l'enunciato di questa legge, originariamente, si riferiva alla variazione della quantità di moto, grandezza che da Newton è stata definita come il prodotto della massa per la velocità:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \tag{3}$$

La quantità di moto, nel $SI$ ha come unità $m\,kg\,s^{-1}$. Infatti, nell'ambito della meccanica classica, la massa risulta essere costante poiché costituisce una proprietà intrinseca del punto materiale, pertanto

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

Di conseguenza possiamo riformulare la seconda legge scrivendo

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \tag{4}$$

In meccanica classica la legge espressa dalla (2) si ritiene valida o invariante in ogni caso, purché subordinata ai riferimenti inerziali dove, essendo valida la relatività galileiana, l'accelerazione impressa ad un punto materiale ha lo stesso valore. La legge fondamentale della dinamica può essere estesa fuori dall'ambito delle esperienze locali che hanno permesso di stabilirla; le osservazioni astronomiche giustificano questa estensione e mostrano indirettamente che la massa dipende solo dal punto materiale cui è attribuita. Viceversa l'estensione precedente non è ammessa in teoria della relatività, dove la massa varia con la velocità; tuttavia siccome tale variazione è trascurabile per velocità piccole rispetto alla velocità della luce, nell'ambito ordinario, possiamo usare la meccanica classica con ottima approssimazione.

Chiamiamo *massa inerziale* la massa che compare nella (2); è una distinzione piuttosto importante, perché nulla permette di asserire, a priori, che massa inerziale e massa gravitazionale debbano coincidere, in quanto le azioni esercitate sul punto materiale sono diverse: in un caso è la forza di gravità, nell'altro una qualsiasi forza esercitata, ad esempio, mediante trazioni compressioni od altro. Il problema riguardante la diversità delle due masse fu affrontato dallo stesso Newton il quale concluse, nell'ambito della precisione delle sue misure, che massa inerziale e massa gravitazionale coincidono. Misure recenti, eseguite nei primi anni 60, hanno permesso di concludere che l'equivalenza tra le due masse può essere stabilita con una precisione di una parte su $10^{11}$. Torneremo sull'argomento successivamente.

La massa è una grandezza estensiva: unendo due punti materiali di masse $m_1 = F_{p1}/g$, $m_2 = F_{p2}/g$, si ottiene un unico punto materiale di peso $F_p = F_{p1} + F_{p2}$, e quindi di massa

$$m = F_p/g = (F_{p1} + F_{p2})/g = m_1 + m_2,$$

uguale alla somma delle masse dei due punti materiali.

La (2) permette di stabilire la misura dinamica della forza attraverso la conoscenza della massa e la misura cinematica dell'accelerazione; inoltre fornisce una definizione operativa di forza. Nel $SI$ l'unità di forza è il *newton* ($N$) che è la forza necessaria per impartire all'unità di massa una accelerazione unitaria, ($1\, ms^{-2}$).

La legge fondamentale della dinamica permette di trarre importanti conclusioni; se, in particolare, sul punto materiale non agisce nessuna forza, ossia è isolato, risulta $\mathbf{a} = 0$ e quindi la sua velocità $\mathbf{v}$ è costante, oppure il punto è fermo. Dalla seconda legge di Newton si deduce la legge d'inerzia.

Se, senza essere isolato, il punto materiale è soggetto a più forze con risultante nulla, dobbiamo porre nella (2), $\mathbf{F} = 0$ e concludere che il punto è in equilibrio oppure si muove di moto rettilineo uniforme.

In generale, considerando due punti materiali di masse $m_1$ ed $m_2$, soggetti alla stessa forza $\mathbf{F}$, si ha:

$$\mathbf{F} = m_1\mathbf{a}_1, \qquad \mathbf{F} = m_2\mathbf{a}_2, \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{\mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1},$$

in altri termini, a parità di forza, le accelerazioni subite dai due punti materiali sono inversamente proporzionali alle loro masse; la massa del punto materiale rappresenta l'inerzia alla variazione di velocità.

Consideriamo ora un punto materiale soggetto a due forze $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$. Se la prima forza agisse separatamente, il punto acquisterebbe l'accelerazione $\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1/m$; analogamente, se agisse separatamente la seconda forza, si avrebbe $\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2/m$.

Quando le due forze agiscono contemporaneamente sono equivalenti ad un'unica forza $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$; l'accelerazione con cui si muove il punto materiale risulta:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2}{m} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2,$$

da cui

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2,$$

relazione che conferma il principio di sovrapposizione o la legge sperimentale del parallelogramma.

Non è sfuggito come la seconda legge della dinamica permetta la misura della forza nel modo più corretto, attraverso la misura della massa e dell'accelerazione impartita al punto materiale. La misura statica non è altrettanto generale; infatti esistono forze che dipendono dalla velocità. Tali sono, per esempio, la forza di

Coriolis, $\mathbf{F}_c = 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$, la forza di Lorentz, che viene esercitata su una carica in moto in un campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$, $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Queste forze cessano appena la velocità si annulla, quindi non è possibile usare il metodo descritto per misurare, ad esempio, la forza peso che viene equilibrata dalla forza elastica esercitata dal dinamometro. Si capisce che con questo metodo, statico, qualora la natura delle forze lo consenta, più forze agenti su un punto materiale, saranno equilibrate da una forza che chiude la poligonale costituita dalle forze applicate.

## 4. Terza legge della dinamica

La terza legge della dinamica è la legge di *azione e reazione*; essa afferma che se, in un riferimento inerziale, due punti materiali isolati interagiscono, l'azione di uno dei punti sull'altro è uguale alla reazione del secondo sul primo e viceversa. Riportiamo dai Principia la definizione di Newton:

Lex III. *Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem; sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.*

L'azione è sempre uguale e contraria alla reazione; cioè le mutue azioni di due corpi sono sempre uguali e dirette in senso opposto. L'enunciato di questa legge fu il risultato di numerose esperienze sull'urto tra sfere, eseguite da Newton stesso e da altri ricercatori suoi contemporanei, in particolare da Christian Huygens.

Consideriamo due particelle o punti materiali isolati che urtano o che genericamente interagiscano; l'esperienza mostra che, indipendentemente dall'intervallo di tempo durante il quale si verifica l'interazione, le variazioni di velocità $\Delta\mathbf{v}_1$, $\Delta\mathbf{v}_2$ delle particelle, dopo l'interazione, sono opposte ed il loro rapporto è costante; pertanto scriveremo

$$\frac{\Delta\mathbf{v}_1}{\Delta\mathbf{v}_2} = -C,$$

dove $C$ ha lo stesso valore per ogni coppia di particelle. Di conseguenza possiamo definire in maniera appropriata la massa inerziale. Infatti consideriamo le interazioni di un certo numero di particelle con una particella di riferimento; se le interazioni sono tali da provocare, a quest'ultima, sempre la stessa variazione di velocità $\Delta\mathbf{v}_0$, indicando con $m_1$, $m_2$,... i valori della costante $C$ trovati per ogni interazione, si ha

$$\Delta\mathbf{v}_0 = -m_1\Delta\mathbf{v}_1, \qquad \Delta\mathbf{v}_0 = -m_2\Delta\mathbf{v}_2, \ldots$$

Chiamiamo tali valori, masse inerziali delle particelle, avendo attribuito alla particella di riferimento massa unitaria, ($m_0 = 1$).

Se si prende in esame l'interazione tra le particelle 1 e 2, o quella di qualunque altra coppia di particelle, si otterrà:

$$m_1 \Delta \mathbf{v}_1 = -m_2 \Delta \mathbf{v}_2, \qquad \frac{\Delta \mathbf{v}_1}{\Delta \mathbf{v}_2} = -\frac{m_2}{m_1} \cdots$$

Il rapporto tra le variazioni di velocità è sempre uguale al rapporto inverso tra le masse inerziali delle particelle che partecipano all'interazione. Se poi si confrontano le masse inerziali $m_0 = 1$, $m_1$, $m_2$,... con le corrispondenti masse gravitazionali, misurate con la bilancia, si trova che massa inerziale e massa gravitazionale coincidono. Si sottolinea come il processo considerato, implichi che la corretta determinazione della massa inerziale vada effettuata attraverso la misura dell'accelerazione, impartita al punto materiale da una forza nota.

Poiché nell'ambito della meccanica classica la massa è costante, possiamo scrivere

$$\Delta \mathbf{p}_1 = -\Delta \mathbf{p}_2, \tag{5}$$

ossia, in seguito all'interazione, la variazione della quantità di moto di una particella è opposta alla variazione della quantità di moto dell'altra. In altri termini la quantità di moto che una particella guadagna è uguale alla quantità di moto sottratta all'altra particella e viceversa, figura 2.

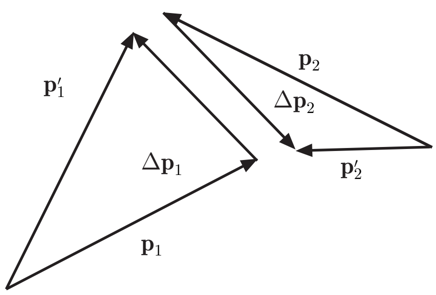


**Fig. 6.2**

Se indichiamo con $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$ le quantità di moto delle due particelle dopo l'interazione, possiamo scrivere

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_1, \qquad \Delta p_2 = \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_2,$$

pertanto la (5) diventa

$$\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2. \tag{6}$$

*La quantità di moto di due punti materiali isolati soggetti solo alla loro mutua interazione resta costante.*

Questa conclusione costituisce la legge della conservazione della quantità di moto che verrà estesa ai sistemi di punti materiali. Va detto che questa legge costituisce un principio fondamentale ed universale della Fisica su cui torneremo ampiamente in seguito.

Dividendo la (5) per l'intervallo di tempo $\Delta t$ durante il quale si verifica l'interazione e facendo tendere tale intervallo a zero, si ottiene

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt}$$

che si scrive

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2. \tag{7}$$

Concludiamo dunque dicendo che se due punti materiali interagiscono tra loro, la forza agente su un punto è uguale ed opposta alla forza esercitata dall'altro e viceversa. Le forze si presentano sempre a coppie e sono dovute essenzialmente alla presenza di corpi ed è loro caratteristica quella di soddisfare la terza legge della dinamica. Limitandoci per il momento alle forze di contatto, determinate cioè da trazioni, compressioni o simili, osserviamo che anche nella vita di ogni giorno facciamo esperienza della legge dell'azione e reazione. Se viene esercitata una forza muscolare avente carattere di pressione su un oggetto, questo, sia che si muova o che stia fermo, esercita a sua volta, una forza avente carattere di pressione opposta a quella che si è esercitata. Sappiamo che non ci si può alzare da una sedia tirandola con le nostre braccia verso l'alto, non possiamo scendere da una piccola barca con un balzo perché la barca per reazione si allontana ecc..

Va sottolineato che azione e reazione *non* sono applicate allo stesso punto materiale; *non* si può sostituire ad esse la loro risultante nulla.

## 5. Considerazioni sulle tre leggi della dinamica

Un ulteriore commento sulle tre leggi si può fare seguendo lo schema adottato da Mach e Kirchhoff.

a) L'accelerazione di un punto materiale è nulla, rispetto ad un osservatore inerziale, quando il punto è isolato da ogni altro. Non è invece nulla, in generale, quando esso è posto in presenza di altri punti materiali; essa non dipende, in ogni istante, né dalla posizione iniziale, né dalla velocità iniziale del punto, ma dalla sua posizione e dalla sua velocità attuali, da quelle degli altri punti e dalle condizioni fisiche del sistema.

b) Due punti materiali isolati interagenti subiscono accelerazioni in verso opposto $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, dirette come la congiungente i due punti e tali che il rapporto fra i loro moduli non varia mai durante il moto. Inoltre questo rapporto è inverso a quello tra due numeri positivi $m_1$ e $m_2$, ognuno dei quali costituisce un invariante del punto cui si riferisce; esso non muta né col luogo, né col tempo, né col punto con cui interagisce. Si tratta di un invariante intrinseco avente carattere additivo che chiamiamo massa. Posto quindi

$$\mathbf{F}_{12} = m_1\mathbf{a}_1,$$

$$\mathbf{F}_{21} = m_2\mathbf{a}_2,$$

troviamo che le due forze sono opposte e hanno come retta di azione quella congiungente i due punti; vale la terza legge di Newton.

c) Consideriamo tre punti materiali isolati; il prodotto della massa di uno qualsiasi per la sua accelerazione uguaglia la somma $\mathbf{F}$ dei due vettori che si otterrebbero isolando il punto materiale con ognuno degli altri due.

L'insieme delle circostanze a), b), c) giustifica la definizione di forza $\mathbf{F}$ che punti materiali esercitano sul punto in esame, come prodotto della massa per la sua accelerazione:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Questa appropriata definizione costituisce la seconda legge di Newton.

Le leggi della dinamica affermano sostanzialmente che coppie di punti materiali diverse determinano, indipendentemente l'una dall'altra, coppie di accelerazioni, tali che le accelerazioni di una medesima coppia sono nel rapporto invariabile che caratterizza la coppia di punti materiali.

Da un altro punto di vista possiamo affermare che le leggi della dinamica danno tre definizioni del movimento: la legge d'inerzia definisce il riferimento inerziale, la legge fondamentale della dinamica definisce la forza, la legge di azione e reazione definisce la massa.

## 6. Campo di forza

L'estensione della terza legge, valida per le forze di contatto, alle forze che si esercitano a distanza, per esempio alla forza gravitazionale, non presenta difficoltà operative ma qualche difficoltà concettuale; infatti si trova che nell'interazione a distanza la terza legge è pienamente verificata e ciò implica, dal punto di vista classico, che la variazione della quantità di moto si trasmetta istantaneamente da un corpo all'altro attraverso lo spazio che li separa. Per esempio nel sistema Terra Sole questa variazione si dovrebbe trasmettere con velocità infinita attraverso i 150 milioni di chilometri da cui i due corpi sono separati. Newton stesso accettò questo dato di fatto perché ciò gli consentiva di calcolare correttamente le orbite dei pianeti con la legge di gravitazione, ma evitò di formulare ipotesi anche perché non poteva spiegare come la quantità di moto si potesse propagare attraverso lo spazio vuoto. Nella sua terza lettera a Bentley, infatti, così si esprime:

> "È inconcepibile che la materia bruta e inanimata possa, senza la mediazione di qualcos'altro che non sia materiale, agire sul resto della materia o influenzarlo senza mutuo contatto, come dovrebbe accadere se la gravitazione, nel senso di Epicuro, fosse essenziale e inerente alla materia. E questa è una delle ragioni per cui desidero che non mi attribuiate la gravità come innata. Che la gravità sia innata, inerente ed essenziale alla materia, così che un corpo possa agire su un altro a una certa distanza attraverso il vuoto, senza la mediazione di qualcos'altro mediante il quale l'azione e la forza di quei corpi possano essere trasmesse dall'uno all'altro, è per me un'assurdità così grande che non credo che alcuna persona che abbia una sufficiente capacità di ragionare in questioni filosofiche possa mai credervi".

Il problema dell'azione a distanza è oggi risolto per mezzo del concetto di campo. Consideriamo, per esempio, l'interazione gravitazionale tra due corpi che, come noto, è attrattiva. Si può ritenere che tale interazione si verifichi attraverso due stadi. Uno dei corpi crea nello spazio che lo circonda una condizione tale che ogni altro corpo, in qualunque punto di questo spazio, subisca la forza gravitazionale prodotta dal primo; la regione di spazio così "condizionata" è chiamata *campo gravitazionale*; dunque il campo esiste di per se stesso, sia che poniamo in esso un corpo su cui agisce la forza o meno. Questo campo ha, ovviamente, natura vettoriale ed è definito come la forza che agisce sull'unità di massa in ogni suo punto. Nel secondo stadio il corpo interagisce direttamente col campo e non con il corpo (o i corpi) che lo determinano; in altri termini il campo ha il ruolo di agente mediatore. L'utilità di questa rappresentazione appare chiara perché, una volta definito il campo prodotto da una massa o da un insieme di masse in una certa regione dello spazio, la forza che viene esercitata su un punto materiale posto in un punto del campo è data semplicemente dal prodotto della sua massa per il valore del campo in quel punto.

Per esempio, se consideriamo la Terra come isolata, sappiamo che la forza che viene esercitata su un punto materiale, in una regione non molto estesa, è la forza peso $\mathbf{F}_p$; possiamo associare a ciascun punto della regione il vettore accelerazione di gravità, uniforme, e indicare con $\mathbf{g}$ il campo di gravità nella regione in esame, $\mathbf{g} = \mathbf{F}_p/m$; la forza peso agente su un punto materiale è data semplicemente dal prodotto della massa per l'accelerazione di gravità. Più precisamente indichiamo con

$$|\mathbf{F}| = G\frac{mM_T}{R_T^2}$$

il modulo della forza gravitazionale agente su una massa $m$, di solito molto minore della massa della terra $M_T$, in prossimità della terra, supposta sferica di raggio $R_T$ e massa $M_T$. L'intensità del campo gravitazionale o dell'accelerazione di gravità è

$$g = \frac{F}{m} = G\frac{M_T}{R_T^2}.$$

In modo analogo si può definire il campo elettrostatico $\mathbf{E}$ prodotto da una carica puntiforme. L'interazione tra due cariche, poste nel vuoto a distanza $r$, è descritta dalla legge di Coulomb:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

da cui:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

che esprime il campo elettrico prodotto dalla carica $q$ ed agente sulla carica $q_0$; esso è dunque dato dal rapporto tra la forza coulombiana e la carica; $\epsilon_0$ è la costante dielettrica del vuoto.

Va osservato che la carica $q_0$, come la massa $m$ nel caso gravitazionale, deve essere molto piccola e tale comunque da non perturbare sensibilmente il campo determinato dalla carica $q$. Pertanto si suole definire il campo elettrostatico con la notazione

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\mathbf{F}}{q_0},$$

che non implica operazioni di limite in senso algebrico, ma evidenzia il fatto che la carica di prova dev'essere la più piccola possibile.

Il concetto di campo è fondamentale in elettromagnetismo, per lo studio delle interazioni tra cariche statiche o in moto e sarà considerato con maggiori dettagli in quella sede.

Si è detto che il campo, nell'interazione a distanza, ha il ruolo di intermediario, pertanto l'interazione deve essere descritta in due fasi: calcolo del campo prodotto da un insieme di masse o da cariche o da qualcos'altro; calcolo della forza che il campo esercita sulla massa o sulla carica posta in esso; ciò implica un'interazione del tipo:

$$massa\ (carica) \leftrightarrow campo \leftrightarrow massa\ (carica)$$

e non

$$massa\ (carica) \leftrightarrow massa\ (carica).$$

Le relazioni scritte si possono leggere da sinistra a destra o viceversa; questo significa che le interazioni sono mutue, in altri termini si può considerare il campo come prodotto dalla seconda massa (carica) e l'interazione subita dalla prima massa (carica), in accordo con la terza legge della dinamica. La situazione è perfettamente simmetrica, ognuna delle due masse essendo posta nel campo prodotto dall'altra.

Un problema molto importante, a questo punto, è quello di analizzare cosa succede quando le masse o le cariche sono in movimento; se fossero ferme le descrizioni in termini di campo o di azione a distanza sarebbero equivalenti. Quando una delle due subisce una variazione di quantità di moto, ci si può chiedere con quale rapidità l'altra sente questa variazione; la risposta è che la perturbazione del campo generato dalla prima si propaga con la velocità della luce nel vuoto e non istantaneamente come vuole la descrizione di azione a distanza.

Questo risultato è fondamentale in elettromagnetismo dove si trova che la variazione della quantità di moto o l'accelerazione delle cariche in una certa regione dello spazio influenza le cariche di un'altra regione distante $r$ solo dopo un tempo $r/c$, dove $c$ è la velocità della luce. Nel caso dell'interazione gravitazionale tra Terra e Sole, quando la Terra varia la sua posizione a causa del suo moto di rivoluzione si ha una variazione del campo gravitazionale; però durante gli 8 minuti circa che il campo impiega per propagarsi lungo la distanza Terra-Sole, la Terra descrive solo un piccolo tratto della sua orbita corrispondente a circa $9,6 \cdot 10^{-5}\, rad$. Si può quindi trascurare il tempo occorrente per la propagazione della variazione del campo e trattare le forze che ne conseguono come interazioni mutue a distanza; in altri termini il campo si può considerare statico, ed il fatto che esso esista o meno ha poca importanza: valgono la terza legge di Newton e il principio di conservazione della quantità di moto.

Con questo non si intende dire che il principio di conservazione della quantità di moto non sia valido in generale, una volta che si è riconosciuto che la propagazione dell'informazione viaggia con velocità finita. Tale principio può essere rienunciato come legge esatta, introducendo il concetto che il campo stesso possiede una quantità di moto e che la quantità di moto scambiata tra i due corpi venga trasportata dal campo durante il tempo di transito. Ciò si può dimostrare agevolmente nel caso dell'interazione elettromagnetica ma è più complicato per il campo gravitazionale.

È importante sottolineare che molte volte la rappresentazione di una certa grandezza fisica risulta più comoda ed immediata se si danno i valori che essa assume nei punti di una regione dello spazio e, se varia nel tempo, ad un certo istante. Esempi tipici sono la distribuzione dei valori della temperatura in un certo sistema, l'andamento della pressione in una data regione, la distribuzione delle velocità delle particelle di un fluido in moto, ecc... Comunemente l'insieme di tali grandezze è indicato come campo delle temperature, delle pressioni, delle velocità e così via; è evidente che in queste circostanze il significato di campo è diverso da quello più sopra esposto.

## 7. Proprietà elementari dei campi di forza

Indichiamo col vettore **A** il generico campo, sia esso gravitazionale o elettrico o di qualsiasi altro tipo; se due campi di ugual natura agiscono nello stesso punto, si ha

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2;$$

in altri termini vale il principio di sovrapposizione; così se i campi sono più di due. Si definisce *linea di forza o linea di flusso* una linea tale che in ogni suo punto ha per tangente il vettore **A** del campo; il verso della linea di forza è concorde con quello del campo. Ad esempio, nel campo della gravità, la verticale in ogni punto volta verso il basso, individua la tangente ed il verso della linea di forza; nel campo gravitazionale di una massa puntiforme, le linee di forza sono radiali ed hanno verso concorrente sulla massa stessa, figura 3.

Se si considera nel campo una linea chiusa $l$ e per tutti i suoi punti si traccia la linea di forza corrispondente, si ottiene il cosiddetto *tubo di flusso*, figura 4.

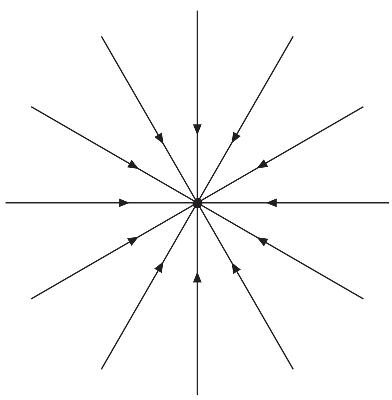

Fig. 6.3

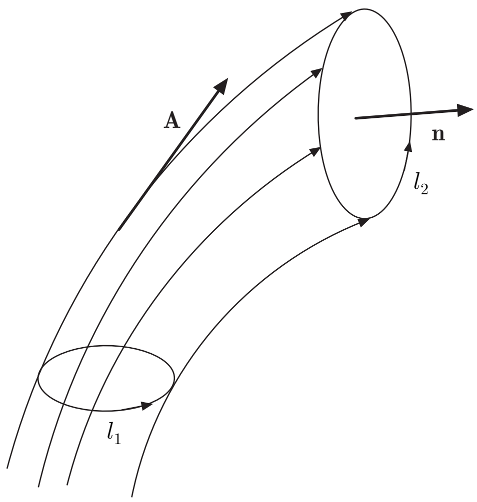


Fig. 6.4

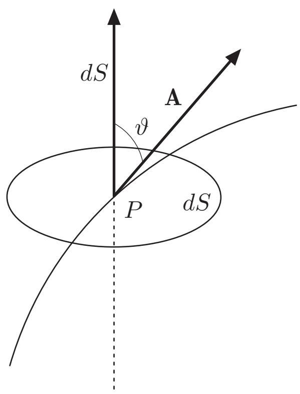


Fig. 6.5

### 7.1. Flusso del vettore campo

Si consideri nel campo di forza una superficie elementare $dS$, figura 5, e sulla normale $\hat{\mathbf{n}}$ a $dS$ si fissi un verso positivo che individua anche, secondo la convenzione di Ampère, il verso positivo di percorrenza del perimetro della superficie $dS$. Si può così definire anche il vettore $d\mathbf{S}$, la cui orientazione è quella fissata sulla normale; tale vettore ovviamente non è un vettore applicato ma caratterizza completamente l'elemento di area, nel senso che è possibile attribuire ad esso un segno: è positiva la faccia il cui perimetro, secondo la convenzione adottata, è percorso in senso antiorario, negativa l'altra. Definiamo flusso elementare del campo la grandezza

$$d\Phi = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = A dS \cos\theta.$$

Il flusso elementare gode dunque delle proprietà del prodotto scalare e, se $\mathbf{A}$ e $d\mathbf{S}$ non sono identicamente nulli, dipende dal coseno dell'angolo da essi formato; dunque il flusso può essere positivo se l'angolo è acuto (flusso uscente), negativo se l'angolo è ottuso (flusso entrante) o nullo se l'angolo è di 90°. Esso inoltre è invariante perché tale è il prodotto scalare.

Il flusso totale attraverso una superficie finita è dato dall'integrale esteso a tutta la superficie:

$$\Phi = \int_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \tag{8}$$

Quest'ultima espressione in coordinate cartesiane si scrive

$$\Phi = \int_S (A_x dS_x + A_y dS_y + A_z dS_z).$$

dove compaiono le componenti cartesiane di $\mathbf{A}$ e le proiezioni di $d\mathbf{S}$ sugli assi coordinati ($dS_x = dS \cos(x, \hat{\mathbf{n}}), ...$).

Per comprendere il significato fisico di flusso basta pensare al campo delle velocità di un fluido ideale in moto stazionario in un condotto; in tal caso il prodotto della velocità per l'area della sezione del condotto, dà la portata espressa come volume di fluido che passa attraverso la sezione nell'unità di tempo; anzi la terminologia adottata nello studio dei campi prende origine appunto dalla fluidodinamica.

## 7.2. Divergenza

La divergenza del vettore campo è un operatore atto ad esprimere il flusso uscente dall'unità di volume; il significato fluidodinamico è evidente. Consideriamo il vettore campo $\mathbf{A}$ in un punto $P$ e una superficie chiusa costituita da un cubo elementare di spigoli $dx$, $dy$, $dz$, paralleli agli assi di una terna cartesiana, con origine in $P$, figura 6. Come di consueto, assumiamo che la normale alla superficie considerata sia volta verso l'esterno.

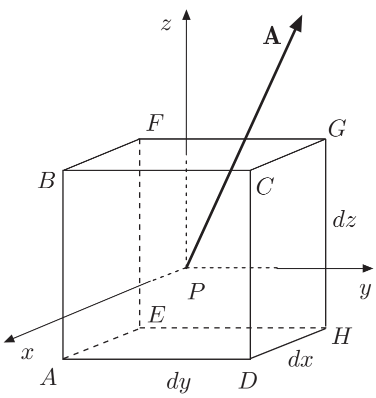


Fig. 6.6

Supponendo che $\mathbf{A}$ sia una funzione regolare di $x, y, z$, le sue componenti al centro delle facce del cubetto possono essere espresse dal valore medio che assumono sulle facce stesse. Consideriamo la componente $A_x$ al centro del cubetto; detto $A'_x$ il valore di tale componente in corrispondenza alla faccia $ABCD$ e limitandoci a variazioni del primo ordine, si ha:

$$A'_x = A_x + \frac{\partial A_x}{dx} \frac{dx}{2}.$$

Il flusso di $\mathbf{A}$ uscente da detta faccia è

$$d\Phi_{ABCD} = \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dydz.$$

Analogamente, il flusso uscente dalla faccia $EFGH$ risulta

$$d\Phi_{EFGH} = -\left(A_x - \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dydz,$$

dove il segno negativo discende dal fatto che il componente $A_x\mathbf{i}$ punta verso l'interno del cubetto, mentre la normale alla faccia considerata è volta verso l'esterno.

La somma dei flussi attraverso le due facce è

$$d\Phi_{ABCD} + d\Phi_{EFGH} = \frac{\partial A_x}{\partial x} dxdydz.$$

Lo stesso vale per le altre coppie di facce; il flusso complessivo uscente dal cubetto è pertanto

$$d\Phi = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dxdydz,$$

dove $dxdydz$ è il volume $dV$ del cubetto.

Si definisce *divergenza* di $\mathbf{A}$ la grandezza scalare

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{d\Phi}{dV}. \tag{9}$$

dove con $\nabla$ si è indicato, in coordinate cartesiane, l'operatore

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}, \tag{10}$$

chiamato *nabla*. Si ha pertanto

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{d\Phi}{dV} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \tag{11}$$

da cui si deduce

$$d\Phi = \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV, \quad \Rightarrow \quad \Phi = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV. \tag{12}$$

Pertanto il flusso del vettore $\mathbf{A}$ attraverso una superficie chiusa si può ottenere per mezzo dell'integrale della divergenza di $\mathbf{A}$ esteso al volume $V$ delimitato dalla superficie considerata. La divergenza è invariante perché il prodotto scalare $\nabla \cdot \mathbf{A}$ è invariante.

## 7.3. Circuitazione, rotore

Si definisce circuitazione del vettore campo $\mathbf{A}$ lungo una linea chiusa $l$, sulla quale è fissato un verso positivo di percorrenza, l'espressione

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \tag{13}$$

che in coordinate cartesiane si scrive

$$\oint (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \oint A_x dx + \oint A_y dy + \oint A_z dz.$$

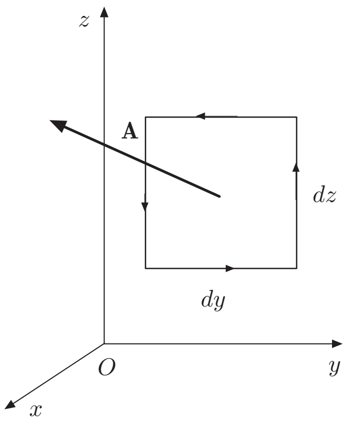


Fig. 6.7

Si consideri ora il campo **A** in un punto $P$, al centro di un elemento rettangolare di superficie $dS_x = dydz$, perpendicolare all'asse $x$. La normale all'elemento rispetta la convenzione sul verso positivo di percorrenza del suo perimetro, figura 7. La circuitazione infinitesima di **A** lungo tale perimetro è data da

$$\oint_{dS_x} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{dS_x} (A_y dy + A_z dz) = \oint_{dS_x} A_y dy + \oint_{dS_x} A_z dz. \tag{14}$$

Se $A_y$ è la componente di **A** al centro dell'elemento, limitandosi a variazioni del primo ordine, le componenti in corrispondenza ai lati $AB$ e $CD$ risultano rispettivamente:

$$A_y - \frac{\partial A_y}{\partial z}\frac{dz}{2}, \qquad A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z}\frac{dz}{2};$$

pertanto si ha

$$\oint_{dS_x} A_y dy = \left(A_y - \frac{\partial A_y}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dy - \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dy =$$

$$= -\frac{\partial A_y}{\partial z} dydz.$$

Il segno negativo nel secondo termine indica che l'elemento di linea $CD$ è percorso in direzione opposta a quella fissata sull'asse $y$.

Lo stesso ragionamento vale per $A_z$; infatti sui lati $BC$ e $DA$ si ha:

$$A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y}\frac{dy}{2}, \qquad A_z - \frac{\partial A_z}{\partial y}\frac{dy}{2};$$

quindi:

$$\oint_{dS_x} A_z dz = \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dz - \left(A_z - \frac{\partial A_z}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dz = \frac{\partial A_z}{\partial y} dydz.$$

In definitiva la (14) diventa

$$\oint_{dS_x} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dydz. \tag{15}$$

In maniera analoga si procede per la circuitazione lungo il perimetro delle superfici elementari $dS_y$ e $dS_z$ ortogonali, rispettivamente, all'asse $y$ e all'asse $z$:

$$\oint_{dS_y} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dxdz. \tag{16}$$

$$\oint_{dS_z} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dxdy. \tag{17}$$

Definiamo *rotore o rotovettore* di **A**, denotandolo con la notazione

$$\mathbf{R} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{18}$$

il vettore che, in coordinate cartesiane, ha componenti:

$$R_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right),$$
$$R_y = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right),$$
$$R_z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right),$$

che può anche essere espresso con la matrice

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} \tag{19}$$

da cui deriva la notazione $\nabla \times \mathbf{A}$.

Dalla (15) si deduce

$$\oint_{dS_x} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = R_x dS_x = d\Phi(\mathbf{R}),$$

cioè la circuitazione lungo il contorno di $dS_x$ è uguale al flusso elementare del vettore $\mathbf{R}$ attraverso tale superficie. Dalle (16) e (17) si giunge ad analoga conclusione per le superfici $dS_y$ e $dS_z$. Tenuto però conto dell'invarianza del prodotto scalare, si riconosce che tale risultato è valido qualunque sia l'orientazione dell'elemento; in altri termini si potrà scrivere

$$\oint_{dS} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS. \tag{20}$$

Questa equazione è valida se la circuitazione è estesa al perimetro di una superficie sufficientemente piccola e tale che $\nabla \times \mathbf{A}$ si possa ritenere costante su di essa. Tuttavia la circuitazione può essere estesa ad una linea $l$ finita e il flusso di $\nabla \times \mathbf{A}$ ad una generica superficie che ha come bordo la linea stessa. Infatti, figura 8, la superficie considerata può essere suddivisa in tanti elementi $dS$, in modo che per ognuno di essi si abbia

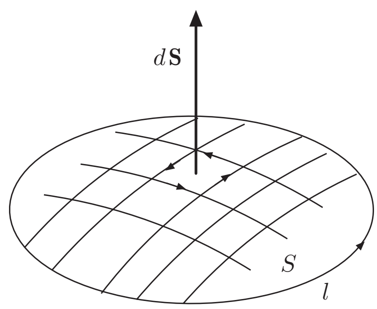

Fig. 6.8

$$\oint_{dS} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS.$$

Sommando i contributi di tutti gli elementi, si osserva che al primo membro la somma si riduce all'integrale lungo la linea $l$ che costituisce il bordo della superficie finita; infatti i contributi dei contorni elementari adiacenti si cancellano, in quanto sono sempre opposti. La somma dei contributi al secondo membro, non è altro che l'integrale $\nabla \times \mathbf{A}$ esteso alla superficie considerata. Pertanto si ottiene la relazione

$$\oint_{l} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS, \tag{21}$$

che esprime il teorema di Stokes:

*la circuitazione del vettore* **A** *lungo un percorso chiuso l è uguale al flusso del rotovettore di* **A** *attraverso una qualunque superficie che ha come contorno l.*

Il significato di rotore appare particolarmente intuitivo col seguente esempio. Si consideri un disco ruotante attorno al suo asse con velocità angolare costante; i punti del disco distanti $r$ dall'asse di rotazione hanno velocità $v = \omega r$. Fissata una terna cartesiana con l'asse $z$ coincidente con l'asse di rotazione, per le componenti del vettore velocità $\mathbf{v}$ si ha

$$v_x = -\omega r \sin\theta, \qquad v_y = \omega r \cos\theta, \qquad v_z = 0,$$

cioè:

$$v_x = -\omega y, \qquad v_y = \omega x, \qquad v_z = 0.$$

Il vettore $\mathbf{v}$ è funzione del punto e tutti i punti del disco costituiscono il campo del vettore velocità; dalla (19) il rotore di $\mathbf{v}$ risulta

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\ &= 2\omega\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\omega}.\end{aligned}$$

Il rotovettore di $\mathbf{v}$ è uguale al doppio della velocità angolare. Il campo delle velocità, in questo caso, si dice *rotazionale*.

Se consideriamo un campo vettorialmente costante $\mathbf{A}$, orientato, per esempio, lungo uno degli assi coordinati, dalla (19) si ricava immediatamente che $\nabla \times \mathbf{A} = 0$; il campo è irrotazionale ed altresì ha circuitazione nulla.

### II 7.4. Gradiente

Consideriamo una grandezza scalare $\varphi(x, y, z)$, funzione della posizione, continua e derivabile nel campo in cui è definita. Il differenziale

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz,$$

può essere interpretato come il prodotto scalare di due vettori $\mathbf{A}$ e $\overrightarrow{dP}$:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{dP} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}.$$

Il vettore $\mathbf{A}$, le cui componenti rappresentano il tasso di variazione della funzione $\varphi$ secondo gli assi cartesiani, si chiama *gradiente* della grandezza scalare considerata. Il vettore $\overrightarrow{dP}$, nel campo di definizione della grandezza rappresenta lo spostamento elementare, in corrispondenza al quale tale grandezza passa dal valore

$\varphi$ al valore $\varphi + d\varphi$. Il gradiente viene indicato col simbolo $\nabla$, definito dalla (10); pertanto:

$$\mathbf{A} = \mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi. \tag{22}$$

Si ha dunque:

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot \overrightarrow{dP} = |\nabla\varphi| dP \cos\theta, \tag{23}$$

dove $\theta$ è l'angolo formato dal vettore gradiente con lo spostamento $\overrightarrow{dP}$. Si deduce che la direzione lungo la quale la variazione di $\varphi$ è massima è quella di $\nabla\varphi$. Il gradiente è pertanto un vettore il cui modulo e la cui direzione individuano la variazione massima della funzione considerata. Esso è ovviamente invariante per trasformazioni di coordinate.

### 7.5. Laplaciano

Si definisce laplaciano l'operatore che si ottiene mediante l'operazione di divergenza del gradiente; in coordinate cartesiane si ha:

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla \cdot \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k} \right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \nabla^2\varphi. \tag{24}$$

Analogamente, il laplaciano di un vettore $\mathbf{A}$, in coordinate cartesiane, è definito dalla relazione:

$$\nabla^2\mathbf{A} = \nabla^2 A_x\mathbf{i} + \nabla^2 A_y\mathbf{j} + \nabla^2 A_z\mathbf{k}. \tag{25}$$

L'operatore di Laplace è invariante per trasformazioni di coordinate perché risultato di due operazioni invariantive.