5. Cinematica relativa

1. Introduzione

Nei capitoli precedenti abbiamo insistito sulla necessità di fissare una terna di riferimento rispetto alla quale descrivere il moto di un punto o di una particella. Tale descrizione, pur rappresentando una ben determinata realtà fisica, è diversa se si cambia terna di riferimento. In particolare se, in una certa terna, la posizione del punto non cambia nel tempo, il punto sarà in quiete relativa rispetto ad essa, mentre rispetto ad un'altra terna può apparire in movimento. Quando un treno passa in una stazione, diciamo che il treno è in moto rispetto alla stazione; un passeggero che si trova sul treno potrebbe dire con altrettanto fondamento che la stazione è in moto rispetto al treno. Un osservatore fisso sulla strada percorsa da un veicolo vede un punto della circonferenza di una ruota del veicolo descrivere una cicloide; l'osservatore che si trova sul veicolo vede lo stesso punto descrivere una circonferenza. Gli esempi potrebbero essere infiniti e da tutti si può trarre la conclusione che la quiete ed il moto sono concetti relativi. Tuttavia se gli osservatori conoscono il loro moto relativo, possono correlare le loro rispettive descrizioni. In particolare se le terne di riferimento sono fisse, tali cioè che la loro mutua posizione rimanga costante nel tempo, il moto del punto, a parte la sua posizione iniziale, nelle due terne è descritto nello stesso modo.

In generale consideriamo una terna $\Omega\xi\eta\zeta$ che diciamo $fissa$, ed una seconda terna $Oxyz$ mobile rispetto alla prima; le equazioni del moto di un punto nelle due terne, sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} &\xi = \xi(t), \qquad &&\eta = \eta(t), \qquad &&\zeta = \zeta(t), \\ &x = x(t), \qquad &&y = y(t) \qquad &&z = z(t) \end{aligned}$$

Le seconde sono le equazioni del moto giudicate dall'osservatore mobile, che dice se stesso fisso e prescinde dal proprio movimento rispetto all'osservatore della prima terna; esse definiscono il moto relativo. Per contro il moto definito dalle prime si chiama moto assoluto. Si badi però che si tratta solo di due nomi e basta; nessun carattere di privilegio ha il moto del punto rispetto ad Ω

nei riguardi del moto dello stesso punto rispetto ad O. Sarebbe più giusto abbandonare tale terminologia in uso e dire: moto M rispetto ad Ω e moto M' rispetto ad O.

Il legame tra il moto M ed il moto M' e viceversa, è dato dalle relazioni che in geometria trasformano le coordinate della terna $\Omega\xi\eta\zeta$ nelle coordinate della terna $Oxyz$ e dalle relazioni inverse.

Va osservato che nei secoli scorsi la possibilità di definire un riferimento assoluto, in quiete rispetto allo spazio vuoto, è stata oggetto di discussioni molto controverse da parte di fisici e filosofi. Questo perché si pensava che lo spazio vuoto fosse riempito da un misterioso fluido, dotato di proprietà straordinarie e contraddittorie, chiamato *etere cosmico*; quindi era logico pensare che i fenomeni fisici potessero essere descritti senza ambiguità in un riferimento in quiete rispetto all'etere. Quando l'idea di etere cosmico, perché inutile, fu abbandonata, risultò impossibile definire un riferimento assoluto perché lo spazio vuoto non ha elementi che possano essere presi come punti di riferimento. Ciò che al meglio si può fare è definire un particolare riferimento in quiete rispetto a certe stelle che sono fisse nello spazio cosmico. Così tutti gli altri riferimenti possono essere definiti rispetto a quest'ultimo; in particolare le infinite terne fisse o in moto traslatorio uniforme rispetto alla terna legata alle stelle fisse si chiamano *terne o riferimenti inerziali.*

Esempio

1. In una terna fissa il moto rettilineo ed uniforme di un punto ha equazioni

$$\xi = vt + \xi_0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0. \tag{1}$$

Una terna mobile, avente origine ed asse z coincidenti con quella fissa, ruota uniformemente attorno al comune asse $z \equiv \zeta$. Determinare il moto relativo del punto.

Le equazioni di trasformazione delle coordinate dalla terna fissa a quella mobile e le inverse, sono

$$\begin{aligned} \xi &= x\cos\theta - y\sin\theta \qquad & x &= \xi\cos\theta + \eta\sin\theta \\ \eta &= x\sin\theta + y\cos\theta \qquad & y &= -\xi\sin\theta + \eta\cos\theta \end{aligned}$$

Sostituendo le (1) nelle equazioni di trasformazione inverse, si ottengono i moti componenti nella terna mobile:

$$x = (vt + \xi_0)\cos\omega t, \qquad y = -(vt + \xi_0)\sin\omega t, \tag{2}$$

dove $\theta = \omega t$ ed ω è la velocità angolare, costante, della terna mobile.

Le equazioni del moto ottenute si possono esprimere in coordinate polari. Quadrando e sommando le (2), si ottiene

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = vt + \xi_0,$$

e poiché

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x},$$

dal rapporto delle (2) si ha:

$$\theta = -\omega t.$$

Quindi

$$\rho = vt + \xi_0, \qquad \theta = -\omega t.$$

Infine, eliminando il tempo:

$$\rho = -\frac{v}{\omega}\theta + \xi_0,$$

che è l'equazione della spirale di Archimede mostrata in figura 1, per $\xi_0 = 0$.

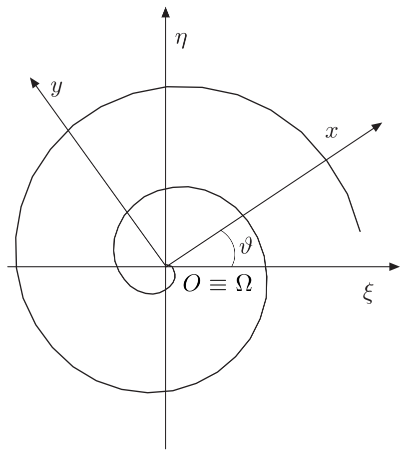

Fig. 5.1

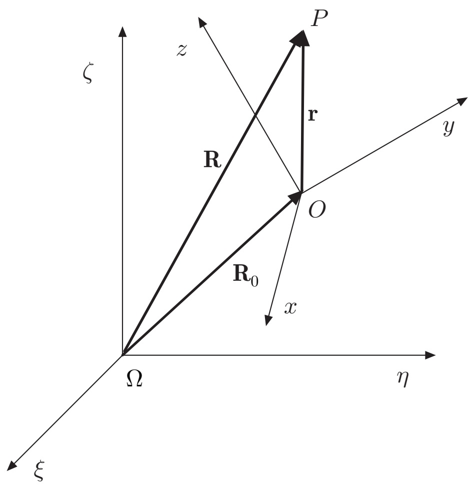

Fig. 5.2

2. Velocità nei moti relativi

Consideriamo due terne di riferimento: una fissa con origine in Ω e l'altra con origine in O, mobile rispetto alla prima; siano $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_0$ ed $\mathbf{r}$ i vettori che rispettivamente individuano la posizione del punto nella terna fissa, la posizione dell'origine della terna mobile rispetto alla terna fissa e la posizione del punto rispetto alla terna mobile. Osservando la figura 2 si ha

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}. \tag{3}$$

Per ottenere la relazione tra le velocità nei due riferimenti, scriviamo la (3) come

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r} = \mathbf{R}_0 + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

dove con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, indichiamo i versori degli assi della terna mobile. Derivando rispetto al tempo e tenendo presente che i versori della terna mobile, sono funzioni del tempo, cioè cambiano orientazione istante per istante, si ha

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_0 + \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}. \tag{4}$$

Ricordando le formule di Poisson, equazione (19)-III,

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k},$$

e sostituendo nella (4), si ottiene

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_0 + \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}). \tag{5}$$

$\dot{\mathbf{R}}_0$ è la velocità dell'origine O della terna mobile rispetto a quella fissa; $\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k}$ è la velocità del punto rispetto alla terna mobile, che chiamiamo velocità relativa $\mathbf{v}_r$; $\boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ è la velocità che compete al punto nel movimento polare della terna mobile.

Indicando con

$$\mathbf{v}_t = \dot{\mathbf{R}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

la velocità di trascinamento, si ottiene

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_r. \tag{6}$$

La velocità assoluta è somma della velocità di trascinamento e della velocità relativa. Dunque la velocità relativa risulta:

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}_t.$$

Se le origini delle due terne coincidono e quella mobile si muove di movimento polare o rotatorio con asse fisso, risulta $\mathbf{v}_t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Se la terna mobile si muove di moto traslatorio si ha $\mathbf{v}_t = \dot{\mathbf{R}}_0$, e se, in particolare, $\mathbf{v}_t$ è costante, le terne sono inerziali. In tal caso per la (3) si ha

$$\mathbf{R} = \mathbf{v}_t t + \mathbf{r}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{v}_t t, \tag{7}$$

che proiettate sugli assi coordinati costituiscono le *trasformazioni di Galilei* (relatività galileana). Esse non sono altro che le formule di trasformazione di coordinate di due terne in moto relativo uniforme. Se, in particolare, la velocità di trascinamento è diretta lungo l'asse x, si ha

$$\xi = v_t t + x, \qquad x = \xi - v_t t, \qquad \eta = y, \qquad \zeta = z.$$

2.1. Velocità relativa di due particelle

Siano A e B due particelle animate di velocità $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$, rispetto ad un riferimento fisso; se immaginiamo che A sia ferma in un riferimento solidale con essa, che dunque si muova con velocità di trascinamento v_A, allora per la (6), v_B può essere espressa come somma della velocità di trascinamento e della velocità relativa di B rispetto ad A:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A. \tag{8}$$

Analogamente per la velocità di A rispetto a B

$$\mathbf{v}_{AB} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{BA} = -\mathbf{v}_{AB}, \tag{9}$$

Le (8) e (9) si possono anche dimostrare considerando il riferimento fisso, figura 3, in cui le due particelle sono individuate dai vettori $\mathbf{r}_A$ ed $\mathbf{r}_B$; si ha:

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}, \qquad \mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt};$$

ed essendo $\mathbf{r}_{BA} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, segue

$$\frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A,$$

e viceversa.

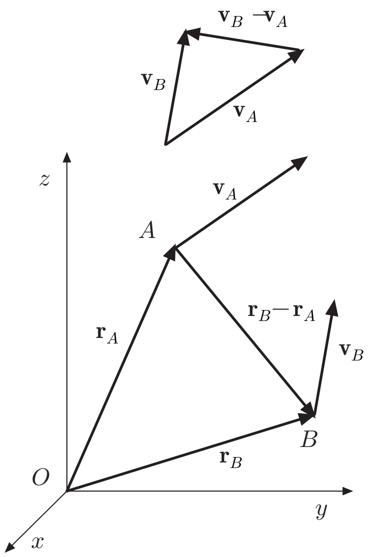

Fig. 5.3

Esempi

2. Un aereo A vola in direzione nord con velocità $v_A = 400\,km/h$ rispetto al suolo. Un altro aereo B, vola in direzione $N\,60°\,O$ con velocità $v_B = 300\,km/h$, anch'essa rispetto al suolo. Trovare il modulo delle velocità relative $\mathbf{v}_{BA}$, $\mathbf{v}_{AB}$ e le rispettive direzioni.

Le velocità relative sono opposte, $\mathbf{v}_{BA} = -\mathbf{v}_{AB}$. Dalla figura 4 risulta

$$v_{AB} = v_{BA} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos 60°} = 360,5\,km/h.$$

La direzione si ricava da

$$\frac{v_B}{\sin\varphi} = \frac{v_{AB}}{\sin 60°}, \qquad \sin\varphi = \frac{v_B}{v_{AB}}\sin 60° = 0,72, \qquad \varphi = 46,1°.$$

L'aereo B vede A viaggiare in direzione $N\,46,1°\,E$, ed A vede B viaggiare in direzione $S\,46,1°\,O$.

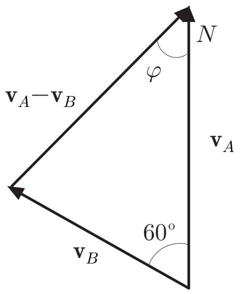

Fig. 5.4

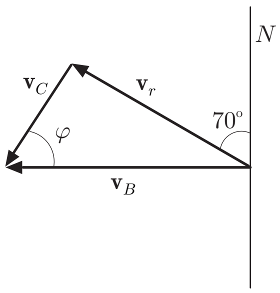

Fig. 5.5

3. Una barca si muove su uno specchio d'acqua dove è presente una corrente. La velocità della barca rispetto alla corrente è di $4\,km/h$ ed ha direzione $N\,60°\,O$, mentre rispetto alla terra è di $5\,km/h$ con direzione ovest. Trovare velocità e direzione della corrente rispetto alla terra.

Dalla figura 5, indicando con v_r la velocità della barca rispetto alla corrente, con v_B e v_C le velocità della barca e della corrente rispetto alla terra, si ha

$$v_C = \sqrt{v_B^2 + v_r^2 - 2v_B v_r \cos 30°} = 2,52\,km/h.$$

La direzione si ricava da

$$\frac{v_r}{\sin\varphi} = \frac{v_C}{\sin 30°}, \qquad \sin\varphi = \frac{v_r}{v_C}\sin 30° = 0,79, \qquad \varphi = 52,52°;$$

oppure $S\,37,48°\,O$.

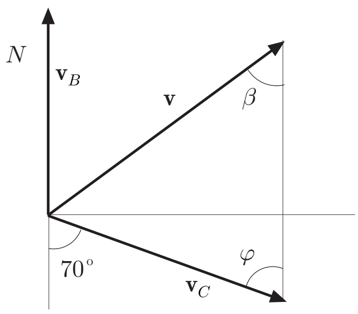

Fig. 5.6

4. La velocità di una barca che viaggia verso N, su acqua in quiete, è $v_B = 10\,km/h$. Trovare la velocità $\mathbf{v}$ della barca, in modulo e direzione, quando sullo specchio d'acqua è presente una corrente di velocità $v_C = 2\,km/h$, diretta verso $S\,70°\,E$.

Si ha

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_C,$$

e poiché, figura 6, l'angolo tra corrente e barca è $\theta = 110°$, il modulo della velocità della barca risulta

$$v = \sqrt{v_B^2 + v_C^2 + 2v_B v_C \cos\theta} = 9,5\,km/h.$$

Per trovare la direzione, si considerino gli angoli β e φ della figura; si ha

$$\frac{v_C}{\sin\beta} = \frac{v}{\sin\varphi}, \qquad \sin\beta = \frac{v_C \sin 70°}{v} = 0,197, \qquad \beta = 11,41°.$$

Dunque la direzione lungo cui procede la barca è $\beta = N\,11,41°\,E$.

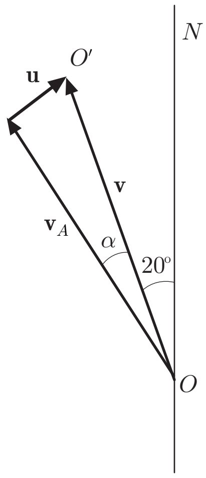

Fig. 5.7

5. La velocità di un aereo in aria calma è $v_A = 200\,km/h$. Il pilota deve recarsi da un punto O ad un altro O' situato a $N\,20°\,O$, sfruttando l'azione favorevole del vento che soffia a velocità $u = 30\,km/h$ in direzione $N\,40°\,E$. Trovare la velocità assoluta dell'aereo e la direzione lungo cui deve avanzare.

Indicando rispettivamente con $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}_A$ la velocità assoluta e la velocità relativa al vento dell'aereo, dalla figura 7 si ha

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \mathbf{u}.$$

L'angolo α tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}_A$ si ottiene da

$$\frac{v_A}{\sin 60°} = \frac{u}{\sin\alpha}, \qquad \sin\alpha = \frac{u\sin 60°}{v_A} = 0,13, \qquad \alpha = 7,47°.$$

Dunque il pilota deve puntare in direzione $N\,27,47°\,O$. Il modulo di $\mathbf{v}$ è

$$v = \sqrt{v_A^2 + u^2 + 2v_A u\cos 67,47°} = 213\,km/h.$$

La velocità $\mathbf{v}$ dipende dalla velocità vento; in particolare l'aereo non potrà raggiungere O' se $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{u}$ sono opposti.

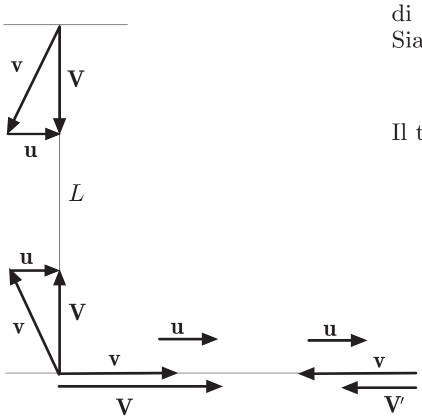

Fig. 5.8

6. Un aereo proveniente da sud deve recarsi in una località situata a nord e distante L, mentre un vento soffia verso est con velocità $\mathbf{u}$. Trovare il tempo di andata e ritorno sapendo che la velocità dell'aereo rispetto al vento è $\mathbf{v}$. Sia $\mathbf{V}$ la velocità assoluta dell'aereo; dalla figura 8 si ha

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \qquad V = \sqrt{v^2 - u^2}.$$

Il tempo di andata e ritorno è

$$t_1 = \frac{2L}{\sqrt{v^2 - u^2}} = \frac{2L}{v\sqrt{1 - (u/v)^2}},$$

maggiore del tempo impiegato in assenza di vento, quando $v = V$. Lo stesso ragionamento vale se il vento soffia verso ovest.

Supponiamo ora che il cammino L venga percorso nella direzione del vento; allora $V = v + u$, e l'aereo impiega il tempo $L/(v + u)$. Al ritorno, essendo il vento sfavorevole, la sua velocità è $V = v - u$ ed il tempo impiegato risulta $L/(v - u)$. La durata del viaggio di andata e ritorno è

$$t_2 = \frac{2Lv}{v^2 - u^2} = \frac{2L}{v[1 - (u/v)^2]}.$$

Il rapporto tra i tempi t_1 e t_2 risulta:

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{v}\right)^2};$$

come si vede $t_1 < t_2$.

Supponiamo di sostituire all'aereo un raggio di luce di velocità c che viaggia in una corrente di *etere*, quale è quella che dovrebbe rilevare un osservatore solidale con la terra per effetto del suo moto rispetto all'etere. In accordo col risultato precedente, tale osservatore dovrebbe ottenere per i tempi impiegati dalla luce a percorrere il medesimo percorso in un senso e nel senso opposto, valori diversi a seconda se questo percorso è orientato nella direzione del moto della terra rispetto all'etere, oppure trasversalmente a questa direzione. La diversità dei due tempi, pur essendo del secondo ordine rispetto al rapporto tra la velocità di rivoluzione della terra ($30\,km/s$) e quella della luce ($300.000\,km/s$), dovrebbe essere rilevata nell'esperienza di Michelson e Morley. Ciò non si verifica.

L'esperienza mostra che, quando v è la velocità della luce, risulta $t_1 = t_2$. Ciò significa che il modulo della velocità di propagazione della luce non è influenzato dal moto dell'osservatore. Questo risultato costituisce uno dei fondamenti della teoria della relatività.

7. Una barca a vela viaggia verso N con velocità $v_B = 10\,km/h$. La bandierina sul pennone della barca indica un vento in direzione $O\,45°\,S$, mentre una bandierina sulla terraferma indica un vento in direzione $O\,30°\,S$. Trovare la velocità del vento rispetto alla terra e rispetto alla barca.

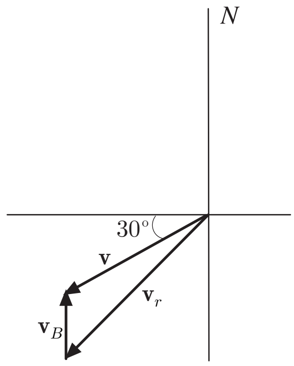

Fig. 5.9

Dalla figura 9, indicando con $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}_B$ le velocità del vento e della barca rispetto alla terraferma e con $\mathbf{v}_r$ la velocità del vento rispetto alla barca, si ha

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_r.$$

Per il teorema dei seni:

$$\frac{v}{\sin 45°} = \frac{v_B}{\sin 15°} = \frac{v_r}{\sin 120°},$$

da cui

$$v = v_B \frac{\sin 45°}{\sin 15°} = 27,32\,km/h,$$

$$v_r = v_B \frac{\sin 120°}{\sin 15°} = 33,46\,km/h.$$

8. Un corpo ruota uniformemente attorno ad un asse che, a sua volta, ruota uniformemente attorno ad un asse fisso. I due assi hanno un punto in comune O; determinare il moto assoluto del corpo.

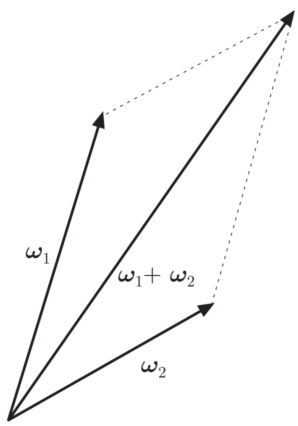

Fig. 5.10

Sia $\boldsymbol{\omega}_1$ la velocità angolare del corpo rispetto all'asse mobile ed $\boldsymbol{\omega}_2$ la velocità angolare dell'asse mobile attorno all'asse fisso, figura 10. La velocità relativa del generico punto P del corpo è

$$\mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r},$$

con $\mathbf{r}$ distanza di P da O; la velocità di trascinamento è

$$\mathbf{v}_t = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}.$$

La velocità assoluta risulta

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_t = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}.$$

Il moto assoluto è polare e l'atto di moto in ogni istante è rotatorio attorno ad un asse diretto come la diagonale del parallelogramma e velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.

3. Accelerazione nei moti relativi

Al fine di ricavare la relazione tra le accelerazioni nei moti relativi deriviamo la (4) rispetto al tempo; si ha

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{R}} &= \ddot{\mathbf{R}}_0 + \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} + \dot{x}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\mathbf{k}}{dt} \\
&\quad + \dot{x}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\mathbf{k}}{dt} + x\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\mathbf{k}}{dt^2} \\
&= \ddot{\mathbf{R}}_0 + (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}) + 2\left(\dot{x}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right) \\
&\quad + \left(x\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\mathbf{k}}{dt^2}\right).
\end{aligned}
$$

Usando le formule di Poisson e le loro derivate,

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{i} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{i}}{dt}, \\
\frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2} &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{j} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{j}}{dt}, \\
\frac{d^2\mathbf{k}}{dt^2} &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{k}}{dt},
\end{aligned}
$$

la precedente diventa

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{R}} &= \ddot{R}_0 + (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}) + 2[\dot{x}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}) + \dot{y}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}) + \dot{z}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k})] \\
&\quad + x\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{i} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i})\right] + y\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{j} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j})\right] \\
&\quad + z\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k})\right].
\end{aligned}
$$

Raccogliendo i vari termini si ottiene

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{R}} &= \ddot{\mathbf{R}}_0 + (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}) + 2\boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) \\
&\quad + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})] \qquad (10) \\
&= \ddot{\mathbf{R}}_0 + \mathbf{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).
\end{aligned}
$$

Definiamo accelerazione di trascinamento la quantità

$$
\mathbf{a}_t = \ddot{\mathbf{R}}_0 + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}); \qquad (11)
$$

il primo termine è l'accelerazione di traslazione del riferimento mobile, il secondo e il terzo termine dipendono dal moto polare del riferimento intorno all'origine O; in particolare, il secondo termine è l'accelerazione tangenziale del punto; il terzo termine l'accelerazione centripeta.

In definitiva la relazione che lega le accelerazioni nei due riferimenti si scrive

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r; \tag{12}$$

da cui

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r. \tag{13}$$

L'accelerazione misurata nel riferimento assoluto o fisso, come quella misurata nel riferimento mobile, consta di tre termini: accelerazione di trascinamento, accelerazione relativa ed accelerazione complementare o di Coriolis, quest'ultima data da:

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

Si osserva subito che contrariamente a quanto avviene per la velocità, in cui si ha un termine di trascinamento e un termine relativo, nel caso dell'accelerazione compare un terzo termine che, come s'è detto, è chiamata *accelerazione Coriolis* o anche *accelerazione di deviazione*. Essendo quest'ultima definita da un prodotto vettoriale, risulta nulla quando la velocità angolare della terna mobile è nulla, cioè se questa si muove di moto traslatorio, quando la velocità relativa del punto è nulla oppure quando velocità angolare e velocità relativa sono parallele.

Si osservi che un riferimento legato alla terra non è un riferimento inerziale, pertanto non lo possiamo ritenere assoluto o fisso; in queste condizioni l'accelerazione misurata da un osservatore legato alla terra è data dalla (13). L'accelerazione di Coriolis, essendo $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare di rotazione della terra, dipende dal vettore velocità di cui è animato il punto. Per esempio, se un corpo si muove ortogonalmente alla superficie terrestre, tale accelerazione è nulla ai poli e massima all'equatore; essa in generale è piuttosto modesta in quanto la velocità angolare di rotazione della terra è piccola, tuttavia poiché dipende dalla velocità relativa del corpo, può avere effetti importanti, come vedremo in dinamica relativa.

Passiamo a considerare alcuni casi particolari. Quando le origini delle due terne coincidono e la terna mobile è animata da movimento polare $\ddot{\mathbf{R}}_0 = 0$, l'accelerazione di trascinamento risulta

$$\mathbf{a}_t = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Se inoltre il vettore velocità angolare è costante, il moto è piano e l'accelerazione di trascinamento si riduce al termine centripeto. Si noti che, per la (13), nel riferimento mobile il termine di trascinamento compare col segno negativo, ciò significa che il vettore $-\mathbf{a}_t$ è opposto all'accelerazione centripeta; chiamiamo questo vettore *accelerazione centrifuga*.

Quando la terna mobile è animata di moto traslatorio l'accelerazione assoluta è somma dell'accelerazione di trascinamento

$\ddot{\mathbf{R}}_0$ e dell'accelerazione relativa $\mathbf{a}_r$. Ancora, se il moto della terna mobile è traslatorio uniforme, l'accelerazione misurata nelle due terne è la stessa, le due terne sono inerziali; è impossibile distinguere con esperimenti di meccanica, quale delle due terne è in moto rispetto all'altra. In altri termini due osservatori in moto relativo uniforme non possono riconoscere il moto assoluto.

Questo principio di relatività fu enunciato da Galilei nel XVII secolo ma solo alla fine del secolo scorso, in seguito al risultato negativo dell'esperienza di Michelson e Morley, che con una accurata misura della velocità della luce rispetto alla terra tendeva a rivelare il moto assoluto della terra rispetto all'etere cosmico, fu rienunciato come legge universale da Einstein e Poincaré.

Il grande precursore è stato dunque Galilei, il quale nel Dialogo dei Massimi Sistemi dice: "... Rinserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dendrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso le pareti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazi passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in la) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete compreder se la nave cammina o pure sta ferma: voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazi che prima, né, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con più forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso la prua e voi verso la poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le gocciole cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella lor acqua non con più fatica noteranno verso la precedente che verso la susseguente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente veso tutte le parti, né mai accaderà che si riduchino verso la parte che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave, dalla quale per lungo tempo trattenendosi per aria, saranno state separate; e se abbruciando alcuna lagrima d'incenso si farà un poco di fumo, vedrassi ascender in alto ed a guisa di nugoletta trattenervisi, e indifferentemente muoversi non più verso quella che questa parte."

3.1. Accelerazione relativa di due particelle

L'accelerazione relativa tra due particelle si definisce con procedimento analogo a quello che ha condotto alle (8) e (9). Derivando queste ultime rispetto al tempo, si ha

$$\mathbf{a}_{AB} = \mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B, \qquad \mathbf{a}_{BA} = -\mathbf{a}_{AB}. \tag{14}$$

Esempi

9. Un riferimento mobile che ha origine ed asse z coincidenti con un riferimento fisso, ruota con velocità angolare costante attorno all'asse comune $z \equiv \zeta$. Determinare le relazioni tra velocità ed accelerazioni nel moto di un punto che si svolge nel piano ortogonale all'asse di rotazione.

Indicando con ξ, η le coordinate del riferimento fisso e con x, y quelle del riferimento mobile, le equazioni di trasformazione di tali coordinate, come già visto, sono

$$\begin{aligned} \xi &= x cos\theta - y\sin\theta = x\cos\omega t - y\sin\omega t \\ \eta &= x\sin\theta + y\cos\theta = x\cos\omega t + y\sin\omega t. \end{aligned} \tag{15}$$

Derivando rispetto al tempo

$$\begin{aligned} \dot\xi &= \dot x cos\omega t - \dot y\sin\omega t - \omega(x\sin\omega t + y\cos\omega t) \\ \dot\eta &= \dot x\sin\omega t + \dot y\cos\omega t + \omega(x\cos\omega t - y\sin\omega t); \end{aligned} \tag{16}$$

La velocità relativa, conformemente alle (15), nel riferimento fisso ha componenti

$$\begin{aligned} v_x &= \dot x\cos\omega t - \dot y\sin\omega t \\ v_y &= \dot x\sin\omega t + \dot y\cos\omega t. \end{aligned}$$

La velocità di trascinamento, $\mathbf{v}_t = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, di sola rotazione perché le terne hanno origini coincidenti, nel riferimento fisso ha componenti che si ricavano da:

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \xi & \eta & 0 \end{pmatrix} = -\omega(\eta\mathbf{i} - \xi\mathbf{j}).$$

ossia

$$\begin{aligned} v_{tx} &= -\omega(x\sin\omega t + y\cos\omega t) \\ v_{ty} &= \omega(x\cos\omega t - y\sin\omega t). \end{aligned}$$

In conformità alla relazione $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_t$, le componenti della velocità secondo gli assi fissi, date dalle (16), risultano somma delle componenti della velocità relativa e di quelle della velocità di trascinamento.

Derivando le (16) rispetto al tempo, si ottiene:

$$\begin{aligned} \ddot\xi &= (\ddot x\cos\omega t - \ddot y\sin\omega t) - \omega^2(x\cos\omega t - y\sin\omega t) \\ &\quad - 2\omega(\dot x\sin\omega t + \dot y\cos\omega t) \\ \ddot\eta &= (\ddot x\sin\omega t + \ddot y\cos\omega t) - \omega^2(x\sin\omega t + y\cos\omega t) \\ &\quad + 2\omega(\dot x\cos\omega t - \dot y\sin\omega t). \end{aligned} \tag{17}$$

Si trova che ciascuna componente dell'accelerazione consta di tre termini. Il primo termine è la componente dell'accelerazione relativa, il secondo la componente dell'accelerazione di trascinamento, centripeta, il terzo la componente del prodotto vettoriale $2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r$; infatti

$$2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r = 2\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_x & v_y & 0 \end{pmatrix} = -2\omega(v_y\mathbf{i} - v_x\mathbf{j}).$$

Si verifica dunque che l'accelerazione assoluta è somma dell'accelerazione relativa, dell'accelerazione di trascinamento e dell'accelerazione di Coriolis.

Casi particolari

a) Punto fermo nel riferimento ruotante ($\dot x = 0$, $\dot y = 0$).

Le (16) diventano

$$\begin{aligned} \dot\xi &= -\omega(x\sin\omega t + y\cos\omega t) = -\omega\eta \\ \dot\eta &= \omega(x\cos\omega t - y\sin\omega t) = \omega\xi; \end{aligned}$$

il moto è circolare uniforme con velocità di modulo

$$v = \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} = \sqrt{\omega^2 R^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = \omega r.$$

Analogamente, le (17) risultano:

$$\ddot{\xi} = -\omega^2(x \cos\omega t - y \sin\omega t) = -\omega^2 \xi$$
$$\ddot{\eta} = -\omega^2(x \sin\omega t + y \cos\omega t) = -\omega^2 \eta;$$

l'accelerazione è quella di trascinamento, centripeta:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t = -\omega^2 \mathbf{r}.$$

b) Punto fermo nel riferimento fisso ($\dot{\xi} = 0$, $\dot{\eta} = 0$).
Le (16) diventano

$$\dot{x} \cos\omega t - \dot{y} \sin\omega t - \omega(x \sin\omega t + y \cos\omega t) = 0$$
$$\dot{x} \sin\omega t + \dot{y} \cos\omega t + \omega(x \cos\omega t - y \sin\omega t) = 0.$$

Raccogliendo i termini che contengono $\sin\omega t$ e $\cos\omega t$, si ha

$$(\dot{x} - \omega y) \cos\omega t - (\dot{y} + \omega x) \sin\omega t = 0$$
$$(\dot{y} + \omega x) \cos\omega t + (\dot{x} - \omega y) \sin\omega t = 0.$$

Queste relazioni, poiché $\sin\omega t$ e $\cos\omega t$ non sono mai contemporaneamente nulli, comportano

$$\begin{aligned} \dot{x} - \omega y &= 0 \\ \dot{y} + \omega x &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \omega y \\ \dot{y} &= -\omega x \end{aligned} \tag{18}$$

L'osservatore ruotante, per esempio in senso antiorario, vede il punto ruotare in senso orario; infatti è

$$\dot{x} = v \sin\omega t = \omega r \sin\omega t = \omega y$$
$$\dot{y} = -v \cos\omega t = -\omega r \cos\omega t = -\omega x.$$

Per quanto riguarda l'accelerazione, essendo $\ddot{\xi} = 0$, $\ddot{\eta} = 0$, con lo stesso criterio di prima, si ha

$$(\ddot{x} - \omega^2 x - 2\omega\dot{y}) \cos\omega t + (\omega^2 y - \ddot{y} - 2\omega\dot{x}) \sin\omega t = 0$$
$$(\ddot{y} - \omega^2 y + 2\omega\dot{x}) \cos\omega t + (\ddot{x} - \omega^2 x - 2\omega\dot{y}) \sin\omega t = 0,$$

le quali comportano

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \omega^2 x + 2\omega\dot{y} \\ \ddot{y} &= \omega^2 y - 2\omega\dot{x}. \end{aligned} \tag{19}$$

Sostituendo a $\dot{x}$ e $\dot{y}$ le (18), si ottiene

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad \ddot{y} = -\omega^2 y \tag{20}$$

L'accelerazione risultante è rivolta verso il centro e la potremmo chiamare centripeta. Però bisogna fare attenzione; essa risulta, nelle (19), dalla somma delle componenti dell'accelerazione di trascinamento e dell'accelerazione di Coriolis cambiate di segno. Questa circostanza merita un commento che si può capire meglio considerando le relazioni vettoriali; se $\mathbf{a} = 0$, dalla (13) si ha:

$$\mathbf{a}_r = -\mathbf{a}_t - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r; \tag{21}$$

ma $-\mathbf{a}_t = -(-\omega^2 \mathbf{r}) = \omega^2 \mathbf{r}$ che, vista dall'osservatore ruotante, è l'accelerazione *centrifuga*; essa è diretta lungo il raggio della traiettoria circolare e volge verso l'esterno; inoltre l'accelerazione di Coriolis cambiata di segno, è anch'essa diretta lungo il raggio ma volge verso il centro della circonferenza. La loro somma dà il risultato trovato; infatti in termini di componenti della (21), otteniamo le (19) e quindi la (20).

10. Determinare le relazioni tra velocità ed accelerazioni nel moto dell'esempio 1.

Derivando rispetto al tempo le equazioni del moto (2), si ottengono le componenti della velocità nel riferimento ruotante:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v\cos\omega t - \omega(vt+\xi_0)\sin\omega t \\ \dot{y} &= -v\sin\omega t - \omega(vt+\xi_0)\cos\omega t. \end{aligned} \tag{22}$$

La velocità assoluta, diretta come l'asse ξ, nel riferimento mobile, ha componenti

$$v_x = v\cos\omega t, \qquad v_y = -v\sin\omega t.$$

La velocità di trascinamento, $\mathbf{v}_t = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, secondo gli assi mobili, ha componenti

$$\begin{aligned} v_{tx} &= -\omega y = \omega(vt+\xi_0)\sin\omega t \\ v_{ty} &= \omega x = \omega(vt+\xi_0)\cos\omega t. \end{aligned}$$

In conformità alla relazione $\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}_t$, le (22) sono uguali alla differenza tra le componenti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}_t$.

Le componenti dell'accelerazione relativa si ottengono derivando le (22):

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -2v\omega\sin\omega t - \omega^2(vt+\xi_0)\cos\omega t \\ \ddot{y} &= -2v\omega\cos\omega t + \omega^2(vt+\xi_0)\sin\omega t. \end{aligned} \tag{23}$$

L'accelerazione assoluta è nulla; l'accelerazione di trascinamento, secondo gli assi mobili, ha componenti

$$\begin{aligned} a_{tx} &= -\omega^2 x = -\omega^2(vt+\xi_0)\cos\omega t \\ a_{ty} &= -\omega y = \omega^2(vt+\xi_0)\sin\omega t. \end{aligned} \tag{24}$$

Le componenti dell'accelerazione di Coriolis, $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r$, secondo gli assi mobili sono:

$$\begin{aligned} a_{cx} &= 2v\omega\sin\omega t + 2\omega^2(vt+\xi_0)\cos\omega t \\ a_{cy} &= 2v\omega\cos\omega t - 2\omega^2(vt+\xi_0)\sin\omega t. \end{aligned} \tag{25}$$

Conformemente alla

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t - 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r,$$

le (23) risultano dalla somma cambiata di segno delle (24) e (25).