4. Cinematica Moti particolari

1. Moto rettilineo

Nel moto rettilineo la traiettoria è una retta. Fissando su questa un'origine O, l'orientazione e l'ascissa x, tutte le grandezze vettoriali che caratterizzano il moto, (spostamento, velocità, accelerazione) risultano perfettamente determinate in modulo e direzione; non occorre quindi usare la notazione vettoriale. La legge oraria del moto sarà del tipo: $x = x(t)$; lo spostamento del punto da una posizione x_1 ad una posizione x_2 sarà dato da $\Delta x = x_2 - x_1$, come mostrato in figura 1, dove x_0 indica la posizione del punto all'istante $t = 0$.

Fig. 4.1

La velocità media è definita dal rapporto tra lo spostamento del punto ed il corrispondente intervallo di tempo:

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Il moto rettilineo è uniforme allorché la velocità $\mathbf{v}$ è costante, quindi ha modulo e direzione costanti lungo l'asse del moto. Il punto percorre spazi uguali in tempi uguali; la velocità media coincide con la velocità istantanea.

Se all'istante iniziale, $t = 0$, il punto occupa la posizione iniziale x_0 si ha:

$$v = \frac{x - x_0}{t} \quad \Rightarrow \quad x = vt + x_0, \tag{1}$$

che rappresenta la legge oraria del moto rettilineo uniforme; essa è una legge lineare il cui grafico è mostrato in figura 2.

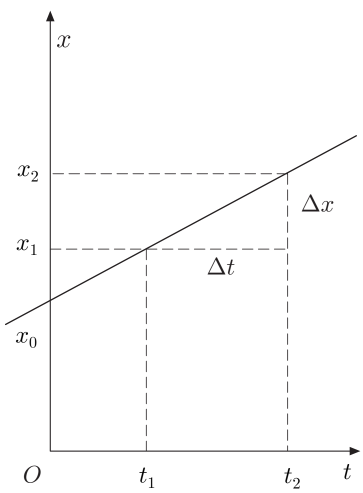


Fig. 4.2

Si osservi che considerando due valori generici del tempo, t_1 e t_2 ed i corrispondenti valori di x_1 e x_2, il rapporto

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

è sempre costante ed uguale al valore numerico della tangente dell'angolo θ, figura 2; esso è anche il coefficiente angolare della retta che rappresenta la legge oraria. Se, in particolare, tale coefficiente è negativo il moto del punto avviene in verso opposto a quello fissato come positivo. Naturalmente la velocità istantanea del punto è la derivata della (1) rispetto al tempo e fornisce il valore v costante.

Il moto rettilineo è uniformemente accelerato se l'accelerazione **a** è costante, cioè ha modulo e direzione costanti lungo l'asse del moto. Tipico esempio è l'accelerazione di gravità, diretta lungo la verticale alla superficie terrestre, dove si può ritenere costante in una regione sufficientemente ampia.

L'equazione oraria del moto rettilineo con accelerazione costante, che ricaveremo più avanti, è data da:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0, \tag{2}$$

dalla quale per derivazione si ottengono velocità e accelerazione:

$$\dot{x} = v = at + v_0, \qquad \ddot{x} = a; \tag{3}$$

Le grandezze x_0 e v_0 rappresentano posizione e velocità iniziali del punto all'istante $t = 0$.

L'equazione oraria (2) è rappresentata graficamente da una parabola ad asse verticale, la velocità da una retta, l'accelerazione da una retta parallela all'asse dei tempi, che ne indica il valore costante. La concavità della parabola è volta verso l'alto se $a > 0$, al contrario se $a < 0$; le intercette con gli assi coordinati dipendono dalle costanti iniziali x_0 e v_0, che fissano le caratteristiche particolari del moto. In figura 3 sono mostrati i grafici relativi al moto espresso dall'equazione

$$x(t) = t^2 - 4t + 3.$$

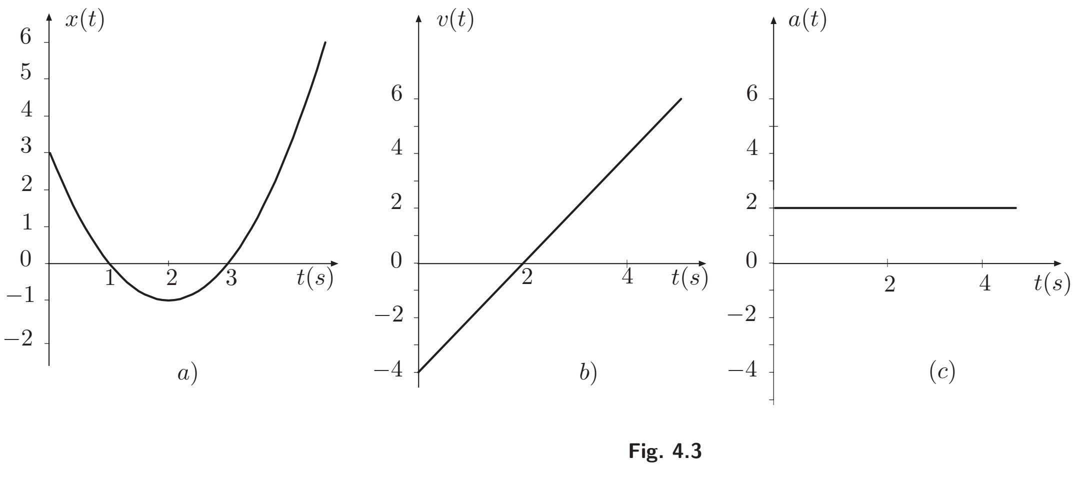


Fig. 4.3

L'accelerazione è $a = 2\,m/s^2$, la velocità iniziale è $v_0 = -4\,m/s$ e la posizione iniziale $x_0 = 3\,m$. Il grafico del moto mostra che il punto, soggetto ad accelerazione positiva, parte dalla posizione iniziale con velocità v_0, negativa, transita per l'origine dell'asse del moto all'istante $t = 1\,s$, raggiunge la posizione $x = -1\,m$ all'istante $t = 2\,s$, quindi percorre l'asse nel verso positivo, transitando ancora per l'origine all'istante $t = 3\,s$, infine prosegue nel suo moto con accelerazione costante. Il grafico della velocità mostra che essa è negativa nell'intervallo di tempo tra 0 e $2\,s$; per quest'ultimo valore si annulla, punto di inversione del moto, quindi cresce linearmente col tempo.

Eliminando il tempo dalle (2) e (3), si ottiene la relazione notevole:

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \tag{4}$$

Per ricavare l'equazione oraria (2), assegnata l'accelerazione, occorre risolvere un problema inverso di cinematica, paragrafo 8-III. Poiché nel nostro caso il problema è unidimensionale, va integrata l'equazione differenziale:

$$\ddot{x} = a \qquad\qquad (t = 0;\ \dot{x}_0 = v_0,\ x = x_0),$$

con le condizioni iniziali assegnate in parentesi. Si ha

$$\dot{x}(t) = \int a dt + C_1 = a \int dt + C_1 = at + C_1,$$

dove la costante C_1 va stabilita in base alle condizioni iniziali; si ottiene così la velocità:

$$\dot{x}(t) = v(t) = at + v_0.$$

Per ricavare l'equazione oraria, essendo $\dot{x} = dx/dt$, si ha:

$$dx = \dot{x} dt = atdt + v_0 dt,$$

da cui:

$$x = \int dx = a \int tdt + v_0 \int dt + C_2,$$

che integrata dà

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + C_2.$$

La costante C_2 va determinata in base alle condizioni iniziali; pertanto:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0.$$

Come si vede in questo caso l'integrazione è molto semplice; si tratta di integrare equazioni differenziali a variabili separabili, cioè equazioni differenziali in cui è possibile separare, nei due membri, i differenziali delle due variabili.

Esempi

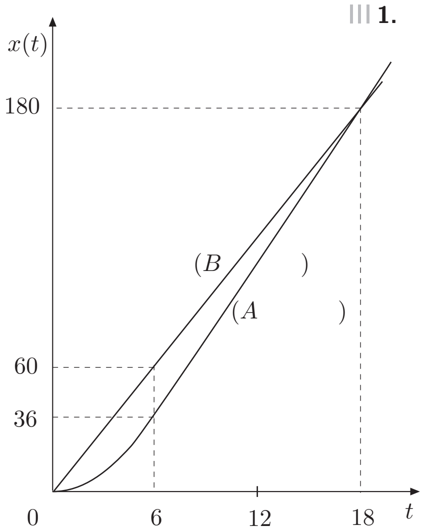


Fig. 4.4

1. Una macchina parte da ferma con accelerazione costante $a = 2\,m/s^2$ e dopo $6\,s$ si muove di moto uniforme. All'istante della partenza viene sorpassata da un'altra macchina che si muove di moto uniforme con velocità $v = 10\,m/s$; trovare a che distanza e dopo quanto tempo le due macchine si incontreranno.

La macchina A dopo $6\,s$ ha percorso uno spazio $x_A = at^2/2 = 36\,m$ ed ha assunto una velocità finale $v_A = at = 12\,m/s$, dopo di che il suo moto sarà uniforme. La macchina B dopo $6\,s$ ha percorso uno spazio $x_B = vt = 60\,m$. Assumendo come tempo iniziale $t = 6\,s$, si ha

$$x_A = v_A t + 36, \qquad x_B = v_B t + 60.$$

L'istante, dopo i primi 6 secondi, in cui le macchine si incontrano si ottiene per $x_A = x_B$, cioè:

$$(v_A - v_B)t = 60 - 36; \qquad t = 12\,s; \qquad x_B = x_A = 120\,m.$$

Il tempo totale è $t^* = 12 + 6 = 18\,s$; la distanza complessiva $x^* = 120 + 60 = 180\,m$. Il grafico degli spazi percorsi è mostrato in figura 4.

2. Un punto si muove con accelerazione costante su una traiettoria rettilinea. Negli istanti t_1 e t_2 le sue posizioni sono x_1 e x_2. Esprimere l'accelerazione in funzione di t_1, t_2, x_1, x_2.

Supponendo che il punto si trovi inizialmente nella posizione $x_0 = 0$, si ha

$$x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 + v_0 t_1, \qquad x_2 = \frac{1}{2}at_2^2 + v_0 t_2.$$

Moltiplicando rispettivamente per t_2 e t_1, e sottraendo

$$x_2 t_1 - x_1 t_2 = \frac{1}{2}a t_1 t_2 (t_2 - t_1),$$

da cui:

$$a = \frac{2(x_2 t_1 - x_1 t_2)}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)}.$$

3. Un grave è lanciato verso l'alto da una certa quota H rispetto al suolo, con velocità iniziale $v_0 = 29,4\,m/s$. Un altro grave viene fatto cadere liberamente dalla stessa quota dopo $4\,s$. Dimostrare che il primo grave sorpassa il secondo esattamente dopo $4\,s$ dall'istante in cui inizia la caduta di quest'ultimo.

Assumendo come riferimento un asse orientato verso l'alto ed origine al suolo, come posizione e velocità iniziali del primo grave i valori corrispondenti ai primi 4 secondi, cioè

$$x_1(4) = -8\,g + 4v_0 + H, \qquad v_1(4) = -4\,g + v_0,$$

dove g è l'accelerazione di gravità ($9,81\,m/s^2$), gli spazi percorsi diventano:

$$x_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + (-4g + v_0)t - 8g + 4v_0 + H, \qquad x_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + H.$$

Poiché dev'essere $x_1 = x_2$, si ottiene

$$t = \frac{8g - 4v_0}{v_0 - 4g} = 4\,s.$$

Il risultato non dipende da H. In alternativa, scegliendo l'origine dei tempi del primo moto in modo che coincida con l'istante in cui il secondo grave inizia la caduta, gli spazi percorsi dai due gravi sono

$$x_1 = -\frac{1}{2}g(4+t)^2 + v_0(4+t) + H, \qquad x_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + H;$$

per $x_1 = x_2$, dalle precedenti si ottiene

$$-8g - 4gt + 4v_0 + v_0 t = 0, \quad \Rightarrow \quad t = \frac{8g - 4v_0}{v_0 - 4g} = 4\,s.$$

Il grafico dei moti è mostrato in figura 5, per $H = 150\,m$.

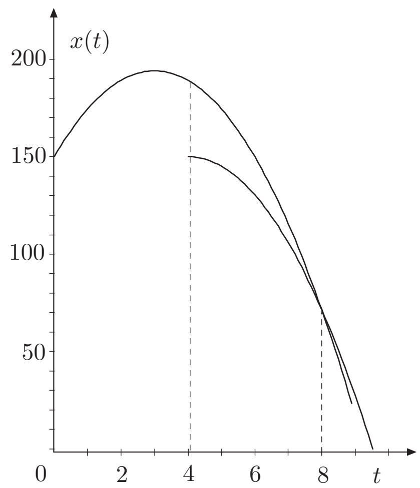


Fig. 4.5

4. Un punto si muove su una traiettoria rettilinea secondo la legge

$$x = -2t^2 + 4t.$$

Discutere il moto, eseguire i grafici di $x(t)$ e $v(t)$ e trovare la velocità media per $0 < t < 2\,s$.

Derivando successivamente rispetto al tempo, si ha:

$$\dot{x} = -4t + 4, \qquad \ddot{x} = -4\,m/s^2.$$

Il moto avviene con accelerazione negativa $a = -4\,m/s^2$, la velocità iniziale è $v_0 = 4\,m/s$. Il punto passa per $x = 0$ agli istanti $t_1 = 0$ e $t_2 = 2\,s$. La velocità è nulla per $t = 1\,s$; istante cui $x = 2\,m$. La velocità media per $0 < t < 2\,s$ è

$$\overline{v} = \frac{x(2) - x(0)}{2 - 0} = 0\,m/s.$$

5. Un grave soggetto all'azione della gravità, viene lanciato verso l'alto con velocità iniziale $v_0 = 25\,m/s$. Si calcoli la velocità con cui raggiunge un traguardo posto verticalmente ad una altezza $h = 30\,m$ dal suolo ed gli istanti in cui lo oltrepassa in salita e in discesa.

Assumendo come riferimento un asse volto verso l'alto, la velocità con cui il grave raggiunge il traguardo, per la (4), è

$$v^2 = v_0^2 + 2ah, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = 6,1\,m/s;$$

il tempo corrispondente, per la (3), risulta

$$t_1 = \frac{v_0 - v}{g} = 1,93\,s.$$

Il tempo per raggiungere la massima quota è dato da $t_{max} = v_0/g = 2,55\,s$; quello impiegato per andare dal traguardo alla massima quota è $t^* = v/g = 0,62\,s$, che è lo stesso di quello di ricaduta fino al traguardo. Pertanto i tempi richiesti sono $t_1 = 1,93\,s$, $t_2 = 3,17\,s$. Le velocità di transito al traguardo sono ovviamente uguali.

6. Un corpo in caduta libera percorre nell'ultimo secondo $93,1\,m$. Supponendo $v_0 = 0$, determinare l'altezza H da cui è caduto.

Indichiamo con v la velocità con cui il grave giunge al suolo, con h il percorso nell'ultimo secondo e con v_h la velocità di transito in h. Assumendo come riferimento un asse orientato verso l'alto, per la (4), si ha

$$v^2 = 2gh + v_h^2,$$

ed essendo, nell'ultimo secondo, $v = -gt + v_h$, da cui $v_h = v + gt$, si ottiene:

$$v^2 = 2gh + (v + gt)^2, \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{2h + gt^2}{2t} = -98\,m/s.$$

L'altezza H da cui è caduto il grave è $H = v^2/2g = 490\,m$.

7. Un punto materiale descrive una traiettoria di equazione $y = x^2$. La componente della velocità secondo x è costante ed ha il valore $v_x = \dot{x} = 3\,m/s$. Determinare velocità e accelerazione in modulo e direzione in corrispondenza al punto di ascissa $x = 2/3\,m$.

Il modulo della velocità è

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dot{x}\sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2};$$

ma

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(dy/dt)}{(dx/dt)} = \frac{dy}{dx},$$

pertanto

$$v = \dot{x}\sqrt{1+4x^2} = 5\,m/s, \qquad \tan\theta = \frac{dy}{dx} = 2x = \frac{4}{3}, \qquad \theta = 53,13^0.$$

Per l'accelerazione, osservando che

$$\dot{x} = cost, \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dx}\dot{x},$$

si ottiene

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dx^2}\dot{x}^2 + \frac{dy}{dx}\ddot{x} = \frac{d^2y}{dx^2}\dot{x}^2 = 18\,m/s^2.$$

La direzione dell'accelerazione è quella dell'asse y positivo.

1.1. Moto armonico

Un punto è animato di moto armonico se, su una traiettoria rettilinea, oscilla tra due posizioni di elongazione massima $-A$ e $+A$, simmetriche rispetto ad un punto O, origine degli spostamenti, figura 6.

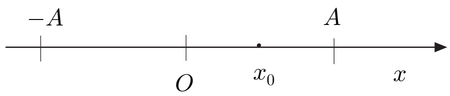


Fig. 4.6

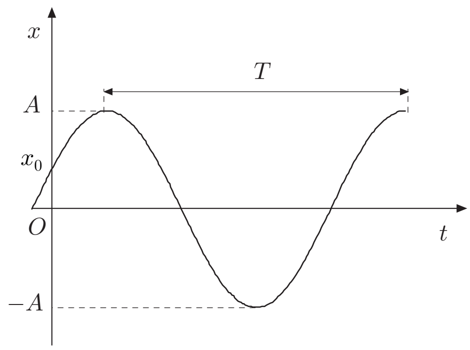


Fig. 4.7

Il moto armonico è uno dei più importanti della fisica e verrà studiato in maniera completa in dinamica; per ora ne consideriamo solo gli aspetti cinematici. La sua equazione oraria è

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \tag{5}$$

dove A è l'*ampiezza* del moto, ω la *pulsazione* o *frequenza angolare*, φ è l'angolo di fase iniziale che determina, per $t = 0$, la posizione iniziale x_0 del punto. L'equazione del moto è mostrata in figura 7.

Il moto armonico è un moto periodico; infatti, se nella (5) il tempo aumenta di una quantità $2\pi/\omega$, si ha

$$x(t + 2\pi/\omega) = A\sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right] = A\sin(\omega t + 2\pi + \varphi) = \\ = A\sin(\omega t + \varphi).$$

L'equazione del moto rimane invariata. Si definisce dunque periodo T, ossia l'intervallo di tempo impiegato dal punto per compiere una oscillazione completa, qualunque sia la sua posizione iniziale, la grandezza

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

da cui $\omega = 2\pi/T$.

Si definisce frequenza del moto la grandezza

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Essa esprime il numero di oscillazioni nell'unità di tempo e, nel SI, si misura in *hertz* (Hz); le sue dimensioni sono s^{-1}.

Dalle precedenti relazioni si deduce che la pulsazione può essere espressa come

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Nel SI la pulsazione si misura in rad/s, la stessa con cui si misura la velocità angolare. Va notato tuttavia che le due grandezze, pur avendo le stesse unità di misura e essendo denotate con lo stesso simbolo, hanno significato diverso. Come si vedrà nel seguito, questa coincidenza discende da una relazione geometrica che sussiste tra moto armonico e moto circolare uniforme.

Velocità ed accelerazione sono date da

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\omega cos(\omega t + \varphi), \\ \ddot{x} &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x. \end{aligned} \tag{6}$$

Si noti che l'accelerazione è sempre opposta, ma proporzionale allo spostamento x. In figura 8 è mostrato l'andamento di $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$.

Un moto armonico può essere rappresentato convenientemente dalla componente, secondo l'asse x oppure y, di un vettore $(P - O)$ ruotante in senso antiorario intorno all'origine O, con velocità angolare costante. Assumendo come asse, l'asse x orizzontale con origine in O, chiamando con A il modulo di $(P - O)$ e con $(\omega t + \varphi)$ l'angolo che forma con x, figura 9, si ha

$$x = Acos(\omega t + \varphi).$$

Il moto armonico è espresso stavolta con la funzione coseno, del tutto equivalente alla (5) perché basta aggiungere alla fase iniziale un angolo di $-\pi/2\,rad$.

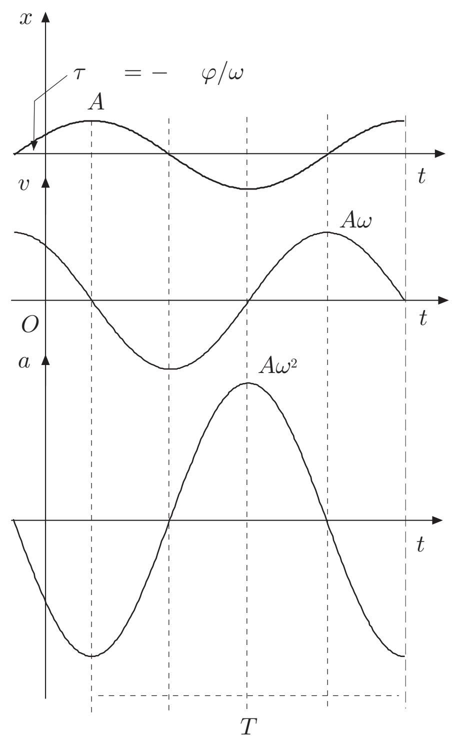


Fig. 4.8

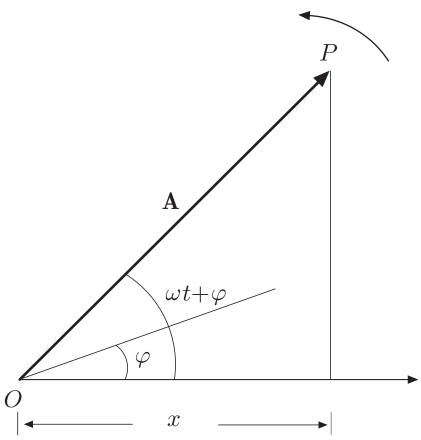


Fig. 4.9

Analogamente velocità ed accelerazione possono essere rappresentate mediante le componenti di due vettori ruotanti rispettivamente di modulo $A\omega$ e $A\omega^2$; esse sono sfasate in anticipo rispetto allo spostamento di $\pi/2$ e π, figura 10.

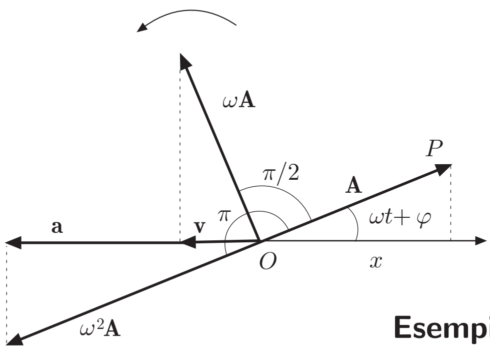


Fig. 4.10

Esempio

8. Una particella si muove di moto armonico con legge, $x = A\sin\omega t$. Esprimere velocità ed accelerazione in funzione di x.

Dall'equazione del moto e dalla sua derivata rispetto al tempo,

$$x = A\sin\omega t, \qquad \dot{x} = A\omega\cos\omega t,$$

si ha:

$$\frac{x}{A} = \sin\omega t, \qquad \frac{\dot{x}}{\omega A} = \cos\omega t.$$

Quadrando e sommando:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{(A\omega)^2} = 1, \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \omega\sqrt{A^2 - x^2}.$$

L'accelerazione è

$$\ddot{x} = -A\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 x.$$

2. Sovrapposizione di due moti armonici sullo stesso asse

Lo studio della sovrapposizione di moti generici che avvengono sullo stesso asse non presenta particolare interesse se non quello specifico del problema che si sta esaminando. Se, per esempio, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ rappresentano due moti, il moto risultante è semplicemente $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

Viceversa lo studio della sovrapposizione di due moti armoniciha notevole importanza nella descrizione dei fenomeni di interferenza, che si verificano con le onde elastiche ed elettromagnetiche. Esso può essere descritto agevolmente mediante i vettori ruotanti rappresentativi dei due moti.

2.1. Moti armonici di frequenze uguali

Supponiamo che i moti abbiano la *stessa frequenza*; lo spostamento risultante del punto, determinato dai due moti armonici

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \qquad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

è dato da

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Consideriamo, figura 11, i vettori $\mathbf{A}_1 = (P_1 - O)$, $\mathbf{A}_2 = (P_2 - O)$, entrambi ruotanti con velocità angolare ω. La posizione dei vettori, ad un certo istante, è quella determinata dagli angoli $\omega t + \varphi_1$ e $\omega t + \varphi_2$. È chiaro che le loro proiezioni sull'asse x rappresentano i moti componenti in esame. La proiezione sull'asse x del vettore $(P - O)$, somma dei vettori $(P_1 - O)$ e $(P_2 - O)$ è proprio $x_1 + x_2$.

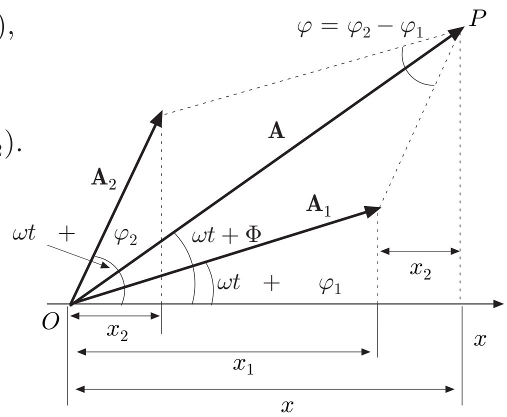


Fig. 4.11

Poiché l'angolo compreso fra i due vettori ha il valore costante $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, il vettore risultante ha modulo costante e ruota attorno ad O con la stessa velocità angolare dei vettori componenti. Si può dunque scrivere:

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \Phi),$$

dove l'ampiezza A del moto è il modulo del risultante dei due vettori, che formano l'angolo $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, cioè:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\varphi}. \tag{7}$$

La fase Φ, come si vede dalla figura 11, si ricava dalla relazione

$$\tan\Phi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}. \tag{8}$$

Casi particolari

Quando le ampiezze sono uguali, $A_1 = A_2$, per la (7) si ha $A = A_1\sqrt{2 + 2\cos\varphi}$ e, dalla (8), si deduce $\tan\Phi = (\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2)/(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)$.

Se le fasi sono uguali, $\varphi_1 = \varphi_2$, $\varphi = 0$, i due moti sono in fase; i vettori ruotanti sono paralleli e dalla (7) si ha

$$A = A_1 + A_2;$$

le ampiezze si sommano e, per la (8), $\tan\Phi = \tan\varphi_1$. In figura 12 è mostrata la composizione di due moti armonici in fase.

Se $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$, risulta $\varphi = \pi$; i due moti sono in *opposizione di fase* e se $A_1 > A_2$, l'ampiezza risultante è $A_1 - A_2$; i due moti si attenuano, figura 13; risulta anche $\tan\Phi = \tan\varphi_1$. Lo stesso avviene se $A_1 < A_2$; questa volta però il moto risultante è in anticipo di π. Se, in particolare, le ampiezze dei moti componenti sono uguali il moto risultante è nullo.

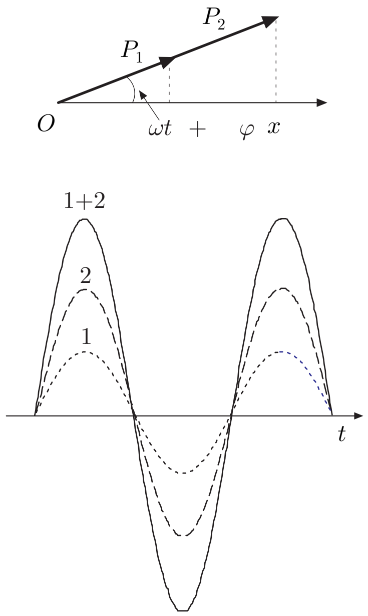


Fig. 4.12

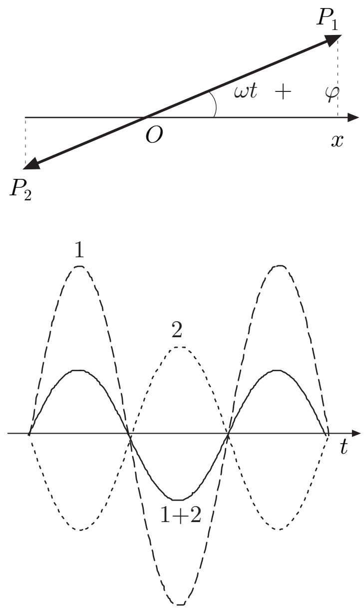


Fig. 4.13

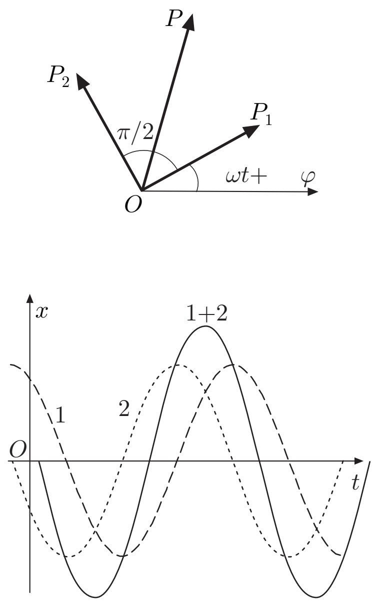


Fig. 4.14

Allorché $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$, si ha $\varphi = \pi/2$; i vettori ruotanti sono ortogonali e si dice che i due moti sono in *quadratura*; allora $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$. Se $\varphi_1 = 0$, risulta $\tan\Phi = A_2/A_1$. In figura 14 è rappresentata la composizione di due moti armonici in quadratura.

2.2. Moti armonici di frequenze diverse

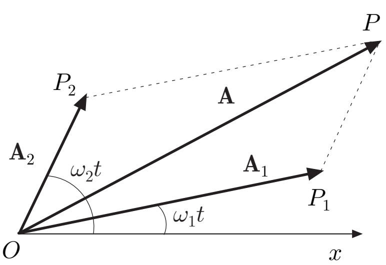


Fig. 4.15

Consideriamo il caso in cui i due moti armonici *non* abbiano la stessa frequenza. Supponiamo, per semplicità che $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, cosicché essi sono descritti dalle equazioni

$$x_1 = A_1 \cos\omega_1 t, \qquad x_2 = A_2 \cos\omega_2 t. \tag{9}$$

L'angolo compreso tra i vettori ruotanti $(P_2 - O)$ e $(P_1 - O)$ è $\omega_2 t - \omega_1 t = (\omega_2 - \omega_1)t$ e non è costante, figura 15.

Il vettore risultante non ha modulo costante e non ruota con velocità angolare costante; ne segue che il moto risultante non è armonico semplice. Dalla figura 15 si riconosce che l'ampiezza del moto ad un dato istante risulta

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_2 - \omega_1)t}; \tag{10}$$

essa oscilla tra il valore $A = A_1 + A_2$, per

$$(\omega_2 - \omega_1)t = 2n\pi,$$

ed il valore $A = |A_1 - A_2|$, per

$$(\omega_2 - \omega_1)t = (2n + 1)\pi,$$

con n intero positivo.

Il periodo T_b di oscillazione è uguale alla differenza tra i tempi t_{n+1} e t_n, corrispondenti ai valori che le precedenti assumono per $n+1$ ed n, per i quali si hanno valori massimi, consecutivi, oppure minimi dell'ampiezza. Considerando i massimi:

$$T_b = t_{n+1} - t_n = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1},$$

al quale corrisponde la frequenza:

$$\nu_b = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1.$$

Il periodo T_b si chiama *periodo di battimento* e la frequenza ν_b, *frequenza di battimento.*

Il fenomeno dei battimenti si verifica, come si vedrà nello studio delle onde, quando si sovrappongono due onde di frequenze diverse. Nel caso della onde elastiche e nel campo di udibilità dell'orecchio, se le frequenze differiscono di poco si percepisce una fluttuazione dell'intensità del suono, *battimento*, proporzionale ad A^2, causata dall'oscillazione dell'ampiezza.

2.3. Metodo trigonometrico

Posto

$$\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = \overline{\omega}, \qquad \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \omega_m,$$

si ottiene

$$\omega_1 = \overline{\omega} - \omega_m, \qquad \omega_2 = \overline{\omega} + \omega_m.$$

La somma delle (9) si può scrivere:

$$\begin{aligned} A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t &= \\ &= A_1\cos(\overline{\omega} - \omega_m)t + A_2\cos(\overline{\omega} + \omega_m)t \\ &= A_1\cos\overline{\omega}t\,\cos\omega_m t + A_1\sin\overline{\omega}t\,\sin\omega_m t \\ &\quad + A_2\cos\overline{\omega}t\cos\omega_m t - A_2\sin\overline{\omega}t\,\sin\omega_m t \\ &= (A_1 + A_2)\cos\omega_m t\,\cos\overline{\omega}t + (A_1 - A_2)\sin\omega_m t\,\sin\overline{\omega}t, \end{aligned} \tag{11}$$

Questa equazione rappresenta la somma di due oscillazioni quasi armoniche di frequenza

$$\overline{\nu} = \frac{\nu_2 + \nu_1}{2},$$

e di ampiezze

$$(A_1 + A_2)\cos\omega_m t, \qquad (A_1 - A_2)\sin\omega_m t,$$

modulate alla frequenza

$$\nu_m = \frac{\nu_2 - \nu_1}{2},$$

metà della frequenza di battimento. Si ottenuto ciò che si chiama *modulazione di ampiezza*. In figura 16 è mostrato l'andamento dell'ampiezza, equazione (10), e l'andamento della (11) o della somma delle (9) in funzione del tempo, dove si è posto $A_1 = 2A_2$ (unità arbitrarie), $\nu_2 = 10\,Hz$, $\nu_1 = 9\,Hz$. Si osservi che l'ampiezza ha il periodo del battimento, $2\pi/(\omega_1 - \omega_2)$, mentre il periodo di modulazione è $4\pi/(\omega_1 - \omega_2)$.

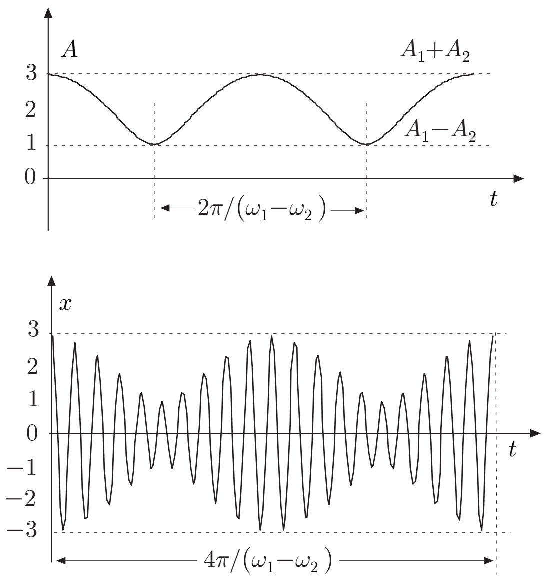


Fig. 4.16

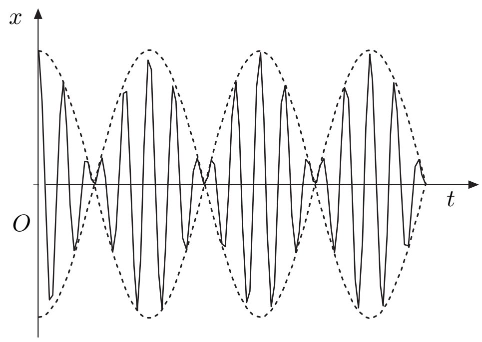


Fig. 4.17

Nel caso in cui le ampiezze A_1 e A_2 dei moti componenti siano uguali, si ha:

$$x = x_1 + x_2 = A_1(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = \\ = 2A_1 \cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t \cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t.$$

Questa relazione può essere ottenuta direttamente dalla (10), oppure usando semplicemente le formule di prostaferesi. Essa rappresenta un moto oscillatorio, figura 17, di ampiezza

$$A = 2A_1 \cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t.$$

In tal caso la modulazione è del 100 %.

Per ricavare l'ampiezza, come espressa dalla (10), si consideri l'identità:

$$A\cos(\overline{\omega}t-\delta)=A\cos\overline{\omega}t\cos\delta+A\sin\overline{\omega}t\sin\delta.$$

Confrontando con la (11), si ha:

$$A\cos\delta=(A_1+A_2)\cos\omega_m t,\qquad A\sin\delta=(A_1-A_2)\sin\omega_m t.$$

Quadrando e sommando:

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2(\cos^2\omega_m t-\sin^2\omega_m t)=$$
$$=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos 2\,\omega_m t,$$

come l'equazione (10).

3. Moti piani

In un riferimento cartesiano ortogonale, un moto piano è rappresentato da due moti $x(t)$ e $y(t)$ che avvengono sugli assi del riferimento, ossia:

$$\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}.$$

L'equazione della traiettoria si ottiene eliminando il tempo nei due moti. Velocità ed accelerazione sono definite dalle equazioni vettoriali,

$$\mathbf{v}(t)=\dot{x}(t)\mathbf{i}+\dot{y}(t)\mathbf{j},\qquad \mathbf{a}(t)=\ddot{x}(t)\mathbf{i}+\ddot{y}(t)\mathbf{j}.$$

3.1. Moto piano in coordinate polari

La posizione di un punto in un piano può essere individuata, oltre che dalle coordinate cartesiane, anche da coordinate polari così definite: scelto un punto O del piano, chiamato polo, si consideri la famiglia di circonferenze, di raggi ρ, concentriche in O e la famiglia di rette passante per esso, figura 18. Chiamando asse polare la retta orizzontale, qualsiasi altra retta può essere individuata per rotazione di un angolo θ rispetto all'asse polare, assumendo come positiva la rotazione antioraria. Si noti che per rotazioni che differiscono per $n\pi$, con n intero, si ottiene la stessa retta. La posizione del punto risulta così individuata dall'intersezione della circonferenza e della retta passanti per esso, cioè dalle coordinate:

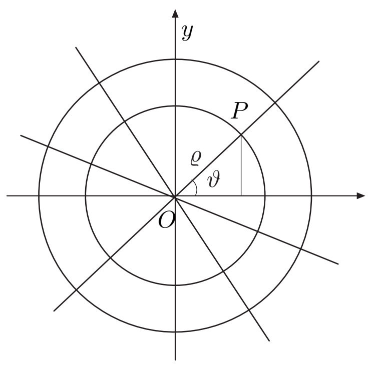


Fig. 4.18

$$\rho=\rho(t),\qquad \theta=\theta(t).$$

Fissando un riferimento cartesiano ortogonale con origine nel polo O e l'asse x coincidente con l'asse polare, le coordinate cartesiane risultano legate alle coordinate polari dalle relazioni:

$$x=\rho\cos\theta,\qquad y=\rho\sin\theta,\tag{12}$$

da cui,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}. \tag{13}$$

Derivando le (12) rispetto al tempo si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\rho} \cos\theta - \rho\dot{\theta} \sin\theta \\ \dot{y} &= \dot{\rho} \sin\theta + \rho\dot{\theta} \cos\theta. \end{aligned} \tag{14}$$

Dalle precedenti, tenuto conto delle (12), oppure derivando direttamente le (13), si ha

$$\dot{\rho} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2 + y^2}. \tag{15}$$

Quadrando e sommando le (14) si ottiene:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2. \tag{16}$$

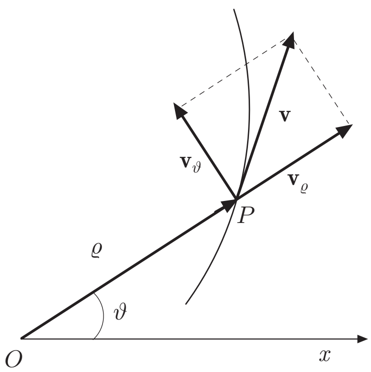


Fig. 4.19

Da questa relazione si riconosce che il vettore velocità risulta composto da due vettori i cui moduli sono $\dot{\rho}$ e $\rho\dot{\theta}$. Il primo si chiama componente radiale $\mathbf{v}_\rho$, il secondo componente trasversale $\mathbf{v}_\theta$; figura 19.

D'altra parte lo spostamento infinitesimo $d\mathbf{r}$ del punto può essere rappresentato come somma di due spostamenti, uno radiale di modulo $d\rho$ e l'altro di rotazione di modulo $\rho d\theta$. Introducendo il versore $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ radiale e il versore trasversale $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, si ha

$$d\mathbf{r} = d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\theta\hat{\boldsymbol{\theta}},$$

e

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}. \tag{17}$$

Le relazioni precedenti possono essere ottenute in maniera più semplice introducendo il numero complesso

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta},$$

da cui derivando rispetto al tempo:

$$\dot{z} = \dot{\rho}e^{i\theta} + i\rho\dot{\theta}e^{i\theta},$$

ma $i = e^{i\pi/2}$, quindi:

$$\dot{z} = \dot{\rho}e^{i\theta} + \rho\dot{\theta}e^{i(\theta+\pi/2)}. \tag{18}$$

Questa espressione si interpreta dicendo che il vettore velocità è somma di due vettori: il primo diretto radialmente, di modulo $\dot{\rho}$, il secondo ortogonale, di modulo $\rho\dot{\theta}$ e ottenuto ruotando ρ di $\pi/2$ nel verso antiorario. La grandezza definita dal numero complesso z si chiama anche vettore ruotante. Lo scalare $\dot{\theta}$ rappresenta la velocità angolare nel moto piano considerato.

Per mezzo della (18) è piuttosto semplice ricavare l'accelerazione; infatti derivando rispetto al tempo, e tenendo conto che

$e^{i\pi} = -1$, si ottiene:

$$\ddot{z} = \ddot{\rho} e^{i\theta} + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right) e^{i(\theta+\pi/2)} - \rho\dot{\theta}^2 e^{i\theta}. \tag{19}$$

Il vettore accelerazione è somma di due vettori: il primo è radiale ed ha componente $\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$; il secondo è ortogonale al primo, ruotato di $\pi/2$ nel verso antiorario, ed ha componente $2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}$; le due componenti dell'accelerazione si chiamano rispettivamente componente radiale e componente trasversale, figura 20. Lo scalare $\ddot{\theta}$ rappresenta l'accelerazione angolare del moto piano. L'accelerazione dunque si scrive:

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}. \tag{20}$$

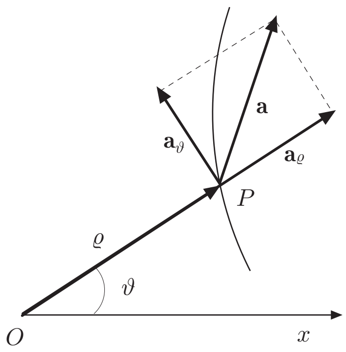


Fig. 4.20

Esempi

9. *Moto circolare uniforme*
Per tale moto risulta spontaneo assumere coordinate polari in cui

$$\rho = R, \qquad \theta = \omega t + \theta_0.$$

Introducendo il numero complesso $z = \rho e^{i\theta}$, il moto risulta espresso da

$$z = Re^{i(\omega t + \theta_0)}.$$

Derivando rispetto al tempo e tenendo presente che R è costante e $i = e^{i\pi/2}$, si ottiene

$$\dot{z} = \omega R e^{i(\omega t + \theta_0 + \pi/2)}.$$

La componente radiale della velocità è nulla, la componente trasversale ha modulo ωR ed è ruotata di $\pi/2$ in senso antiorario.

L'accelerazione si ottiene derivando ancora la precedente:

$$\ddot{z} = i\omega^2 R e^{i(\omega t + \theta_0 + \pi/2)} = \omega^2 R e^{i\pi} e^{i(\omega t + \theta_0)},$$

ed essendo $e^{i\pi} = -1$, si ha

$$\ddot{z} = -\omega^2 R e^{i(\omega t + \theta_0)}.$$

L'accelerazione è centripeta e, in conformità con la (20) risulta $-\rho\omega^2\hat{\boldsymbol{\rho}}$.

10. Si consideri il moto piano espresso dal numero complesso

$$z = Re^{(a+i\omega)t} = Re^{at}e^{i\omega t},$$

con a costante. Le coordinate polari, o equazioni del moto, sono:

$$\rho = Re^{at}, \qquad \theta = \omega t.$$

Eliminando il tempo si ottiene la traiettoria del moto:

$$\rho = Re^{a\theta/\omega};$$

essa è una spirale logaritmica che, per $a = 0$, si riduce ad un moto circolare.

Derivando z rispetto al tempo si ha

$$\dot{z} = Rae^{at}e^{i\omega t} + i\omega Re^{at}e^{i\omega t} = Rae^{at}e^{i\omega t} + \omega Re^{at}e^{i(\omega t + \pi/2)}.$$

Si individuano immediatamente le componenti della velocità: $\dot{\rho} = Rae^{at}$, radiale e $\rho\dot{\theta} = Re^{at}\omega$, trasversale.

Derivando ancora rispetto al tempo, si ottiene

$$\ddot{z} = (Ra^2e^{at} - R\omega^2e^{at})e^{i\omega t} + 2Ra\omega e^{at}e^{i(\omega t + \pi/2)}.$$

In conformità con la (20), le componenti radiale e trasversale dell'accelerazione sono rispettivamente:

$$Ra^2e^{at} - R\omega^2e^{at} \equiv \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2, \qquad 2Ra\omega e^{at} \equiv 2\dot{\rho}\dot{\theta}.$$

3.2. Velocità areolare

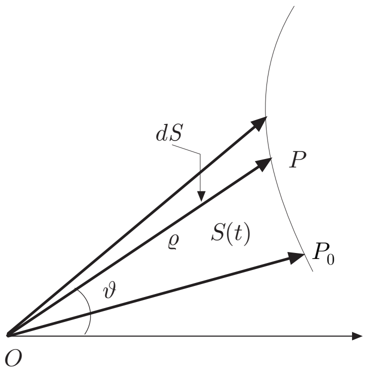


Fig. 4.21

Nei moti piani è opportuno introdurre una nuova grandezza chiamata velocità areolare. Sia $S(t)$ l'area descritta dal raggio vettore $\rho = (P - O)$ all'istante t, a partire dalla posizione $(P_0 - O)$ relativa all'istante t_0, figura 21; il rapporto tra l'area infinitesima $dS(t)$ descritta dal raggio vettore nel tempo infinitesimo dt, definisce la velocità areolare:

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt}. \tag{21}$$

Poiché, a meno di infinitesimi di ordine superiore a dS e dt, si può scrivere:

$$dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta,$$

si ha

$$\dot{S} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}. \tag{22}$$

In coordinate cartesiane, per le (13), si ottiene

$$\dot{S} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y), \tag{23}$$

oppure vettorialmente

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}). \tag{26}$$

Questo vettore, ortogonale al piano del moto, definisce completamente modulo e direzione della velocità areolare. La velocità areolare si misura in m^2/s.

3.3. Moto centrale

La velocità areolare assume particolare importanza nei moti centrali, in cui l'accelerazione **a** del punto è sempre diretta verso un punto fisso O, detto polo.

Detto **r** il vettore che individua la posizione del punto rispetto al polo, è manifestamente

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} = 0,$$

che può essere scritta

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 0,$$

come si constata immediatamente, derivando e tenendo presente che $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} = 0$. Integrando e indicando con **c** un vettore costante arbitrario, si ha

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}.$$

Questa espressione mostra che il moto avviene in un piano passante per il polo e ortogonale al vettore **c**. Pertanto il moto centrale è piano ed ha velocità areolare costante; viceversa se un moto è piano e la velocità areolare è costante, il moto è centrale. Per la (24) si deduce inoltre che

$$\mathbf{c} = 2\dot{\mathbf{S}}.$$

Consideriamo un moto centrale in cui il punto descrive una traiettoria ellittica simmetrica rispetto all'origine e agli assi coordinati x-y, di equazioni

$$x = a\cos\theta, \qquad y = b\sin\theta,$$

in cui a e b sono i semiassi dell'ellisse. Per la (23) risulta

$$\dot{S} = \frac{1}{2}ab\dot{\theta},$$

ed essendo $2\dot{S} = c$, segue che

$$\frac{c}{ab} = \dot{\theta} = cost.$$

Si deduce che θ è funzione lineare del tempo,

$$\theta = \frac{c}{ab}t + \theta_0,$$

con θ_0 costante arbitraria.

Le equazioni del moto dunque si scrivono:

$$x = a\cos\left(\frac{c}{ab}t + \theta_0\right), \qquad y = b\sin\left(\frac{c}{ab}t + \theta_0\right).$$

Si noti che la quantità $c/(ab)$ ha le dimensioni della pulsazione; le precedenti dunque rappresentano moti armonici che avvengono su assi ortogonali, la cui composizione dà una traiettoria ellittica, come si vedrà al paragrafo 4.

Le componenti della velocità sono:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{c}{b}\sin\left(\frac{c}{ab}t + \theta_0\right)\\ \dot{y} &= \frac{c}{a}\cos\left(\frac{c}{ab}t + \theta_0\right).\end{aligned}$$

Quelle dell'accelerazione

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{c^2}{ab^2}\cos\left(\frac{c}{ab}t + \theta_0\right) = -\left(\frac{c}{ab}\right)^2 x\\ \ddot{y} &= -\frac{c^2}{a^2b}\sin\left(\frac{c}{ab}t + \theta_0\right) = -\left(\frac{c}{ab}\right)^2 y.\end{aligned}$$

Vettorialmente:

$$\mathbf{a} = -\left(\frac{c}{ab}\right)^2 \mathbf{r},$$

che mostra come l'accelerazione sia volta verso il centro dell'ellisse ed il suo modulo sia proporzionale alla distanza del punto dal centro. Come si vedrà in Dinamica, le forze elastiche presentano tale caratteristica.

4. Composizione di due moti armonici su assi ortogonali

4.1. Moto circolare

Nel moto circolare uniforme, le coordinate del punto, nel riferimento cartesiano con origine nel centro O della traiettoria di raggio R, figura 22, sono date da

$$x = R\cos\theta = R\cos\omega t,$$
$$y = R\sin\theta = R\sin\omega t = R\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

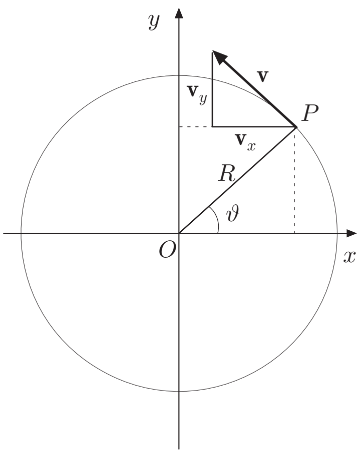


Fig. 4.22

Esse rappresentano due moti armonici, della stessa ampiezza e uguale pulsazione, sfasati di $\pi/2$ che avvengono sugli assi x ed y. L'equazione della traiettoria si ottiene immediatamente quadrando e sommando le precedenti:

$$x^2 + y^2 = R^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = R^2,$$

che è proprio la circonferenza con centro nell'origine e raggio R. Derivando rispetto al tempo si ottengono le componenti della velocità:

$$\dot{x} = -R\omega\sin\omega t = -\omega y, \qquad \dot{y} = R\omega\cos\omega t = \omega x.$$

il cui modulo è

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega R.$$

Derivando ancora, si ottengono le componenti dell'accelerazione:

$$\ddot{x} = -R\omega^2\cos\omega t = -\omega x,$$
$$\ddot{y} = -R\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y,$$

che ha modulo:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \omega^2 R.$$

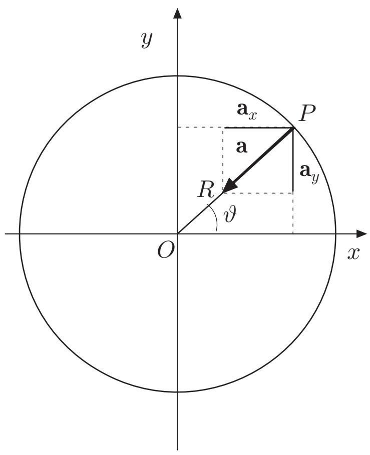


Fig. 4.23

Si osservi che l'accelerazione è soltanto centripeta. Le componenti della velocità e dell'accelerazione sono mostrati nelle figure 22 e 23.

Più in generale, come stabilito nel capitolo precedente, la velocità del punto materiale è data da

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Se il vettore velocità angolare è costante, il modulo della velocità del punto risulta costante, mentre cambia, ad ogni istante, la sua direzione; il moto è circolare uniforme e, in modulo, si ha $v = \omega R$.

L'accelerazione presenta solo la componente normale:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \tag{25}$$

Si osservi che la circonferenza è una traiettoria a curvatura costante.

Se il moto non è uniforme, è presente anche la componente tangenziale dell'accelerazione, $a_\tau = d^2 s/dt^2$, che può essere determinata nota la legge oraria $s(t)$ del moto oppure, essendo $s(t) = \varphi(t)R$, da

$$a_\tau = \frac{d^2\varphi}{dt^2}R = \frac{d\omega}{dt}R = \alpha R, \tag{26}$$

dove $\alpha = d\omega/dt$ è il modulo dell'accelerazione angolare, in conformità con la (38)-III.

4.2. Composizione di due moti armonici su assi ortogonali differenti per ampiezza, pulsazione e fase

Più in generale, consideriamo due moti armonici che avvengono sugli assi x ed y:

$$x = A_x \sin \omega_x t, \qquad y = A_y \sin(\omega_y t + \varphi). \tag{27}$$

Consideriamo per prima il caso in cui i due moti abbiano la stessa frequenza $\omega_x = \omega_y = \omega$, ma differiscano per l'ampiezza e per la fase iniziale. L'equazione della traiettoria si ricava eliminando il tempo nelle (27); si ha

$$\sin \omega t = \frac{x}{A_x}; \qquad \cos \omega t = \frac{y/A_y - (x/A_x)\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

da cui quadrando e sommando si ottiene

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_x A_y}\cos\varphi = \sin^2\varphi. \tag{28}$$

Tale traiettoria è un'ellisse con centro nell'origine delle coordinate, di eccentricità e inclinazione rispetto agli assi coordinati dipendenti da φ e dal rapporto A_x/A_y. In figura 24 è mostrata una di tali ellissi per $A_x > A_y$.

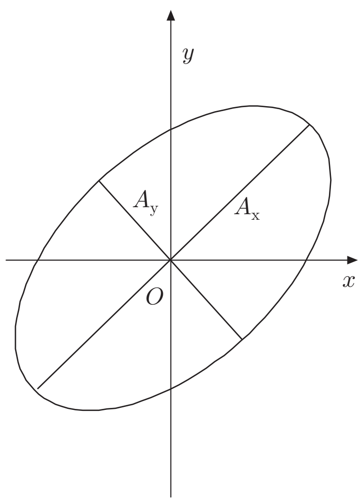


Fig. 4.24

Casi particolari

Per $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$, l'ellisse è degenere e si riduce, per i due valori della fase, alla forma:

$$y = \pm\frac{A_y}{A_x}x.$$

Il moto avviene su un asse passante per l'origine con pendenza dipendente dalle ampiezze; la composizione dei due moti determina una *polarizzazione rettilinea*.

Per $\varphi = \pm\pi/2$, dalla (28) si ha

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1;$$

la traiettoria è una ellisse simmetrica rispetto al centro e agli assi coordinati; la polarizzazione è ellittica. Per quanto riguarda il verso con cui il punto percorre l'ellisse, basta osservare che nell'istante in cui x ha elongazione massima, $t = T/4$, per le (27), deve essere

$$\begin{aligned} x &= A_x, \qquad & y &= 0, \\ \dot{x} &= 0, \qquad & \dot{y} &= A_y \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -A_y \omega; \end{aligned}$$

la componente lungo y della velocità è negativa quindi il moto avviene nel verso orario. Con analogo ragionamento, per $\varphi = -\pi/2$, si verifica che il moto avviene in verso antiorario. Se, in particolare, $\varphi = \pm\pi/2$ ed è anche $A_x = A_y$, la traiettoria è una circonferenza; *polarizzazione circolare*. In figura 25 sono mostrati i vari casi.

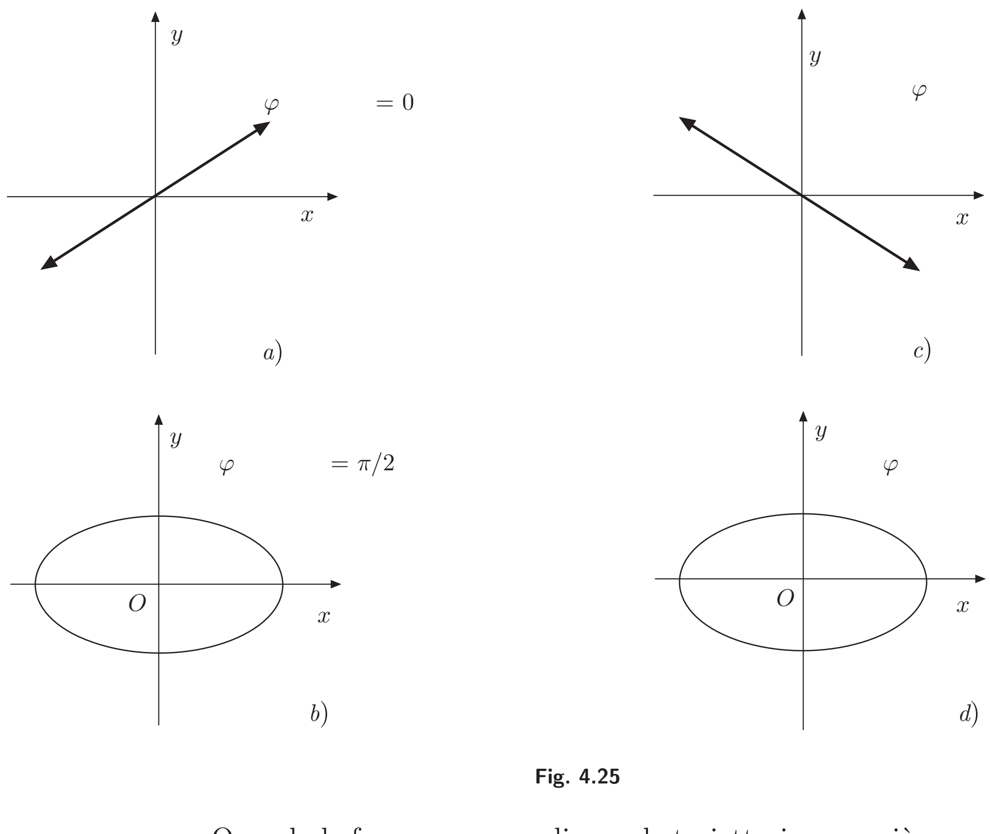


Fig. 4.25

Quando le frequenze sono diverse le traiettorie sono più complicate; tuttavia se il rapporto $\omega_x/\omega_y = m/n$ è espresso da due numeri m ed n interi, risultano sempre curve chiuse, *figure di Lissajous*. Si può verificare, ad esempio, che se scegliamo $m = 1$ ed

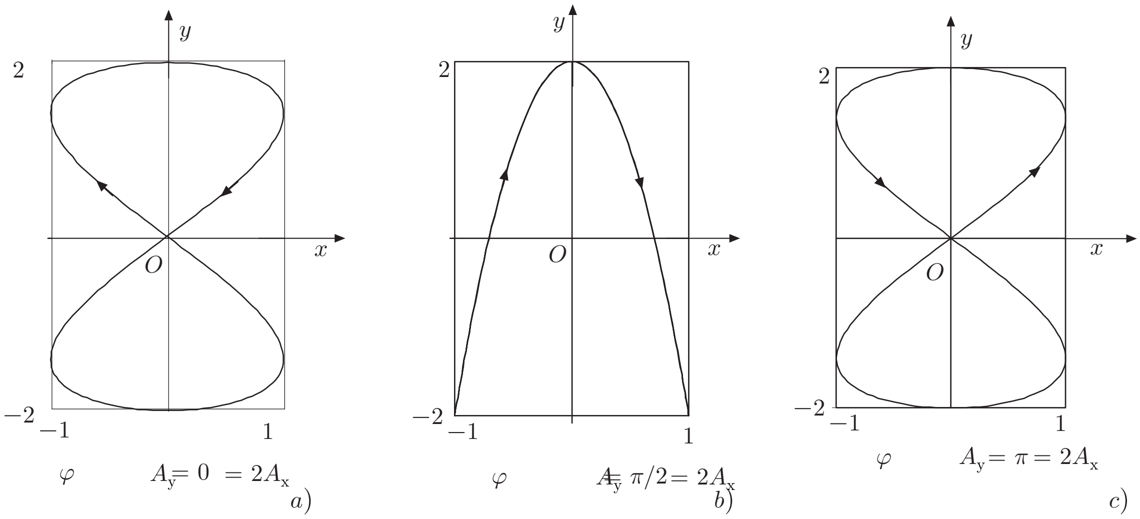
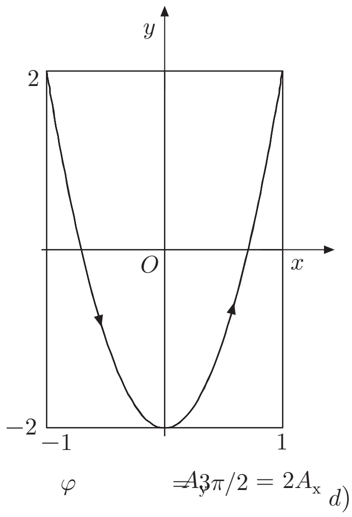


Fig. 4.26



$n = 2$, cioè se le equazioni del moto sono

$$x = A_x \sin \omega t, \qquad y = A_y \sin(2\omega t + \varphi),$$

le traiettorie sono quelle mostrate in figura 26, per i tre valori indicati della fase.

Si lascia al lettore questa verifica che va fatta seguendo il metodo indicato prima per due oscillazioni della stessa frequenza e ricordando le formule trigonometriche di duplicazione. In genere le figure di Lissajous hanno aspetto molto vario e dipendono dal rapporto m/n e dalla fase.

Esempi

11. Un disco di diametro $3\,m$ che ruota attorno al proprio asse fisso, decelera uniformemente passando da un regime di rotazione di $120\,giri/min$ a zero in $4\,s$. Calcolare la velocità angolare, l'accelerazione tangenziale e normale di un punto sul bordo del disco all'istante $t = 2\,s$.

La velocità angolare non è costante, pertanto l'accelerazione è somma dell'accelerazione tangenziale e normale:

$$\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

Essendo $\nu = 120\,giri/min = 2\,giri/s = 2\,Hz$, la velocità angolare iniziale è $\omega_0 = 2\pi\nu = 12,56\,rad/s$, quella finale nulla. Indicando con α l'accelerazione angolare, si ha

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t} = -3,14\,rad/s^2.$$

L'accelerazione angolare è negativa, pertanto la velocità angolare, all'istante assegnato, è

$$\omega = -\alpha t + \omega_0 = 6,28\,rad/s.$$

L'accelerazione tangenziale è

$$a_\tau = \alpha R = -4,71\,m/s^2;$$

quella normale,

$$a_n = \omega^2 R = 59\, m/s^2.$$

12. Sia dato il moto piano di equazioni orarie

$$x = bt, \qquad y = ct^2, \tag{29}$$

con a e b costanti positive. Il moto sull'asse x è un moto uniforme con velocità $v = b$, mentre quello sull'asse y è un moto con accelerazione costante $a = 2c$. L'equazione della traiettoria si ottiene eliminando il tempo dalle precedenti; risulta:

$$y = \frac{c}{b^2} x^2,$$

che è l'equazione di una parabola. Le equazioni orarie e la traiettoria sono mostrate in figura 27.

Derivando le (29) si ottengono le componenti cartesiane della velocità,

$$\dot{x} = b, \qquad \dot{y} = 2ct, \tag{30}$$

ed il suo modulo:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{b^2 + 4c^2t^2}. \tag{31}$$

Infine,

$$\mathbf{v} = b\mathbf{i} + 2ct\mathbf{j}.$$

Derivando le (30) otteniamo le componenti cartesiane dell'accelerazione,

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = 2c,$$

da cui:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 2c, \qquad \mathbf{a} = 2c\mathbf{j}. \tag{32}$$

L'accelerazione è diretta nel verso positivo dell'asse y ed ha modulo $2c$.

Calcoliamo l'accelerazione tangenziale e normale. Il modulo dell'accelerazione tangenziale è

$$a_\tau = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(b^2 + 4c^2t^2\right)^{1/2} = \frac{4c^2t}{\left(b^2 + 4c^2t^2\right)^{1/2}}.$$

Poiché la prima curvatura è data da

$$\frac{1}{R} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}} = \frac{2bc}{\left(b^2 + 4c^2t^2\right)^{3/2}},$$

il modulo dell'accelerazione normale, $a_n = v^2/R$, risulta

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2bc}{\left(b^2 + 4c^2t^2\right)^{1/2}}.$$

Ovviamente,

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\frac{\left(4c^2t\right)^2 + 4b^2c^2}{b^2 + 4c^2t^2}} = 2c;$$

infatti il modulo di un vettore è invariante qualunque sia la sua rappresentazione. Dunque, in generale,

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{1/2}}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{1/2}}$$

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 = \frac{\left(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}\right)^2 + \left(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}\right)^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2.$$

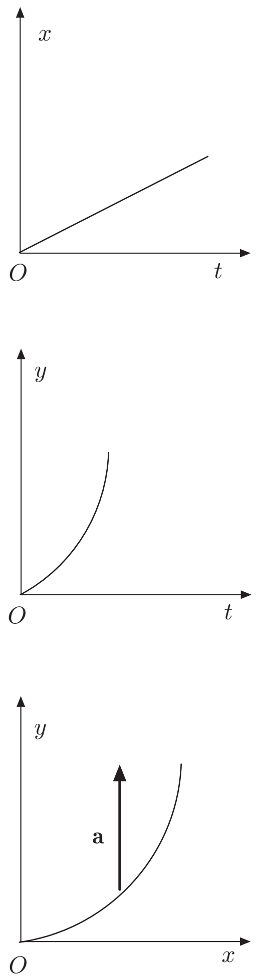


Fig. 4.27

13. *Moto in tre dimensioni*
Consideriamo un moto circolare uniforme che si svolge nel piano x-y ed un moto rettilineo uniforme lungo l'asse z. Supponendo che la traiettoria circolare abbia centro nell'origine della terna di riferimento e raggio R, le equazioni del moto sono

$$x = R\cos(\omega t + \varphi_0),$$
$$y = R\sin(\omega t + \varphi_0),$$
$$z = vt + z_0.$$

La posizione del punto è

$$\mathbf{r}(t) = R\cos(\omega t + \varphi_0)\mathbf{i} + R\sin(\omega t + \varphi_0)\mathbf{j} + (vt + z_0)\mathbf{k}$$

La traiettoria è un'elica cilindrica, figura 28.

L'equazione oraria del moto o la lunghezza dell'arco è

$$s(t) = \pm \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = \pm\sqrt{\omega^2 R^2 + v^2}\,(t - t_0).$$

Il moto è uniforme.

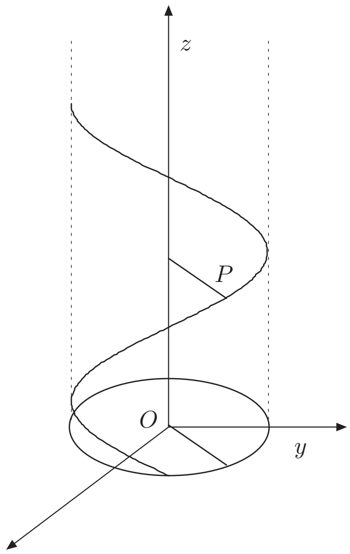


Fig. 4.28

5. Moti piani e problema inverso della cinematica

Il problema, come già detto, verrà affrontato in maniera esauriente in dinamica; tuttavia è importante fin d'ora chiarire quanto è stato esposto al paragrafo 7-III e sottolineare l'importanza delle condizioni iniziali ai fini della caratterizzazione del moto.

Problema balistico

Consideriamo un grave (o un proiettile) che venga lanciato con una velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ che forma un angolo θ con la linea orizzontale e che sia sottoposto solo all'azione dell'accelerazione di gravità. Supponendo che la terra sia piatta, ipotesi lecita se il campo del moto è limitato rispetto al raggio terrestre, e trascurando la resistenza dell'aria, scegliamo un riferimento cartesiano piano con origine nel punto in cui viene lanciato il grave, come in figura 29.

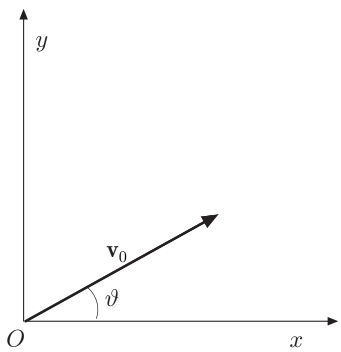


Fig. 4.29

Il sistema di equazioni differenziali che va integrato è il seguente:

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = -g, \tag{33}$$

assegnate le condizioni iniziali:

$$t = 0: \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \qquad \dot{x}_0 = v_0\cos\theta, \quad \dot{y}_0 = v_0\sin\theta. \tag{34}$$

Integrando una prima volta le (33) si ha

$$\dot{x} = C_1, \qquad \dot{y} = -gt + C_2.$$

Tenendo conto delle (34), si ottiene:

$$\dot{x} = v_0\cos\theta, \qquad \dot{y} = -gt + v_0\sin\theta.$$

Integrando una seconda volta e ricordando le (34):

$$x = (v_0 \cos\theta)t, \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t. \tag{35}$$

I moti componenti sono: un moto rettilineo uniforme lungo l'asse x ed un moto con accelerazione costante g, volta in basso, lungo l'asse y. Le equazioni orarie di questi moti sono mostrate in figura 30.

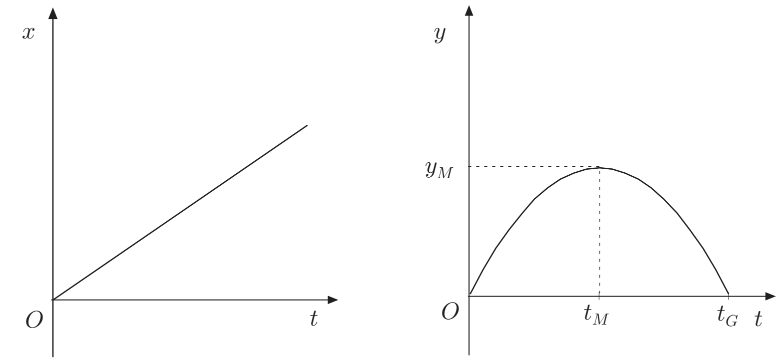


Fig. 4.30

La seconda equazione è rappresentata da una parabola ad asse verticale con la concavità rivolta verso il basso, che interseca l'asse dei tempi nell'origine e in corrispondenza a $t_G = (2v_0 \sin\theta)/g$, istante in cui il grave ricade sulla terra, chiamato tempo di gittata. L'istante in cui il grave raggiunge l'altezza massima è $t_M = (v_0 \sin\theta)/g = t_G/2$.

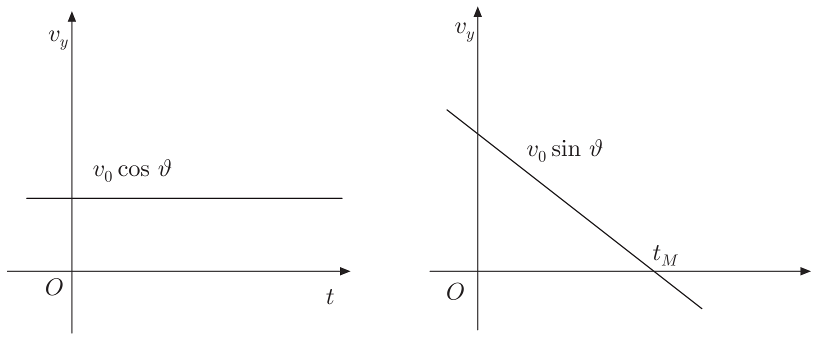


Fig. 4.31

Le componenti della velocità, in funzione del tempo, hanno l'andamento mostrato in figura 31. La componente lungo x è costante come vuole il moto rettilineo uniforme, la componente lungo y si annulla in corrispondenza a t_M. Considerando il modulo della velocità

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0 g(\sin\theta)t},$$

si può facilmente verificare che per $t = 0$, $v = v_0$; per $t = t_M$, $v = v_0 \cos\theta$; per $t = t_G$, $v = v_0$. Si lascia al lettore di tracciare il grafico del modulo della velocità in funzione del tempo, ricavare l'accelerazione tangenziale e normale e verificare che la loro composizione ha per modulo g.

L'equazione della traiettoria si ottiene eliminando il tempo nelle (35); si ha

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta} + (\tan\theta)x, \tag{36}$$

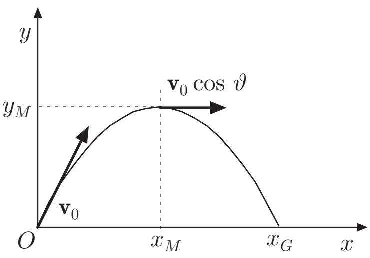


Fig. 4.32

che è una parabola ad asse verticale e concavità rivolta verso il basso, figura 32. L'ascissa del massimo e l'ascissa del punto in cui il grave ricade sulla terra si possono ottenere sostituendo nella prima delle (35) i valori dei tempi t_M e t_G ricavati prima; si ottiene

$$x_M = \frac{v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g},$$

$$x_G = \frac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta,$$

da cui si conclude che la gittata è massima per $\theta = \pi/4$.

Si osservi che per angoli $\pi/4 \pm \Delta\theta$, con $(0 < \Delta\theta < \pi/4)$, le gittate sono uguali. Dette G_1 e G_2 le gittate corrispondenti a tali angoli, si ha:

$$x_{G_1,G_2} = \frac{v_0^2}{g}\sin\left[2(\pi/4 \pm \Delta\theta)\right] = \frac{v_0^2}{g}\sin(\pi/2 \pm 2\Delta\theta);$$

infatti $\sin(\pi/2 + 2\Delta\theta) = \sin(\pi/2 - 2\Delta\theta)$.

La soluzione dello stesso problema con condizioni iniziali differenti conduce ad un moto con caratteristiche diverse. Infatti si abbiano le seguenti condizioni iniziali

$$t = 0: \quad x = 0, \quad y = H; \qquad \dot{x} = v_0, \quad \dot{y} = 0.$$

Ciò significa che il grave o il proiettile è lanciato con una velocità iniziale v_0 orizzontale da un'altezza H.

Le equazioni differenziali di partenza, come prima, sono

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = -g,$$

che, tenendo conto delle condizioni iniziali, con successive integrazioni, danno le componenti della velocità

$$\dot{x} = v_0, \qquad \dot{y} = -gt,$$

ed i moti componenti

$$x = v_0 t, \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + H.$$

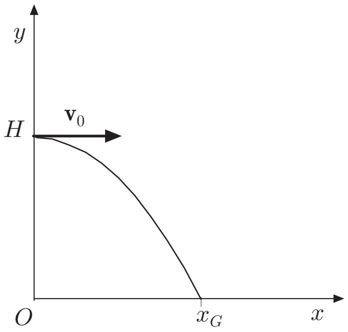


Fig. 4.33

Eliminando il tempo da queste ultime, si ottiene l'equazione della traiettoria

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} + H,$$

che è la parabola mostrata in figura 33.

Si ricava inoltre

$$x_G = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}, \qquad t_G = \frac{x_G}{v_0} = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Il tempo di gittata non dipende dalla velocità iniziale ed è uguale al tempo di caduta verticale di un grave (Galilei).

Galilei per primo studiò in maniera sistematica il moto dei proiettili ed espresse questo risultato nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*: " ... quando in cima di una torre fusse una colubrina livellata, e con essa si tirassero tiri di punto bianco, cioè paralleli all'orizzonte, per poca o molta carica si desse al pezzo, si che la palla andasse a cadere ora lontana mille braccia, or quattro mila, or sei mila, or dieci mila ecc, tutti questi tiri si spedirebbero in tempi eguali tra di loro, e ciascheduno eguale al tempo che la palla consumerebbe a venire dalla bocca del pezzo sino a terra, lasciata, senz'altro impulso, cadere semplicemente giù a perpendicolo".

Galilei stesso riconobbe l'indipendenza dei moti componenti che espresse con le leggi di relatività galileana. Infatti il moto del proiettile, come ogni moto piano, è composto da due moti: uno uniforme lungo l'asse x, e l'altro con accelerazione costante lungo l'asse y; se un osservatore si muovesse lungo x con la velocità costante del moto componente su quest'asse, vedrebbe il moto in una dimensione lungo la verticale, e ciò è conforme al metodo usato per risolvere il problema del moto del proiettile.

Fu proprio nell'analizzare la componente verticale di questo moto che Galilei si trovò di fronte al problema di descrivere la caduta libera di un corpo. Non avendo la possibilità di osservare il fenomeno nel vuoto, ma sperimentando con corpi diversi in caduta in vari fluidi, giunse alla conclusione che tutti i corpi che cadono dalla stessa altezza raggiungono alla fine la stessa velocità indipendentemente dal loro peso. Naturalmente allora non aveva la possibilità di misurare il tempo di caduta con sufficiente precisione, ma gli esperimenti condotti con sfere fatte rotolare lungo piani inclinati, in maniera da rendere il tempo dell'esperimento opportunamente lungo e perciò facilmente misurabile, gli permisero di concludere che la velocità finale delle sfere dipendeva esclusivamente dall'altezza e non dalla lunghezza del percorso effettivamente seguito.

Questi risultati permisero a Galilei di concludere che i moti verticale e orizzontale di un proiettile potevano avvenire contemporaneamente *senza alterarsi, perturbarsi o ostacolarsi a vicenda.*

Esempi

14. Una particella si muove sull'asse x con accelerazione $a = -2x$. Trovare la relazione tra velocità e spazio percorso supponendo che per $x = 0$, $v_0 = 4\,m/s$.

Poiché

$$dv = adt, \qquad v = \frac{dx}{dt},$$

moltiplicando ambo i membri per v, si ha

$$vdv = a\frac{dx}{dt}dt = adx.$$

Integrando

$$\int vdv = \int adx, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 = ax + C;$$

sostituendo l'espressione dell'accelerazione e tenendo conto della condizione iniziale, si ottiene

$$\frac{1}{2}v^2 = -2x^2 + 8, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{16 - 4x^2}.$$

15. Una particella si muove in un piano con velocità di componenti

$$\dot{x} = 4t^3 + 4t, \qquad \dot{y} = 4t.$$

Trovare l'equazione della traiettoria sapendo che per $t = 0$ la particella è nella posizione $P_0 \equiv (1; 2)$. Integrando e tenendo conto delle condizioni iniziali, si ha

$$x = 4\int t^3 dt + 4\int tdt = t^4 + 2t^2 + C_1 = t^4 + 2t^2 + 1,$$

$$y = 4\int tdt = 2t^2 + C_2 = 2t^2 + 2.$$

Ma dalla seconda $t^2 = (y-2)/2$, e sostituendo nella prima si ottiene

$$x = \left(\frac{y-2}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{y-2}{2}\right) + 1 = \frac{y^2}{4}.$$

L'equazione della traiettoria è

$$y^2 = 4x.$$

16. Una particella si muove in un piano con velocità di modulo costante $v = 2\,m/s$. L'angolo θ che il vettore velocità forma con l'asse x varia nel tempo con legge $\theta = \pi t/2$.

Supponendo che per $t = 0$, $x_0 = y_0 = 0$, determinare la traiettoria della particella.

La componenti della velocità lungo gli assi x e y si scrivono

$$\dot{x} = v\cos\frac{\pi}{2}t, \qquad \dot{y} = v\sin\frac{\pi}{2}t.$$

Integrando si ha

$$x = \frac{2v}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t + C_1, \qquad y = -\frac{2v}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}t + C_2,$$

dove le costanti, per $t = 0$, risultano $C_1 = 0$, $C_2 = 2v/\pi$. Pertanto

$$x = \frac{2v}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t, \qquad y = -\frac{2v}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}t + \frac{2v}{\pi}.$$

Per ottenere la traiettoria va eliminato il tempo. Essendo:

$$\frac{\pi}{2v}x = \sin\frac{\pi}{2}t, \qquad \frac{\pi}{2v}\left(y - \frac{2v}{\pi}\right) = -\cos\frac{\pi}{2}t;$$

quadrando e sommando, si ottiene

$$\left(\frac{\pi}{2v}\right)^2 x^2 + \left(\frac{\pi}{2v}\right)^2 \left(y - \frac{2v}{\pi}\right)^2 = 1;$$

$$x^2 + \left(y - \frac{2v}{\pi}\right)^2 = \frac{4v^2}{\pi^2};$$

e poiché $v = 2\,m/s$:

$$x^2 + \left(y - \frac{4}{\pi}\right)^2 = \frac{16}{\pi^2},$$

che è l'equazione di una circonferenza di centro $C \equiv (0; 4/\pi)$ e raggio $R = 4/\pi\, m$.

17. Le componenti dell'accelerazione di una particella secondo gli assi cartesiani sono

$$\ddot{x} = -3\sin\omega t, \qquad \ddot{y} = 2\cos\omega t. \tag{37}$$

Determinare l'equazione della traiettoria supponendo che per $t = 0$ sia

$$x = 0, \quad y = 2/\omega^2; \qquad \dot{x} = 3/\omega, \quad \dot{y} = 0.$$

Integrando la prima delle (37), si ottiene

$$\dot{x} = -3\int \sin\omega t\, dt = \frac{3}{\omega}\cos\omega t + C_1$$

$$x = \frac{3}{\omega}\int \cos\omega t\, dt + \int C_1 dt = \frac{3}{\omega^2}\sin\omega t + C_1 t + C_2.$$

Tenuto conto delle condizioni iniziali, risulta $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, quindi

$$x = \frac{3}{\omega^2}\sin\omega t; \tag{38}$$

il moto lungo x è armonico.

Integrando la seconda delle (37), si ha

$$\dot{y} = 2\int \cos\omega t\, dt = \frac{2}{\omega}\sin\omega t + C_1,$$

$$y = \frac{2}{\omega}\int \sin\omega t\, dt + \int C_1 dt = -\frac{2}{\omega^2}\cos\omega t + C_1 t + C_2.$$

Infine, per le condizioni iniziali, $C_1 = 0$, $C_2 = 4/\omega^2$, pertanto:

$$y = -\frac{2}{\omega^2}\cos\omega t + \frac{4}{\omega^2}.$$

Poiché dalla (38):

$$\sin\omega t = \frac{\omega^2}{3}x,$$

ed inoltre

$$\cos\omega t = \sqrt{1 - \sin^2\omega t} = \sqrt{1 - \frac{\omega^4 x^2}{9}},$$

si ottiene

$$y = \frac{4}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2}\sqrt{1 - \frac{\omega^4 x^2}{9}}.$$

La traiettoria è una ellisse con centro in $P_0 \equiv (0; 4/\omega^2)$, assi di equazioni $x = 0$, $y = 4/\omega^2$ e semiassi $a = 3/\omega^2$, $b = 2/\omega^2$.