3. Cinematica
Studio generale del moto

1. Introduzione

La cinematica classica è la parte della meccanica che studia il movimento dei corpi indipendentemente dalle cause che lo determinano e si fonda essenzialmente sui concetti di spazio euclideo e tempo assoluto.

Considerando la cinematica come *geometria del movimento*, è essenziale associare al punto della geometria, l'elemento fisico che in cinematica da esso viene rappresentato. Si dirà dunque che un punto è atto a rappresentare un corpo mobile se le dimensioni di quest'ultimo sono abbastanza piccole rispetto a quelle del campo di movimento, e se non si considera l'eventuale movimento indipendente delle parti di cui il corpo è costituito. Per esempio si può rappresentare con un punto mobile un elettrone che si muove attorno al nucleo, oppure la Terra nel suo movimento di rivoluzione attorno al Sole, trascurando il moto di rotazione attorno al suo asse, e così via.

Pertanto definiamo punto mobile un punto suscettibile di posizioni diverse rispetto ad un osservatore e sempre individuabile nelle varie posizioni. La sua posizione può essere stabilita da un vettore $\mathbf{r}$ che va da un punto fisso prestabilito O alla posizione P del punto mobile, oppure da coordinate, cartesiane, polari, cilindriche, opportunamente scelte.

Un punto mobile si dice libero se non è soggetto a nessuna condizione; vincolato se esistono certe condizioni alle quale deve soddisfare. Tali condizioni sono chiamate *vincoli*; essi sono definiti come *bilateri* se, per esempio, il punto deve appartenere ad una data superficie, ad una linea ecc ... , mentre sono *unilateri* se impongono condizioni meno restrittive, per esempio se impediscono al punto di attraversare una data superficie.

La posizione di un punto soggetto a vincoli bilateri può essere individuata da un numero di coordinate minore di tre. Per esempio, se un punto è vincolato ad una linea, basta dare come coordinata la lunghezza dell'arco misurato a partire da una origine P_0 alla posizione P sulla linea, secondo un verso prefissato, figura 1.

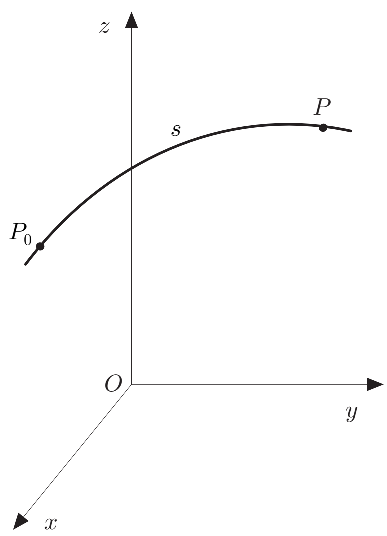

Fig. 3.1

Un insieme di punti mobili, liberi o vincolati, si chiama sistema di punti o, più brevemente, sistema. Il sistema può essere soggetto a vincoli, fra i quali dobbiamo annoverare anche quelli che caratterizzano la natura del sistema, come ad esempio il vincolo della rigidità, e quelli che impongono particolari limitazioni di mobilità, come ad esempio l'esistenza di un punto o di un asse fisso.

Consideriamo un sistema mobile costituito da N punti. Ogni posizione del sistema è determinata da N vettori $\mathbf{r}_i$ che vanno da un'origine prefissata, solidale con un osservatore, ai punti P_i. Tale posizione è anche individuata dai valori di ogni genere di coordinate adottate. Le coordinate o i vettori presuppongono un osservatore ovvero una terna di riferimento prefissata, figura 2.

I vincoli imposti al sistema stabiliscono legami fra le $3N$ coordinate dei suoi punti; si verificherà, allora, che sono necessarie, per individuare la posizione del sistema, un numero di coordinate minore di $3N$. Se queste coordinate così individuate risultano indipendenti, si diranno *coordinate libere o lagrangiane.*

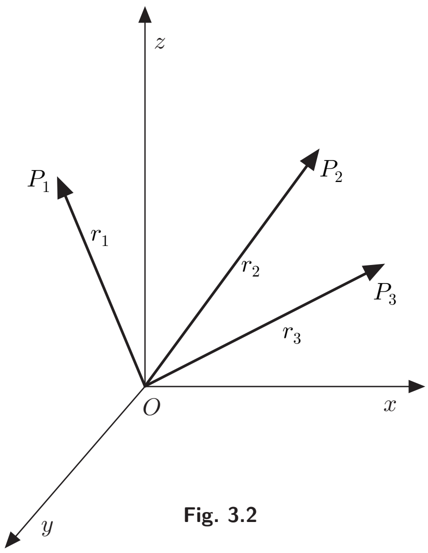

Fig. 3.2

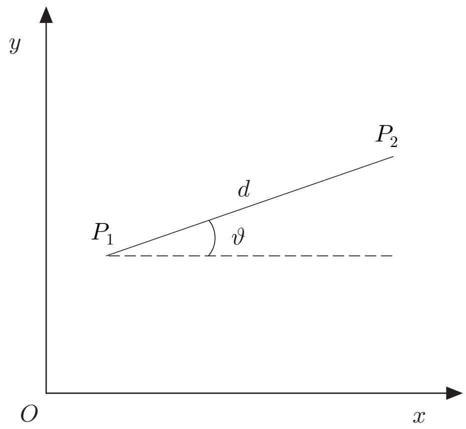

Fig. 3.3

Come esempio consideriamo un sistema costituito da due punti, giacenti nel piano x-y di un riferimento cartesiano ortogonale, e tali che la loro distanza si mantenga sempre costante e pari a d, figura 3. Il sistema è soggetto ad un vincolo bilatero perché giace su un piano e ad un vincolo che dipende dalla natura del sistema, perché la distanza tra i due punti deve rimanere costante. Le 6 coordinate dei punti P_1 e P_2 sono legate dalle 3 relazioni:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = d^2, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 0.$$

Per individuare la posizione del sistema basta assegnare 3 coordinate: quelle di uno dei punti ed una coordinata dell'altro, oppure le coordinate di un punto e l'angolo θ indicato in figura 3. Queste coordinate sono indipendenti e costituiscono le coordinate libere del sistema.

Il numero di coordinate libere che si possono assegnare per individuare la posizione di un sistema costituisce il numero di gradi di libertà del sistema stesso; in altri termini: se i punti del sistema sono individuati da r coordinate di qualsiasi specie e tra queste sussistono s equazioni traducenti i vincoli, il numero di gradi di libertà del sistema risulta uguale ad $r - s$. Nell'esempio precedente il numero di gradi di libertà è 3 perché 6 sono le coordinate dei punti e 3 le relazioni traducenti i vincoli.

Sistemi di punti molto importanti sono i sistemi rigidi; essi si definiscono tali se la loro configurazione geometrica non cambia col movimento. Supponiamo che un sistema occupi una certa posizione S nello spazio, determinata dalla posizione di ogni suo punto, e successivamente una posizione S' diversa, figura 4. Tali posizioni siano determinate rispetto ad un osservatore O, ovvero rispetto ad una terna di riferimento con origine in O. Se l'osservatore in O, qualunque siano le posizioni S ed S' del sistema, può mutare la propria origine in O' in maniera tale da vedere, da questa nuova origine, il sistema in modo identico a quello con cui lo vedeva da O, il sistema si dice *rigido*.

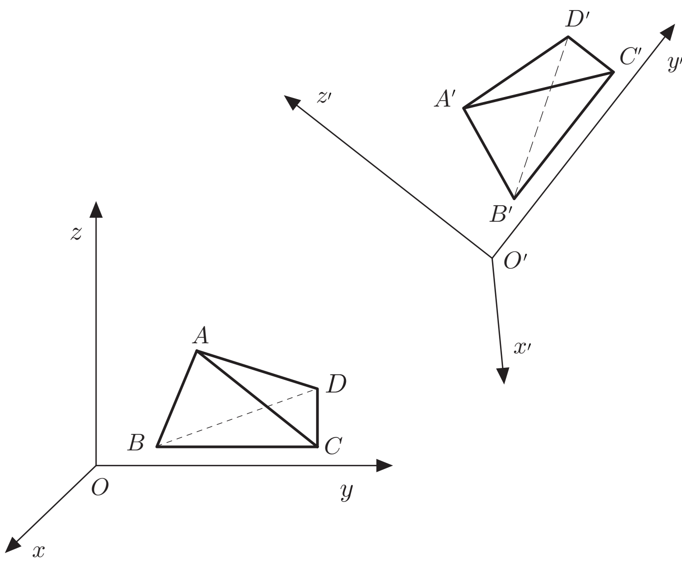

Fig. 3.4

Ne segue che la configurazione geometrica dei sistemi rigidi non dipende dall'osservatore e pertanto rimane immutata anche nel passaggio del sistema dalla posizione S ad S' nel riferimento O. Le figure geometriche, determinate dai punti del sistema rigido in una posizione S, sono dunque uguali a quelle determinate dagli stessi punti in un'altra posizione S'; anzi le due figure sono sovrapponibili.

La proprietà di conservazione delle figure geometriche può essere assunta come definizione di sistema rigido, quando si presupponga la nozione di congruenza. Infatti consideriamo il sistema rigido di figura 4 nelle posizioni S ed S'; se il segmento AB è congruente con $A'B'$ ed il segmento BC con $B'C'$, anche il segmento AC è congruente con $A'C'$. Allora l'angolo $\angle ABC$ è congruente con l'angolo $\angle A'B'C'$, il triangolo ABC col triangolo $A'B'C'$ e così via. Poiché questo ragionamento vale per tre punti qualsiasi del sistema, ne segue che tutte le figure geometriche che possiamo considerare sono congruenti.

Ma una terna di punti qualsiasi è individuata dalle coordinate corrispondenti, dunque la posizione di un sistema rigido è stabilita dalle nove coordinate di tre punti non allineati. Tali coordinate non sono coordinate libere, poiché tra esse hanno luogo tre relazioni che esprimono l'invarianza delle mutue distanze dei tre punti. Se il sistema rigido è libero, cioè non è imposto altro vincolo se non quello della rigidità, sussistono solo le tre relazioni che esprimono l'invarianza delle mutue distanze di tre punti generici del sistema; pertanto i gradi di libertà, o coordinate libere, sono sei, $(9-3=6)$. Se il sistema rigido è vincolato, il numero di gradi di libertà diminuisce. Infatti se, per esempio, il sistema ha un punto fisso, assunto quest'ultimo come uno dei tre punti, si hanno: le tre coordinate di tale punto e le tre relazioni che stabiliscono le distanze fra i tre punti; dunque 6 relazioni. I gradi di libertà del sistema si riducono a tre, $(9-6=3)$. Se il sistema rigido ha due punti fissi A e B, cioè può ruotare attorno all'asse da essi individuato, note le sei coordinate di tali punti e le due relazioni che stabiliscono le distanze del terzo punto dai due prefissati, si hanno otto relazioni. Pertanto il sistema rigido ha un solo grado di libertà, $(9-8=1)$: l'angolo di rotazione attorno all'asse fisso.

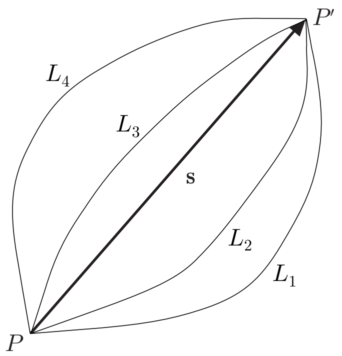

Fig. 3.5

2. Spostamento

Definiamo spostamento di un punto, relativo al passaggio da una posizione P ad una posizione P' il vettore

$$\mathbf{s} = (P' - P). \tag{1}$$

Lo spostamento dipende solo dalla posizione iniziale e finale del punto e non dal suo percorso lungo una qualsiasi linea L, figura 5. Se un punto esegue spostamenti successivi, $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$,... $\mathbf{s}_n$, lo spostamento totale $\mathbf{s}_T$ è dato dalla somma vettoriale degli spostamenti, figura 6.

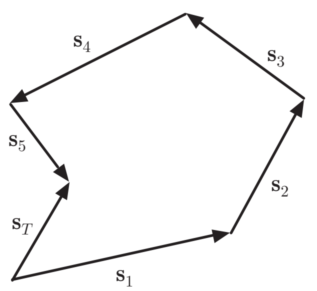

Fig. 3.6

$$\mathbf{s}_T = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \cdots + \mathbf{s}_n.$$

Definiamo spostamento di un sistema di punti, l'insieme degli spostamenti dei punti del sistema relativo al passaggio da una configurazione iniziale ad una configurazione finale.

Un importante spostamento è lo *spostamento rigido*, caratteristico dei sistemi rigidi. In questo caso ad ogni figura geometrica nella posizione iniziale corrisponde una figura congruente nella posizione finale. Per quanto si è detto al paragrafo precedente, per individuare uno spostamento rigido basta dare lo spostamento di tre punti non allineati.

Diamo qualche cenno, omettendo le dimostrazioni che vengono svolte nel corso di Meccanica Razionale, sugli spostamenti rigidi fondamentali.

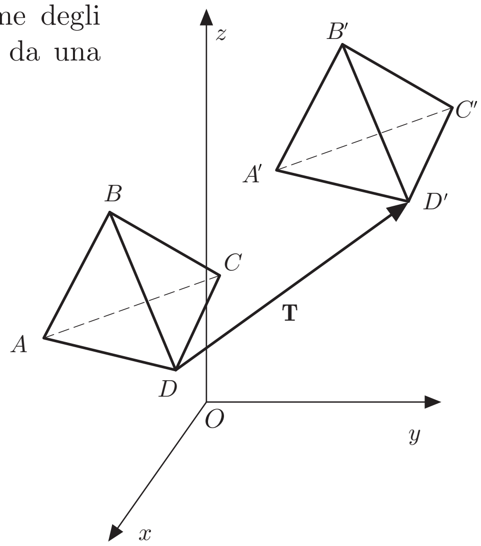

Fig. 3.7

2.1. Spostamento rigido traslatorio

Lo spostamento si dice traslatorio se tutti i punti del sistema subiscono lo stesso spostamento. Questo spostamento comune a tutti i punti si chiama *traslazione* ed è individuato dal vettore traslazione $\mathbf{T}$.

In figura 7 è mostrato lo spostamento traslatorio di un tetraedro; gli spostamenti $(A' - A)$, $(B' - B)$,... sono tutti uguali.

2.2. Spostamento rigido rotatorio

Uno spostamento rigido è rotatorio se a due punti del sistema compete spostamento nullo. Se A e B sono tali punti, la retta passante per A e B si dice retta fissa dello spostamento rotatorio o asse di rotazione; a tutti i punti di questo asse compete spostamento nullo. Se un punto, non appartenente all'asse, compie uno spostamento $(P' - P)$, è individuato anche lo spostamento del semipiano contenente A, B e P, ed essendo A e B fissi, tale spostamento deve essere rotatorio, figura 8. Per la condizione di rigidità, l'angolo di rotazione è lo stesso qualunque sia il punto giacente nel semipiano. Attribuendo una orientazione all'asse, definita dal versore $\hat{\mathbf{u}}$, risulta stabilito il segno dell'angolo di rotazione che si ritiene positivo se il verso dell'asse coincide con quello dell'avanzamento di una vite destra, negativo al contrario; dunque il versore ed il valore dell'angolo individuano completamente lo spostamento considerato.

Definiamo rotazione il vettore

$$\mathbf{R} = \Delta\varphi\,\hat{\mathbf{u}}; \tag{2}$$

dunque, assegnato un punto dell'asse, il vettore rotazione individua l'asse, il verso e l'ampiezza della rotazione. Se viene assegnato

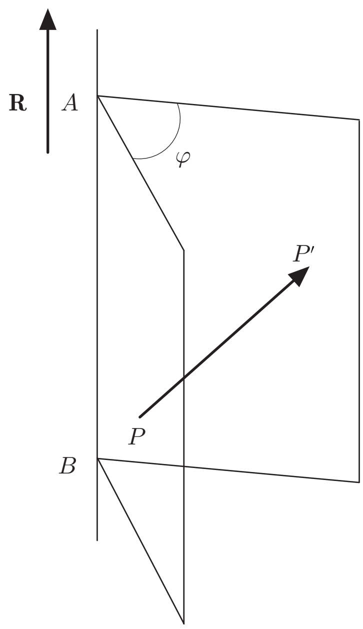

Fig. 3.8

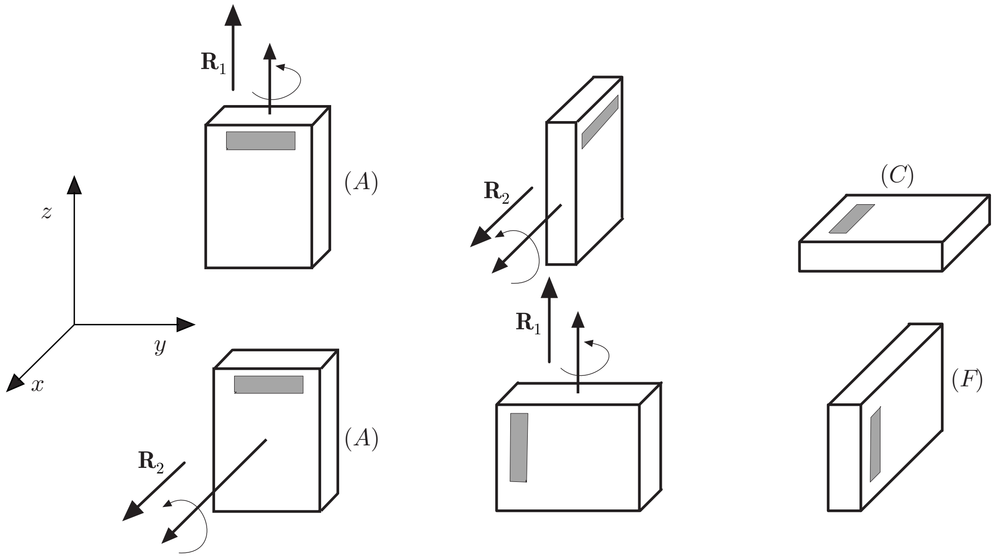

Fig. 3.9

solo $\mathbf{R}$, risultano determinati l'ampiezza della rotazione e l'orientamento dell'asse, ma non la posizione di quest'ultimo.

È molto importante notare che le rotazioni finite, caratterizzate da modulo e direzione, pur essendo per comodità espresse da vettori, non verificano l'algebra vettoriale. Per convincersene basta considerare le rotazioni di 90° di un libro attorno a due assi ortogonali, come illustrato in figura 9. Fissata la posizione iniziale A, si ruoti il libro attorno all'asse z, impartendo la rotazione $\mathbf{R}_1$ e successivamente, attorno all'asse x, la rotazione $\mathbf{R}_2$; il libro risulterà nella posizione C. Riportando il libro nella posizione A, imprimiamo per prima la rotazione $\mathbf{R}_2$ attorno all'asse x e successivamente $\mathbf{R}_1$ attorno all'asse z. La posizione finale F, è diversa da quella raggiunta in C. Concludiamo che la proprietà commutativa della somma vettoriale non è soddisfatta; in altri termini

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \neq \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1. \tag{3}$$

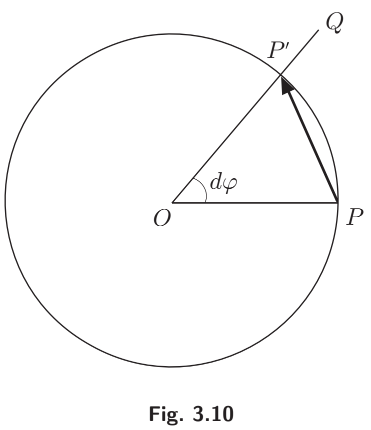

Fig. 3.10

Le rotazioni infinitesime viceversa non presentano questo problema. Consideriamo il vettore rotazione infinitesimo $d\varphi\hat{\mathbf{u}}$, ortogonale al piano del foglio ed un punto nella posizione P che per effetto della rotazione giunge in P', figura 10. I vettori

$$d\varphi\,\hat{\mathbf{u}} \times (P - O), \qquad (P' - P) = d\mathbf{r},$$

hanno rispettivamente moduli $r|d\varphi|$ e $2r|\sin d\varphi/2|$. A meno di infinitesimi di ordine superiore a $|P' - P|$, è manifestamente

$$|P' - P| = |d\varphi\,\hat{\mathbf{u}} \times (P - O)|,$$

in quanto $2r \sin d\varphi/2 \approx 2r d\varphi/2 = r d\varphi$. Ma, ancora a meno di infinitesimi di ordine superiore a $|P' - P|$, la direzione di $(P' - P)$, corda PP', coincide con la direzione della tangente alla circonferenza, lungo cui è diretto il vettore $d\varphi\hat{\mathbf{u}} \times (P - O)$. Pertanto, a meno di infinitesimi di ordine superiore a quelli che si considerano, trascurabili per il teorema fondamentale sugli infinitesimi, scriveremo:

$$(P' - P) = d\mathbf{r} = d\varphi\,\hat{\mathbf{u}} \times (P - O). \tag{4}$$

Infine se il punto è soggetto a due generici spostamenti $d\mathbf{r}_1$ e $d\mathbf{r}_2$ determinati da due rotazioni infinitesime, si ha

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 &= d\varphi_1\hat{\mathbf{u}}_1 \times (P - O) + d\varphi_2\hat{\mathbf{u}}_2 \times (P - O) \\ &= (d\varphi_1\hat{\mathbf{u}}_1 + d\varphi_2\hat{\mathbf{u}}_2) \times (P - O). \end{aligned}$$

Questa relazione esprime che la somma degli spostamenti del punto dovuti a due rotazioni infinitesime è equivalente allo spostamento dovuto alla somma delle rotazioni infinitesime, *(legge del parallelogramma delle rotazioni infinitesime)*.

2.3. Spostamento rigido parallelo ad un piano

Uno spostamento rigido nel quale ogni punto subisce uno spostamento parallelo ad un piano, chiamato *piano direttore*, può essere studiato considerando soltanto gli spostamenti in detto piano e si chiama *spostamento piano*. Per esempio, uno spostamento traslatorio è uno spostamento piano, il piano direttore è un piano qualsiasi, parallelo alla traslazione; uno spostamento rotatorio è piano, il piano direttore, in tal caso, è un qualsiasi piano perpendicolare all'asse di rotazione.

2.4. Spostamento rigido polare

Se in un sistema rigido un punto O, chiamato polo o centro dello spostamento, è fisso, lo spostamento del sistema si chiama polare o sferico. Per la condizione di rigidità, gli estremi dei vettori $(P' - O)$ e $(P - O)$ che individuano un generico spostamento $(P' - P)$, appartengono ad una superficie sferica con centro nel polo. Si può dimostrare, e ciò peraltro è intuitivo, che ogni spostamento polare, ad un certo istante, è uno spostamento rotatorio con asse istantaneo di rotazione passante per il polo (Eulero).

2.5. Spostamento rototraslatorio

Uno spostamento rigido composto di uno spostamento traslatorio e di uno rotatorio si chiama *rototraslatorio*. Se in tale spostamento il vettore traslazione ed il vettore rotazione sono paralleli, lo spostamento si dice elicoidale; l'asse dell'elica coincide con l'asse di rotazione; è il caso dell'avanzamento della vite nella sua madrevite.

3. Moto del punto

Nello studio del moto di un punto è fondamentale associare ordinatamente alle posizioni P_0, P_1,...P_n del punto, misurate da un certo osservatore, la successione dei valori t_0, t_1,...t_n dei tempi corrispondenti. Nella meccanica classica l'esperienza mostra che due osservatori diversi, nelle situazioni più comuni di esperienza, misurano gli stessi intervalli di tempo. In meccanica relativistica ciò non si verifica ed il tempo va considerato come una coordinata legata all'osservatore, come le coordinate spaziali. Stabilito dunque un tempo *assoluto*, indipendente dall'osservatore, lo scopo della cinematica è quello di stabilire relazioni tra lo spazio percorso dal punto ed il tempo impiegato a percorrerlo.

Fissiamo una terna cartesiana di riferimento solidale con l'osservatore, d'ora in poi terna cartesiana ed osservatore rappresenteranno la stessa cosa e indicheremo l'una o l'altro indifferentemente, e individuiamo la posizione P del punto con un vettore $\mathbf{r}$ che va dall'origine O della terna a P, come in figura 11. L'equazione vettoriale

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \tag{5}$$

definisce l'equazione del moto del punto, che di solito è una funzione regolare. Il vettore $\mathbf{r}(t)$ può essere espresso in forma cartesiana per mezzo delle sue componenti:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}. \tag{6}$$

Ciò significa che la (5) equivale alle tre relazioni scalari:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \tag{7}$$

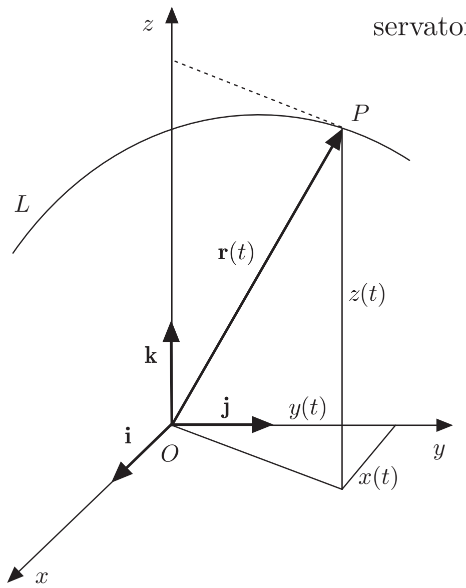

Fig. 3.11

che chiamiamo equazioni del moto o moti componenti. Queste equazioni possono anche essere interpretate come le equazioni parametriche della linea L, luogo delle successive posizioni P, che chiamiamo *traiettoria*.

La sola conoscenza della traiettoria non basta a caratterizzare il moto del punto; bisogna associare a questa una legge che ne dia la posizione in funzione del tempo, cioè la legge oraria; per esempio le leggi dei moti componenti espresse dalle (7). Peraltro, note queste ultime, si può ricavare l'equazione della traiettoria eliminando il tempo. Inoltre, una legge che dà la posizione del punto sulla traiettoria in funzione del tempo, si ottiene fissando sulla traiettoria la posizione P_0, occupata all'istante $t = t_0$, e la posizione generica P all'istante t. La lunghezza s dell'arco P_0P, coordinata curvilinea, contata positivamente secondo un verso prefissato, in funzione del tempo t, individua in ogni istante la posizione P sulla traiettoria. Il moto del punto è dunque individuato assegnando, insieme alla traiettoria, la legge oraria:

$$s = s(t), \tag{8}$$

che in genere è una curva regolare, rappresentabile in un riferimento cartesiano che ha come ascisse il tempo e come ordinate lo spazio s, figura 12.

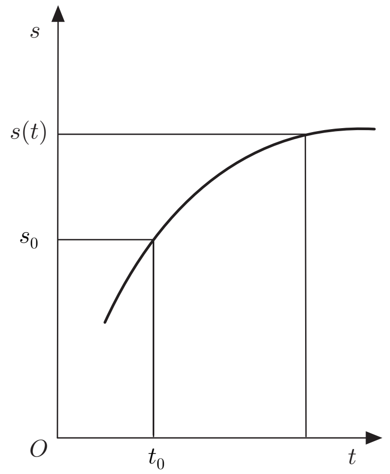

Fig. 3.12

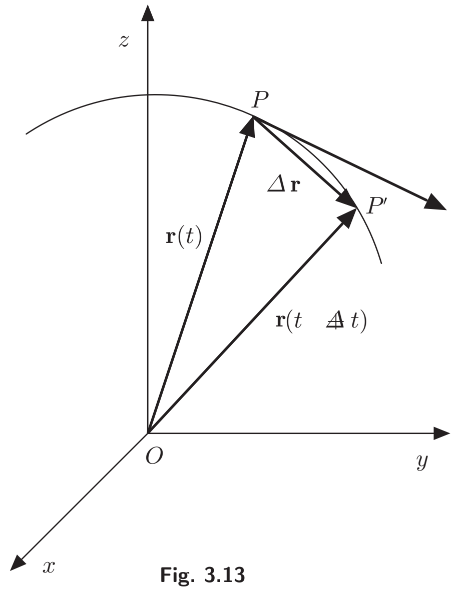

Fig. 3.13

4. Velocità del punto

Consideriamo un punto in moto su una traiettoria la cui posizione P è individuata ad un certo istante t dal vettore $\mathbf{r}(t)$; all'istante $t+\Delta t$ la sua posizione sarà in P' ed il vettore $\mathbf{r}$ avrà subito un incremento:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t),$$

che è lo spostamento del punto nell'intervallo di tempo Δt, figura 13. Il vettore

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}, \tag{9}$$

che ha direzione della corda dell'arco PP', definisce la velocità media nell'intervallo di tempo Δt. Se consideriamo intervalli di tempo sempre più piccoli, infinitesimi, la velocità media relativa a questi intervalli diverrà sempre più prossima alla velocità del punto mobile all'istante t e scriveremo:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}. \tag{10}$$

La velocità istantanea è uguale alla derivata del vettore $\mathbf{r}$ rispetto al tempo. Indicheremo la derivata di una grandezza funzione del tempo, soprasegnando con un punto la grandezza stessa. L'operazione analitica di derivazione assume così un preciso significato fisico.

Nel SI la velocità si misura in metri al secondo (m/s).

Il vettore velocità è diretto come la tangente alla traiettoria in P, figura 13; infatti $\Delta\mathbf{r}$ è diretto lungo la corda dell'arco PP' e quando si considerano intervalli di tempo infinitesimi, cioè P' tende a P, la corda tende alla tangente alla traiettoria; la direzione del vettore velocità è concorde col verso del moto.

Il modulo del vettore velocità è dato dal rapporto fra la lunghezza infinitesima della corda dr che congiunge due punti infinitamente vicini e l'intervallo infinitesimo di tempo dt corrispondente. È ovvio che in queste condizioni, a meno di infinitesimi di ordine superiore, dr coincide con l'elemento di arco ds, pertanto il modulo della velocità sarà:

$$v = \left|\frac{ds}{dt}\right| = |\dot{s}|. \tag{11}$$

In altri termini: il modulo della velocità istantanea coincide col valore assoluto della derivata della lunghezza dell'arco rispetto al tempo.

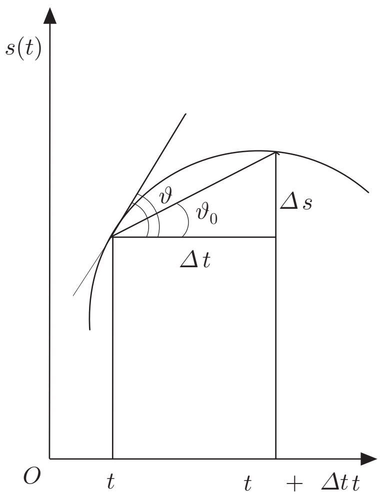

Fig. 3.14

Questa definizione ha anche una interpretazione geometrica: infatti consideriamo la curva oraria di figura 14; la velocità media, rapporto tra la lunghezza dell'arco o spazio percorso ed il corrispondente intervallo di tempo, $\Delta s/\Delta t$, è rappresentata dal valore numerico di $\tan\theta_0$. Allorché gli intervalli di tempo diventano sempre più piccoli, infinitesimi, il modulo della velocità media tende al modulo della velocità all'istante t ed è rappresentata dal valore numerico di $\tan\theta$, dove θ è l'angolo che forma la tangente alla curva oraria con l'asse orizzontale in corrispondenza all'istante t.

Il vettore velocità, indicando con $\boldsymbol{\tau}$ il versore della tangente alla traiettoria, può essere rappresentato in forma intrinseca o riferita all'arco, con la notazione

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau} = \dot{s}\,\boldsymbol{\tau}. \tag{12}$$

Se $\mathbf{r}(t)$ è dato dalla (6), essendo i versori della terna di riferimento costanti perché la terna è fissa, la sua derivata è semplicemente:

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}(t)\,\mathbf{i} + \dot{y}(t)\,\mathbf{j} + \dot{z}(t)\,\mathbf{k}. \tag{13}$$

La velocità è così espressa in forma cartesiana mediante le derivate delle componenti di $\mathbf{r}$, le quali non sono altro che le componenti cartesiane della velocità:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}(t), \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \equiv \dot{y}(t), \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \equiv \dot{z}(t).$$

Il modulo della velocità è quindi

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \equiv \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \tag{14}$$

Siamo ora in grado di esprimere la lunghezza dell'arco di traiettoria. Infatti scegliendo un arco infinitesimo ds e considerando un parallelepipedo elementare, di spigoli dx, dy, dz, tale che ds ne congiunga due vertici opposti, a meno di infinitesimi di ordine superiore, possiamo scrivere:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt, \tag{15}$$

da cui

$$s = \pm \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt, \tag{16}$$

relazione che, una volta precisato il segno, dipendente dal verso fissato sulla traiettoria, permette di trovare la lunghezza dell'arco s in funzione del tempo.

Dividendo la (15) per dt, si ha

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

che, in conformità con la (14), dà il modulo della velocità.

5. Moto dei sistemi di punti

Si definisce *atto di moto* di un sistema di punti la distribuzione delle velocità di tutti i punti del sistema, ad un certo istante.

Se $\mathbf{v}_i$ è la velocità del generico punto all'istante t, essendo $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$, si ottiene $d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i dt$, che rappresenta lo spostamento infinitesimo del punto nella posizione P_i, nell'intervallo di tempo dt. L'insieme degli spostamenti infinitesimi di tutti i punti si chiama spostamento elementare del sistema all'istante t.

Particolare importanza presenta l'atto di moto dei sistemi rigidi; in questo caso è opportuno definire una terna cartesiana $Oxyz$, solidale col sistema, in moto rispetto ad una terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$, figura 15. In questa rappresentazione ogni punto P del sistema, pur muovendosi rispetto a $\Omega\xi\eta\zeta$, durante il moto ha sempre posizione invariata rispetto a $Oxyz$; in altri termini le coordinate x, y, z di P risultano costanti, ossia indipendenti dal tempo. Il moto di P, rispetto a $\Omega\xi\eta\zeta$, è completamente definito una volta prefissate le sue coordinate x, y, z, costanti rispetto a $Oxyz$, e la posizione della terna solidale rispetto a quella fissa; allo scopo basta assegnare la posizione dell'origine O

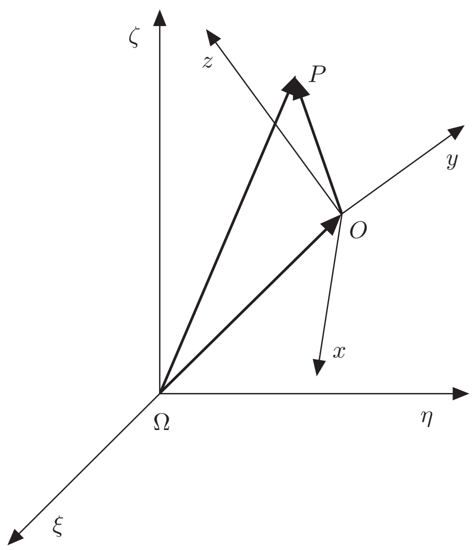

Fig. 3.15

e i versori degli assi $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ di $Oxyz$, in funzione del tempo. Allora l'equazione del moto di P è data dalla relazione:

$$(P - \Omega) = (O - \Omega) + x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

Oppure, sottintendendo Ω, perché fisso:

$$P = O + x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

5.1. Atto di moto rigido traslatorio

Se il sistema trasla rigidamente, tutti i suoi punti, ad un certo istante, sono animati della stessa velocità. I versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ della terna $Oxyz$ mantengono costante la loro direzione; perciò detta $\mathbf{v}_O$ la velocità dell'origine della terna solidale col sistema, funzione del tempo, questo solo vettore individua l'atto di moto traslatorio dell'intero sistema, rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$. Se $\mathbf{v}_O$ è costante, il moto si dice traslatorio uniforme. Manifestamente $d\mathbf{r}_O = \mathbf{v}_O dt$, individua lo spostamento traslatorio elementare del sistema.

5.2. Atto di moto rigido rotatorio

Si è visto che lo spostamento rigido rotatorio attorno ad un asse fisso, passante per due punti A e B del sistema, ai quali compete spostamento nullo, è individuato dal vettore rotazione $\Delta\varphi\,\hat{\mathbf{u}}$. Se l'angolo di rotazione è una funzione nota del tempo $\varphi = \varphi(t)$, il rapporto $\Delta\varphi/\Delta t$ tra l'angolo di rotazione e l'intervallo di tempo impiegato a descriverlo, definisce la velocità angolare media $\overline{\omega}$ del moto rotatorio; in simboli:

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

La velocità angolare istantanea è data da

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi},$$

cioè dalla derivata rispetto al tempo dell'angolo di rotazione. La velocità angolare si misura in rad/s. In base alla convenzione stabilita sul verso di percorrenza degli angoli, la velocità angolare sarà positiva o negativa se il moto rotatorio è destro o sinistro, rispetto all'asse orientato.

Si noti che in un moto rotatorio tutti i punti del sistema si muovono di moto circolare in piani ortogonali all'asse di rotazione, luogo dei punti dei centri delle circonferenze descritte dai punti del sistema.

Servendoci del vettore rotazione $\Delta\varphi\,\hat{\mathbf{u}}$, definiamo vettore velocità angolare la grandezza

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\hat{\mathbf{u}} = \frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{u}} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}, \tag{17}$$

dove si è posto $d\varphi\,\hat{\mathbf{u}} = d\boldsymbol{\varphi}$, vettore rotazione infinitesimo.

Nel moto rotatorio la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione parallela all'asse di rotazione, ed il suo modulo è funzione del tempo.

In conformità con la (4), lo spostamento infinitesimo $d\mathbf{r}$ di un generico punto del sistema è dato da:

$$d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\varphi} \times (P - \Gamma) = d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r},$$

dove $\mathbf{r} = (P - \Gamma)$ è il vettore che individua il punto rispetto ad un punto Γ, che riterremo fisso, scelto arbitrariamente sull'asse di rotazione.

Poiché $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, dalla precedente si ottiene la velocità del punto:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \tag{18}$$

Questa equazione individua ad ogni istante l'atto di moto rotatorio del sistema; figura 16. La velocità angolare ad ogni istante assume un unico valore mentre le velocità dei vari punti del sistema sono diverse. Il moto rotatorio è uniforme se $\boldsymbol{\omega}$ è costante.

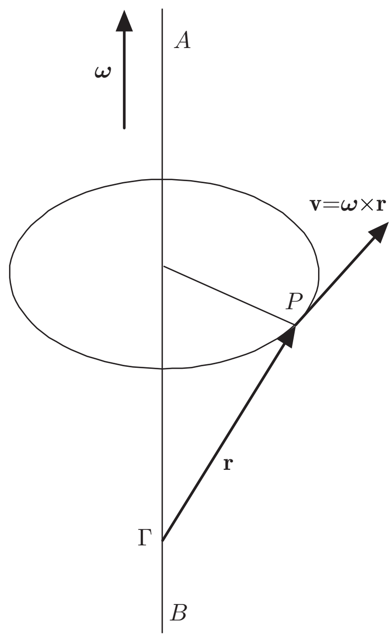

Fig. 3.16

5.3. Atto di moto rigido polare

Ricordiamo che in uno spostamento polare rigido un punto O (polo) rimane fisso. L'atto di moto polare è descritto da equazioni identiche alle (17) e (18); però, a differenza di quanto avviene nel moto rotatorio, il vettore $\boldsymbol{\omega}$ varia da istante ad istante in modulo e direzione; la rotazione avviene attorno ad un asse istantaneo di rotazione passante per il polo O. Dimostriamo ora come per il moto polare sia possibile determinare, in ogni istante, il vettore $\boldsymbol{\omega}$ che, per la (18), permette di individuare l'atto di moto.

La terna cartesiana fissa e la terna mobile, solidale col sistema rigido, animato dal moto polare, hanno la stessa origine, $O \equiv \Omega$; allora i versori degli assi della terna solidale, mutando ad ogni istante di direzione, sono funzioni del tempo:

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}(t), \qquad \mathbf{j} = \mathbf{j}(t), \qquad \mathbf{k} = \mathbf{k}(t).$$

Sostituendo nella (18), al posto di $\mathbf{r}$, successivamente $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, si ha:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}. \tag{19}$$

Moltiplicando scalarmente la prima per $\mathbf{j}$, la seconda per $\mathbf{k}$, la terza per $\mathbf{i}$ e ricordando le proprietà del prodotto misto, paragrafo 7-II, si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{k},$$

ed analogamente

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k} = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{i}, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i} = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{j}.$$

Queste relazioni danno semplicemente le componenti cartesiane di $\boldsymbol{\omega}$ secondo gli assi della terna mobile; si ha dunque:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \left(\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}\right)\mathbf{k} \\ &= \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k},\end{aligned} \tag{20}$$

che risolve il problema, una volta note le funzioni $\mathbf{i}(t)$, $\mathbf{j}(t)$, $\mathbf{k}(t)$.

Le (19) e (20) sono note sotto il nome di *formule di Poisson*.

È importante notare come le (19) possano essere espresse mediante una unica formula. Consideriamo infatti un generico vettore $\mathbf{V}$, costante rispetto alla terna $Oxyz$, solidale col sistema rigido in moto. Con riferimento alla terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$, derivando rispetto al tempo l'identità

$$\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k},$$

si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = V_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + V_y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + V_z\frac{d\mathbf{k}}{dt},$$

e tenendo presente le (19),

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = V_x(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}) + V_y(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j}) + V_z(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k}).$$

Raccogliendo $\boldsymbol{\omega}$ a fattor comune:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}. \tag{21}$$

Questa espressione comprende ovviamente, come casi particolari, le equazioni (19).

5.4. Atto di moto rigido rototraslatorio

Consideriamo un sistema rigido animato di moto rotatorio, con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di direzione fissa, e di velocità di traslazione $\mathbf{v}_T$, entrambe funzioni solo del tempo. Tenuto conto della (18), la velocità di un generico punto P del sistema, rispetto al riferimento fisso $\Omega\xi\eta\zeta$, è data dalla relazione:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_T + \boldsymbol{\omega}\times(P-\Gamma), \tag{22}$$

dove Γ è un qualsiasi punto dell'asse di rotazione. Il moto così definito si dice rototraslatorio e la velocità del punto è, istante per istante, somma delle velocità di traslazione $\mathbf{v}_T$ e di rotazione $\boldsymbol{\omega} \times (P - \Gamma)$, quest'ultima dipendente da P, figura 17.

La velocità del punto P può essere espressa in infiniti modi. Infatti, scelto un qualsiasi punto O, solidale col sistema rigido, in accordo con la (22), la velocità di tale punto sarà

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_T + \boldsymbol{\omega} \times (O - \Gamma),$$

e sottraendo membro a membro dalla (22), si ottiene:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (P - O), \tag{23}$$

Questa equazione presenta analogia formale con la (22), ma ne differisce per il fatto che O è un generico punto mobile del sistema. È chiaro però che il vettore $\boldsymbol{\omega} \times (P - O)$ ha la stessa caratteristica del vettore $\boldsymbol{\omega} \times (P - \Gamma)$, solo nella terna in cui sia fisso O e costante la direzione di $\boldsymbol{\omega}$. Per l'invariabilità della direzione di $\boldsymbol{\omega}$, tale è la terna con origine in O, assi paralleli a quelli della terna $\Omega\xi\eta\zeta$, che pertanto è animata di moto traslatorio di velocità $\mathbf{v}_O$, dipendente solo dal tempo, come $\mathbf{v}_T$. In questa terna il moto rotatorio avviene attorno all'asse passante per O e parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$.

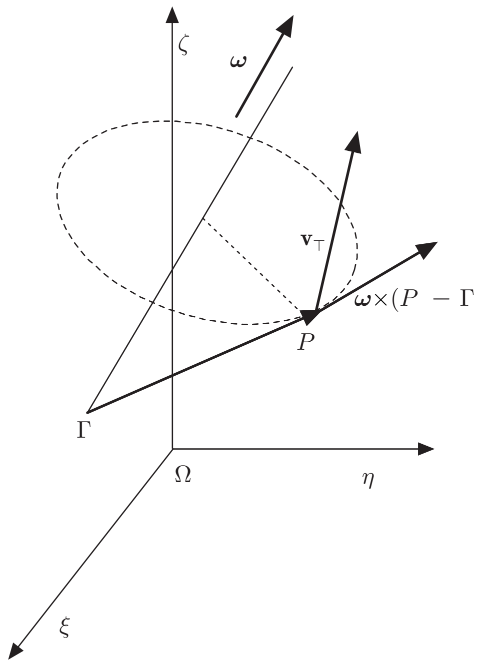

Fig. 3.17

Un moto rototraslatorio di particolare importanza è il *moto rototraslatorio uniforme*, in cui sia $\mathbf{v}_T$ che $\boldsymbol{\omega}$ sono *costanti* rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$. In queste condizioni risultano altresì costanti sia $\mathbf{v}_O$ che $\boldsymbol{\omega}$ rispetto alla terna $Oxyz$. Dimostriamo ora che nel moto rototraslatorio uniforme, la velocità del punto può essere rappresentata in modo che la velocità di traslazione risulti parallela a $\boldsymbol{\omega}$, ossia in modo che il moto considerato risulti elicoidale.

Scomponiamo infatti $\mathbf{v}_T$ nei componenti $\mathbf{v}_\parallel$ e $\mathbf{v}_\perp$, rispettivamente parallelo e ortogonale a $\boldsymbol{\omega}$. A causa dell'ortogonalità di $\mathbf{v}_\perp$ ed $\boldsymbol{\omega}$, esiste un particolare punto Q tale che:

$$\mathbf{v}_\perp = -\,\boldsymbol{\omega} \times (Q - \Gamma), \tag{24}$$

dove $(Q - \Gamma)$ è un vettore costante, al pari di $\mathbf{v}_T$ ed $\boldsymbol{\omega}$, figura 18.

Scrivendo la (22) come:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp + \boldsymbol{\omega} \times (P - \Gamma),$$

e sostituendovi la (24), si ottiene:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel - \boldsymbol{\omega} \times (Q - \Gamma) + \boldsymbol{\omega} \times (P - \Gamma) = \mathbf{v}_\parallel + \boldsymbol{\omega} \times (P - Q).$$

Il moto risulta elicoidale attorno ad un asse passante per Q e parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$. Appare dunque giustificato, una volta individuato Q, chiamare elicoidale qualunque moto rototraslatorio uniforme.

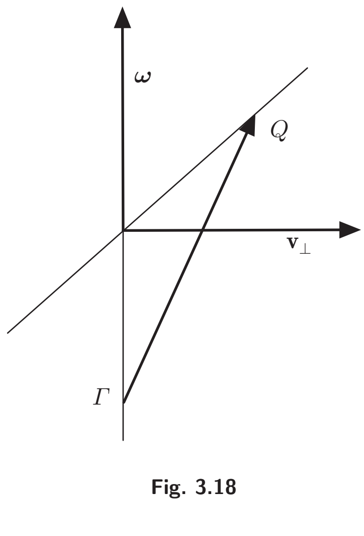

Fig. 3.18

Al fine di determinare il punto Q, si osservi che il prodotto vettoriale $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\perp$ rappresenta il vettore di modulo $\omega v_\perp$, ruotato di $90°$ in senso antiorario rispetto a $\mathbf{v}_\perp$; perciò il prodotto vettoriale $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\perp)$ risulta un vettore opposto a $\mathbf{v}_\perp$ e pari a $-\omega^2 \mathbf{v}_\perp$. Dunque:

$$\mathbf{v}_\perp = -\frac{1}{\omega^2}\,\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\perp).$$

Ma, tenuto conto della (24), si ha:

$$\boldsymbol{\omega} \times (Q - \Gamma) = \frac{1}{\omega^2}\,\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\perp),$$

ossia:

$$(Q - \Gamma) = \frac{1}{\omega^2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\perp) \equiv \frac{1}{\omega^2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_T). \tag{25}$$

La (25) è l'equazione vettoriale dell'asse del moto elicoidale, passante per Q, parallelo sia a $\mathbf{v}_\parallel$ che alla velocità angolare, che viene chiamato anche *asse del moto rototraslatorio uniforme*. Dunque ogni atto di moto rototraslatorio uniforme può essere ricondotto ad un moto elicoidale e, in particolare, se $\mathbf{v}_\parallel = 0$, ad un moto rotatorio.

Consideriamo ora il moto rototraslatorio più generale, in cui $\boldsymbol{\omega}$ può cambiare di direzione istante per istante. Si osservi che il vettore $(P - O)$, per quanto detto al paragrafo 5, è costante rispetto alla terna $Oxyz$ solidale col sistema. Pertanto, in virtù della (21), la sua derivata rispetto al tempo, nel riferimento fisso, risulta:

$$\frac{d(P-O)}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (P - O), \quad \Rightarrow \quad \frac{d\overrightarrow{P}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{O}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (P - O),$$

ossia:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (P - O), \tag{26}$$

relazione analoga alla (23), dove, come s'è detto, $\mathbf{v}_O$ rappresenta la velocità di traslazione del riferimento solidale e $\boldsymbol{\omega} \times (P - O)$, con $\boldsymbol{\omega}$ definito dalla (20), rappresenta la velocità di rotazione del sistema attorno ad un asse istantaneo, passante per O.

La (26) si può ritenere l'equazione più generale del moto rigido rototraslatorio, ove si considerino i valori assunti dai vettori $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{v}_O(t)$ e $\boldsymbol{\omega}(t)$ al tempo t.

Dunque l'atto di moto rototraslatorio è lo stesso che si avrebbe se il sistema fosse animato, all'istante t, di moto rototraslatorio uniforme. Per quanto si è detto prima, nell'istante considerato, esso è riconducibile ad un moto elicoidale. Come variano nel tempo i vettori $\mathbf{v}$ ed $\boldsymbol{\omega}$, varia altresì il moto elicoidale istantaneo. La retta passante per O, parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ si chiama *asse istantaneo di rotazione*, mentre l'asse istantaneo del moto elicoidale, anch'esso parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$, si dice *asse di moto* del sistema rigido nell'istante considerato.

L'equazione dell'asse di moto è analoga alla (25):

$$(Q - O) = \frac{1}{\omega^2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_O). \tag{27}$$

Indicando con $\mathbf{r}_O$ il vettore $(P - O)$, dalla (26), si ottiene lo spostamento elementare:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt = \overrightarrow{dO} + \boldsymbol{\omega}dt \times \mathbf{r}_O.$$

Moltiplicando scalarmente la (26) per $\boldsymbol{\omega}$, si ha

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = cost, \tag{28}$$

relazione valida anche con riferimento alle (22) e (23).

Si deduce che le velocità di ogni punto del sistema hanno la stessa componente $v_\parallel$ secondo una retta parallela ad $\boldsymbol{\omega}$. La (28) si chiama *trinomio invariante* dell'atto di moto rigido perché costituito dalla somma dei prodotti delle componenti omonime. Naturalmente l'invarianza non si riferisce al tempo da cui il trinomio dipende.

Affinché il trinomio si annulli è necessario e sufficiente che le velocità $\mathbf{v}$ e $\boldsymbol{\omega}$ siano mutuamente ortogonali oppure che una di esse sia nulla. Per esempio in un atto di moto rigido rotatorio il trinomio invariante è nullo, poiché la velocità di qualunque punto è sempre ortogonale alla velocità angolare.

La velocità di un punto, ad ogni istante, si può dunque esprimere come somma della velocità di traslazione $\mathbf{v}_\parallel$, parallela a $\boldsymbol{\omega}$, comune a tutti i punti,

$$\mathbf{v}_\parallel = \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\omega}$$

e di una velocità $\mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel$, ortogonale a $\boldsymbol{\omega}$, diversa per ogni punto.

5.5. Atto di moto rigido piano

Nel moto rigido piano, come nello spostamento rigido piano, la velocità di un punto giace sempre in un piano parallelo al piano direttore. Tali sono il moto rigido traslatorio ed il moto rigido rotatorio; in quest'ultimo, invariabile nel tempo è la direzione di $\boldsymbol{\omega}$, ortogonale al piano direttore. L'invariante scalare è sempre nullo. Nel moto rigido piano la componente della velocità parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ è sempre nulla, $\mathbf{v}_\parallel = 0$, pertanto un atto di moto rigido piano rototraslatorio, si può ridurre sempre ad un atto di moto rotatorio con asse istantaneo di rotazione, che è anche l'asse di moto, ortogonale al piano direttore. Tale asse incontra il piano direttore in un punto Q, chiamato *centro istantaneo di rotazione*, che può essere determinato per mezzo della (27). Graficamente, note le velocità di due punti P_1 e P_2, che giacciono nel piano direttore e, all'istante t, sono tangenti alle loro traiettorie, il punto

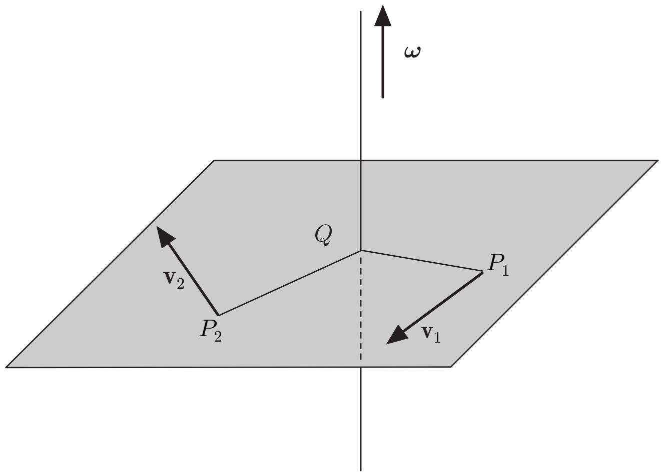

Fig. 3.19

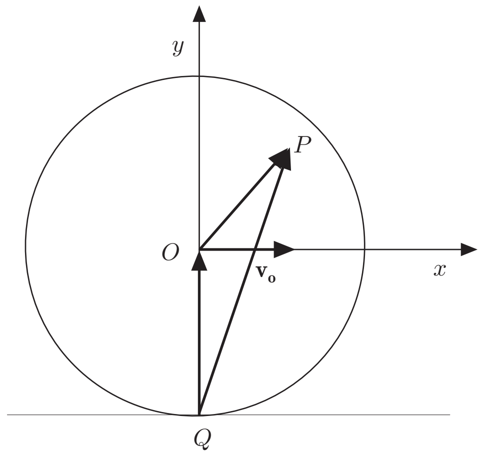

Fig. 3.20

di intersezione delle loro normali determina univocamente il centro istantaneo di rotazione, figura 19.

Esempi

1. Un corpo rigido ruota attorno ad un asse che passa per l'origine di una terna di riferimento ortogonale e forma angoli uguali con gli assi coordinati. Determinare la velocità di un punto posto sull'asse x di ascissa $x = 3\,m$, sapendo che la velocità angolare è costante ed ha modulo $2\pi\, rad/s$.

Poiché i coseni direttori dell'asse di rotazione sono uguali, è

$$3\cos^2\alpha = 1, \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ sono

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = \frac{\omega}{\sqrt{3}};$$

pertanto

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).$$

Essendo

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r} = x\mathbf{i},$$

e svolgendo il prodotto vettoriale si ottiene

$$\mathbf{v} = \frac{\omega x}{\sqrt{3}}(\mathbf{j}-\mathbf{k}), \qquad v = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\omega x = 15\,m/s$$

2. Un disco di raggio R rotola in un piano orizzontale, lungo una retta orientata nel verso del moto. La velocità del centro O del disco sia $\mathbf{v}_O$, parallela alla retta, come in figura 20. Trovare il centro istantaneo di rotazione.

Si tratta di un moto piano in cui il piano direttore è quello del foglio. Fissato un riferimento solidale col disco, con origine nel centro O, asse x parallelo alla retta lungo cui avanza il disco, e asse z ortogonale ad esso, positivo uscente, la velocità angolare ha come unica componente lungo z, $-\omega$. Dalla (27), svolgendo il prodotto vettoriale e chiamando x_Q e y_Q le coordinate del centro istantaneo di rotazione Q, si deduce

$$x_Q = 0, \qquad y_Q = -\frac{v_O}{\omega}.$$

Il punto Q, in ogni istante, ha velocità nulla, perciò

$$v_O = |\boldsymbol{\omega} \times (O - Q)| = \omega R,$$

e le precedenti diventano

$$x_Q = 0, \qquad y_Q = -\frac{v_O}{\omega} = -R.$$

Il centro istantaneo di rotazione coincide con la traccia della generatrice del disco nel punto di contatto con la retta orizzontale.

La velocità di un punto P del disco è

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (P - Q),$$

Tenendo conto che $(P - Q) = (O - Q) + (P - O)$, si può scrivere

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times [(O - Q) + (P - O)] = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (P - O).$$

Il moto di rotolamento è rototraslatorio; composto da una traslazione con velocità $\mathbf{v}_O$, parallela alla retta orizzontale, e una rotazione attorno all'asse del disco.

Il centro istantaneo di rotazione può anche essere determinato, osservando che la velocità di Q dev'essere nulla istante per istante. Dalla (23) si ha

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (Q - O) = 0, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} \times (Q - O) = -\mathbf{v}_O;$$

nel punto Q le velocità rotazionale e traslazionale sono opposte.

Svolgendo il prodotto vettoriale, nel riferimento O, si ottiene

$$x_Q = 0, \qquad y_Q = -\frac{v_O}{\omega} = -R,$$

come prima.

Si osservi ancora che la velocità di un punto del disco può essere espressa dal termine di pura rotazione, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (P - Q)$, oppure come somma della velocità di traslazione e di quella di rotazione attorno all'asse del disco, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (O - Q)$. In ogni caso la velocità è tangente alla traiettoria che, vista dall'osservatore solidale col piano direttore, è una cicloide, figura 21.

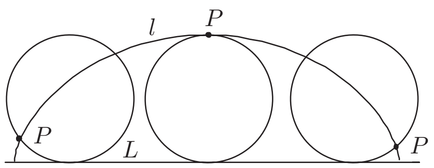

Fig. 3.21

In Meccanica Razionale si dimostra in generale, che il luogo dei punti Q, traccia dell'asse istantaneo del moto, visti dall'osservatore fisso col piano direttore, è una linea L che si chiama *base* del moto; mentre tale luogo, visto da un osservatore solidale con la figura mobile, è una linea l che si chiama *rulletta* del moto. In ogni istante base e rulletta hanno in comune il centro Q di istantanea rotazione.

Nel caso del disco che rotola, la base è la retta orizzontale e la rulletta la circonferenza che rappresenta il disco; in questo moto il centro O della rulletta, rispetto all'osservatore fisso, si muove di moto rettilineo con velocità $\mathbf{v}_O$, parallela alla base, mentre la base, rispetto all'osservatore solidale con la rulletta, è dotata di moto traslatorio con velocità $-\mathbf{v}_O$. Si realizza così la trasformazione per frizione di un moto rotatorio attorno ad O, in un moto traslatorio e viceversa.

Se la base è una circonferenza e la rulletta un'altra circonferenza, facendo rotolare senza strisciare la seconda sulla prima si ottiene un moto epicicloidale, se la seconda circonferenza è esterna alla prima, un moto ipocicloidale in caso contrario; un punto della rulletta genera rispettivamente una epicicloide o

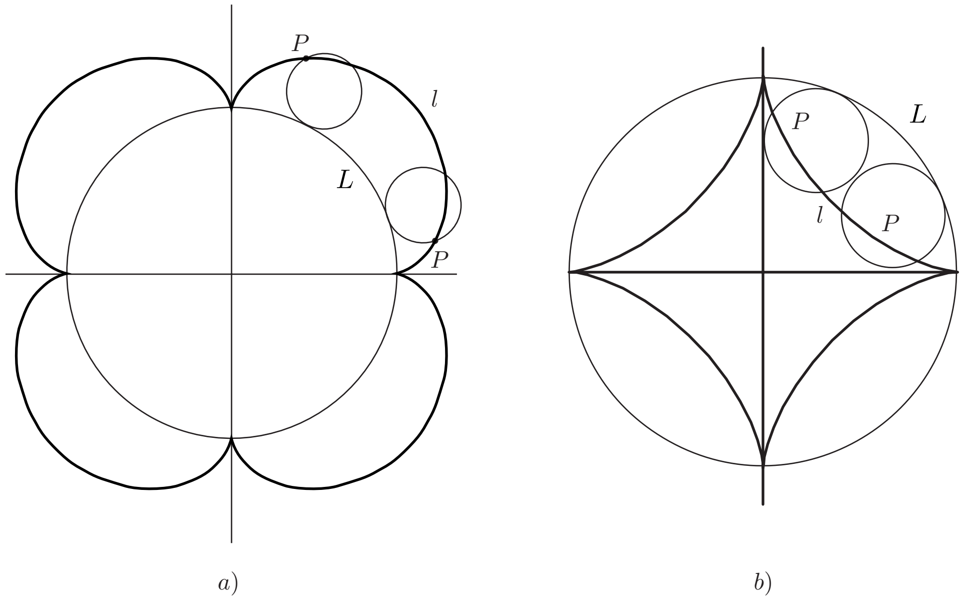

Fig. 3.22

una ipocicloide. In figura 22 sono mostrate tali traiettorie, nel caso in cui il rapporto tra il raggio R della base e il raggio r della rulletta è uguale a 4.

In questo moto il centro O' della rulletta ruota attorno al centro O della base con velocità angolare Ω. Un osservatore ruotante rispetto ad O con velocità angolare Ω, vede il centro O' fisso, e la base ruotante rigidamente attorno ad O con velocità angolare $-\Omega$. La rulletta ruota attorno ad O' senza strisciare sulla base, e deve avere una velocità angolare ω tale che la velocità del punto di contatto Q sia uguale a $-\Omega R$. Ne segue:

$$-\Omega R = \mp \omega r,$$

valendo il segno positivo o il segno negativo se il moto è epicicloidale o ipocicloidale. In ogni caso si ha

$$\left|\frac{\Omega}{\omega}\right| = \frac{r}{R};$$

il rapporto tra le velocità angolari è costante e si realizza la trasformazione per frizione di un moto rotatorio attorno ad O in un moto rotatorio attorno ad O' e viceversa.

3. Una trave è appoggiata su rulli di raggio R che rotolano senza strisciare rispetto alla trave e rispetto al terreno. Determinare il legame che intercorre tra la velocità di avanzamento della trave e quella dei rulli, figura 23.

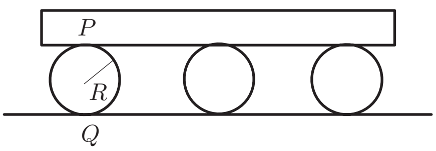

Fig. 3.23

L'asse istantaneo di rotazione di ogni rullo passa per il punto Q di contatto col terreno; la velocità di avanzamento dei rulli è in modulo $v_O = \omega R$, mentre la velocità del punto P, dove il rullo tocca la trave ha modulo $v_P = 2\omega R$. Questa è pure la velocità di avanzamento della trave, doppia di quella dei rulli.

I rulli restano indietro rispetto alla trave e se si dispone di un numero limitato di essi, per percorrere un lungo tratto, è necessario raccogliere quelli che restano dietro e portarli davanti alla trave. Questo metodo di trasporto apparve certamente spontaneo ai primitivi, finché qualcuno non ebbe l'idea geniale di collegare rigidamente agli estremi della trave due assi orizzontali alle cui estremità sistemò quattro dischi forati al centro. La ruota era inventata.

6. Accelerazione del punto

Consideriamo un punto P che si muove su una certa traiettoria; sia $\mathbf{v}(t)$ la sua velocità all'istante t e $\mathbf{v}(t+\Delta t)$ la velocità all'istante $t+\Delta t$; $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)$ sarà la variazione di velocità durante l'intervallo di tempo considerato, figura 24.

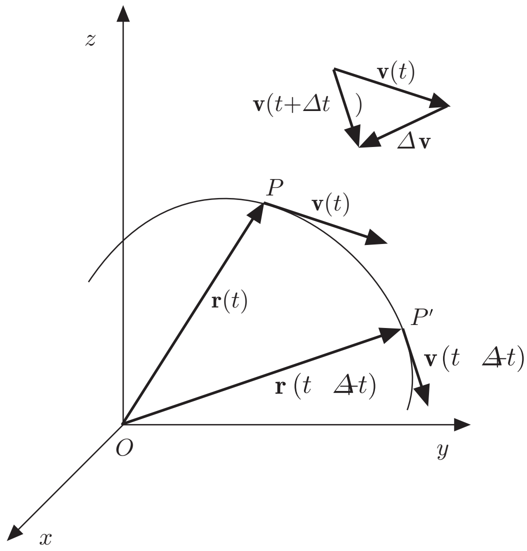

Fig. 3.24

Si definisce accelerazione media il rapporto

$$\overline{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t},$$

che è un vettore diretto come $\Delta\mathbf{v}$ e indica la rapidità con cui varia la velocità nell'intervallo di tempo Δt.

Se consideriamo intervalli di tempo sempre più piccoli, infinitesimi, l'accelerazione media tende all'accelerazione all'istante t, che indichiamo col vettore $\mathbf{a}$, cioè:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{v}},$$

oppure

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}(t)\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\mathbf{j} + \ddot{z}(t)\mathbf{k}. \qquad (29)$$

L'accelerazione è la derivata rispetto al tempo del vettore velocità, ovvero la derivata seconda, rispetto al tempo, del vettore posizione. Nel SI l'accelerazione si misura in metri al secondo per secondo $(m \cdot s^{-2})$.

Il modulo dell'accelerazione risulta

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Per formulare l'accelerazione sotto forma intrinseca va premessa qualche nozione di geometria differenziale.

6.1. Alcuni elementi di geometria differenziale

Consideriamo un arco di traiettoria s che congiunge una posizione prefissata P_0 con la posizione P generica del punto. Il vettore $\mathbf{r}$ e le sue componenti, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ possono essere considerate funzioni dell'arco s qualora si ricavi t dalla funzione $s(t)$, cioè la funzione inversa $t = t(s)$; così si ottiene:

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad z = z(s).$$

Lo scopo di assumere s come variabile anziché t è quello di rendere più semplici i calcoli; d'altra parte si può passare da una variabile all'altra, avendo introdotto la variabile intermedia s, tenendo presente che se $x = x(s)$, la derivata rispetto al tempo è

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}$$

e viceversa.

Consideriamo il rapporto:

$$\frac{\Delta \mathbf{r}(s)}{\Delta s},$$

che, scalarmente, è il rapporto tra la corda di un elemento d'arco e l'elemento stesso; il limite di tale rapporto, che chiamiamo $\boldsymbol{\tau}$,

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau},$$

è il versore della tangente alla traiettoria in un punto P. Il modulo è ovviamente unitario perché quando l'arco diventa infinitesimo, corda ed arco tendono ad assumere lo stesso valore. Le componenti di $\boldsymbol{\tau}$ rispetto alla terna cartesiana ortogonale, sono i coseni direttori della tangente orientata.

Consideriamo sulla traiettoria due punti P e P' e le tangenti in questi punti; quando P' tende a P le due tangenti individuano un piano π che si chiama *piano osculatore*. Esso è il piano in cui meglio si adagia il tratto infinitesimo ds di traiettoria e, per definizione, contiene i versori $\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{\tau}'$ delle tangenti considerate. Nel piano osculatore definiamo una circonferenza osculatrice, o cerchio osculatore C, che è la circonferenza passante per tre punti infinitamente vicini della traiettoria, sulla quale si adatta al meglio l'arco infinitesimo ds. Il raggio R e il centro di tale circonferenza sono, rispettivamente, il raggio ed il centro di curvatura della traiettoria; $1/R$ è chiamata prima curvatura. In figura 25 è mostrato un arco Δs di traiettoria, piccolo ma finito, ed i versori delle tangenti condotte nei suoi estremi P, P'. Quando l'arco diventa infinitesimo, i due versori appartengono sia alla traiettoria che alla circonferenza osculatrice e le normali ad essi permettono di individuarne il raggio ed il centro.

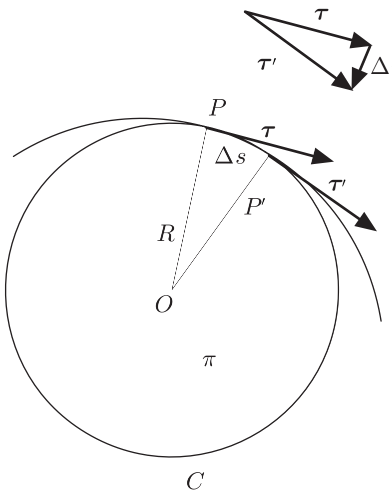

Fig. 3.25

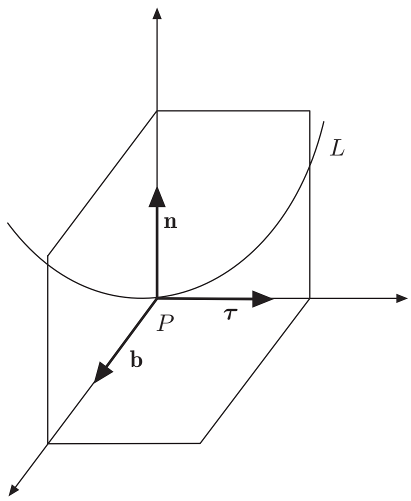

Fig. 3.26

La traiettoria in un punto P è caratterizzata da tre versori: $\boldsymbol{\tau}$, che abbiamo già definito, dal versore $\hat{\mathbf{n}}$ della normale principale, ortogonale a $\boldsymbol{\tau}$ e giacente nel piano osculatore, dal versore $\hat{\mathbf{b}}$ della binormale ortogonale al piano osculatore; la terna formata dai tre versori individua in ogni punto un triedro (mobile) che si chiama *triedro principale*; figura 26.

I tre versori ora definiti, sono dati da:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|^{-1} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|^{-1}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\tau} \times \hat{\mathbf{n}}; \qquad (30)$$

Per determinare $\hat{\mathbf{n}}$ osserviamo che $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$, quindi derivando rispetto ad s si ha:

$$2\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = 0;$$

ne segue che il vettore $d\boldsymbol{\tau}/ds$ che, si noti, non ha modulo unitario, è ortogonale al versore $\boldsymbol{\tau}$; ciò si può capire dalla figura 25 dove si osserva che il vettore $\Delta\boldsymbol{\tau}$ tende a disporsi ortogonalmente a $\boldsymbol{\tau}$ appena l'arco diventa infinitesimo, puntando verso il centro di curvatura. Pertanto il suo versore

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|^{-1}$$

coincide proprio con $\hat{\mathbf{n}}$.

Consideriamo un arco infinitesimo ds di traiettoria che appartiene quindi alla circonferenza osculatrice, figura 27; si ha $ds = Rd\varphi$, essendo R il raggio di curvatura. La *prima curvatura* della traiettoria è definita da

$$\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds}. \tag{31}$$

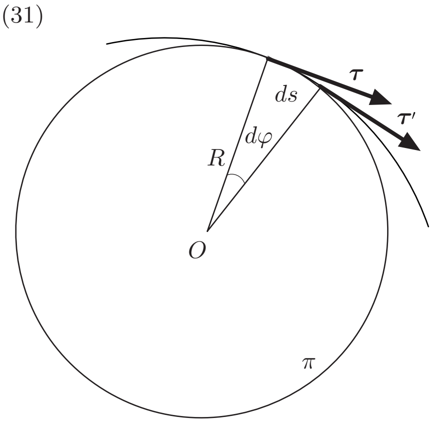

Fig. 3.27

Per determinare l'angolo infinitesimo $d\varphi$ consideriamo i versori delle tangenti in corrispondenza ad s e, limitandosi a variazioni del primo ordine, ad $s + ds$:

$$\boldsymbol{\tau}, \qquad \boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau} + \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}ds;$$

essi hanno entrambi modulo unitario, quindi il modulo del loro prodotto vettoriale è uguale a $\sin d\varphi \approx d\varphi$ perché le tangenti sono infinitamente vicine.

Svolgendo infatti tale prodotto, si ha:

$$\boldsymbol{\tau} \times \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}ds\right) = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \times \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}ds = \boldsymbol{\tau} \times \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}ds,$$

da cui discende:

$$\left|\boldsymbol{\tau} \times \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}ds\right| = d\varphi, \quad \Rightarrow \quad \left|\boldsymbol{\tau} \times \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| = \frac{d\varphi}{ds} \equiv \frac{1}{R}.$$

Ma $\boldsymbol{\tau}$ ha modulo unitario, quindi la precedente si può scrivere

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| = \frac{1}{R},$$

e, tenendo presente la seconda delle (30),

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{\hat{\mathbf{n}}}{R}. \tag{32}$$

Esprimiamo ora la prima curvatura in funzione di t. Essendo:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} = \dot{\mathbf{r}}\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d}{dt}\left[\dot{\mathbf{r}}\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1}\right]\frac{dt}{ds} = \left(\ddot{\mathbf{r}}\frac{ds}{dt} - \frac{d^2s}{dt^2}\dot{\mathbf{r}}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-3},$$

si ricava:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \left|\boldsymbol{\tau} \times \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| = \left|\dot{\mathbf{r}}\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} \times \left(\ddot{\mathbf{r}}\frac{ds}{dt} - \frac{d^2s}{dt^2}\dot{\mathbf{r}}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-3}\right| \\ &= |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-3} = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}.\end{aligned}$$

Dunque la (32) diventa:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{3/2}}|(\dot{y}\ddot{z}-\dot{z}\ddot{y})\mathbf{i}+(\dot{z}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{z})\mathbf{j}+(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})\mathbf{k}|. \tag{33}$$

Non ci occuperemo della seconda curvatura, che è definita nel piano di $\boldsymbol{\tau}$ e di $\hat{\mathbf{b}}$, perché ai fini del calcolo dell'accelerazione non interessa.

Quando la traiettoria giace in un piano, che supponiamo sia quello x-y della terna di riferimento, nella (33) sopravvive solo la componente secondo z, allora la prima curvatura diventa:

$$\frac{1}{R}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}, \tag{34}$$

oppure, se la traiettoria è data sotto forma esplicita:

$$\frac{1}{R}=\frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}}. \tag{35}$$

Le (34) e (35) si possono dimostrare anche in maniera più elementare: Consideriamo una traiettoria piana i cui moti componenti sono

$$x=x(t), \qquad y=y(t).$$

L'angolo infinitesimo $d\varphi$ tra le tangenti in due punti infinitamente vicini della traiettoria può essere ricavato tenendo presente che:

$$\tan\varphi=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad \Rightarrow \quad \varphi=\tan^{-1}\frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

da cui, derivando rispetto al tempo:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}, \quad \Rightarrow \quad d\varphi=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt.$$

ma, essendo

$$\frac{1}{R}=\frac{d\varphi}{ds}=\frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{d\varphi}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1}, \qquad \left|\frac{ds}{dt}\right|=v=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2},$$

si ottiene

$$\frac{1}{R}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}, \qquad \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|=\frac{v}{R}.$$

Analogo ragionamento vale per una traiettoria espressa sotto forma esplicita.

6.2. Accelerazione sotto forma intrinseca

Siamo ora in grado di esprimere l'accelerazione del punto in forma intrinseca. Essendo la velocità data da

$$\mathbf{v}=\frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau}=\dot{s}\boldsymbol{\tau};$$

derivando rispetto al tempo, si ottiene

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\ddot{s}\boldsymbol{\tau}+\dot{s}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}=\ddot{s}\boldsymbol{\tau}+\dot{s}^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}.$$

Ricordando la (32):

$$\mathbf{a}=\ddot{s}\boldsymbol{\tau}+\frac{\dot{s}^2}{R}\hat{\mathbf{n}}=\ddot{s}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{R}\hat{\mathbf{n}}. \tag{36}$$

Poiché $\boldsymbol{\tau}$ e $\hat{\mathbf{n}}$ giacciono nel piano osculatore, anche l'accelerazione giace in tale piano.

Concludiamo che, in generale, a differenza della velocità, l'accelerazione non è diretta lungo la tangente alla traiettoria; essa presenta una componente tangenziale a_t uguale alla derivata seconda dell'arco s rispetto al tempo, ed una componente normale a_n uguale al rapporto tra il quadrato della velocità e il raggio di curvatura:

$$a_\tau = \ddot{s}, \qquad a_n = \frac{v^2}{R}. \tag{37}$$

Il componente normale dell'accelerazione ha il verso della normale principale, cioè è diretto verso la concavità della traiettoria.

7. Accelerazione dei sistemi di punti

Ci limitiamo a considerare il moto dei sistemi rigidi. Nel moto rigido traslatorio tutti i punti, ad un certo istante, hanno la stessa velocità; essi avranno quindi, in ogni istante, la stessa accelerazione. Nel moto rigido rotatorio l'atto di moto, come abbiamo visto, è dato dalla relazione:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

che derivata rispetto al tempo dà:

$$\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \tag{38}$$

Il vettore $d\boldsymbol{\omega}/dt$, diretto lungo l'asse di rotazione, si chiama *accelerazione angolare* e si indica con $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

L'accelerazione angolare va misurata in rad/s^2. I termini

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}, \qquad \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v},$$

rappresentano rispettivamente *l'accelerazione tangenziale e l'accelerazione centripeta*; quest'ultima è ortogonale all'asse di rotazione, figura 28.

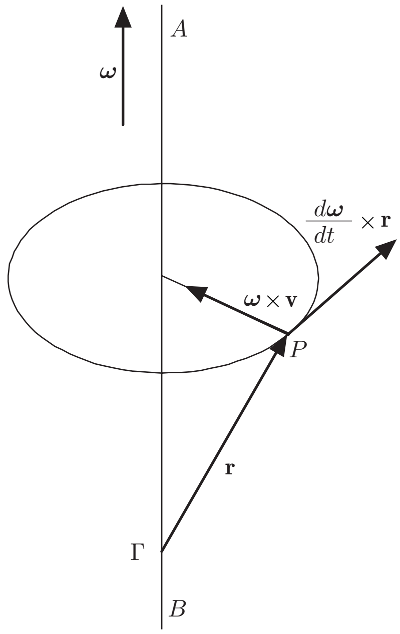

Fig. 3.28

Nel moto rigido polare l'accelerazione è data formalmente dalla (38) in cui però si deve tenere conto che $\boldsymbol{\omega}$ varia, istante per istante, oltre che in modulo anche in direzione.

Nel moto rigido rototraslatorio, essendo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (P - O) = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_O,$$

derivando rispetto al tempo, si ha:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_O). \tag{39}$$

L'accelerazione è somma dell'accelerazione di O e dell'accelerazione del moto rotatorio attorno ad un asse passante per O.

Esempi

4. Una particella si muove su una circonferenza di raggio R, con legge oraria:

$$R\varphi = s = \frac{1}{2}bt^2, \qquad \varphi = \frac{1}{2R}bt^2,$$

con b costante. Determinare l'accelerazione, la velocità angolare e l'accelerazione angolare.

Il moto non è uniforme, dunque l'accelerazione ha una componente tangenziale ed una componente normale, centripeta. Dalla precedente, derivando rispetto al tempo, si ha $\dot{s} = bt$ e $\ddot{s} = b$, pertanto

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{s} = b, \qquad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\dot{s}^2}{R} = \frac{b^2t^2}{R}.$$

La velocità angolare e l'accelerazione angolare risultano:

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{1}{R}bt, \qquad \ddot{\varphi} = \alpha = \frac{b}{R}.$$

5. Una particella compie un moto cicloidale; determinarne velocità e accelerazione.

Le equazioni del moto, figura 29, sono date da:

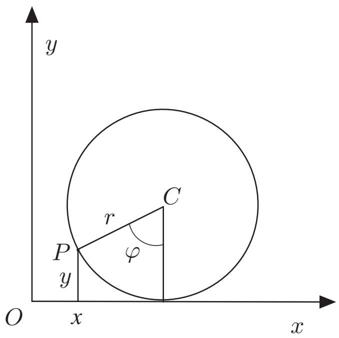

Fig. 3.29

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = r(1 - \cos\varphi),$$

dove $\varphi = \omega t$. Derivando rispetto al tempo, si ottiene

$$\dot{x} = \omega r(1 - \cos\omega t), \qquad \dot{y} = \omega r \sin\omega t;$$

quindi:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\omega^2 r^2(1 - \cos\omega t).$$

La velocità della particella è massima nel punto più alto della traiettoria, si annulla quando transita in corrispondenza alla base del moto. Derivando ancora, si ottengono le componenti cartesiane dell'accelerazione:

$$\ddot{x} = \omega^2 r \sin\omega t, \qquad \ddot{y} = \omega^2 r \cos\omega t,$$

da cui si ottiene il modulo:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \omega^2 r.$$

L'accelerazione è centripeta. Tenendo presente le (37), i moduli delle accelerazioni tangenziale e normale risultano:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\omega r\sqrt{2(1 - \cos\omega t)}\right] = \omega^2 r \frac{\sin\omega t}{\sqrt{2(1 - \cos\omega t)}},$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 r \frac{\cos\omega t - 1}{\sqrt{2(1 - \cos\omega t)}},$$

dove $1/R$ è dato dalla (34).

In conformità al risultato trovato più sopra, si ha ancora:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \omega^2 r.$$

8. Cenno sul problema inverso della cinematica

Questo problema sarà svolto con ogni dettaglio in dinamica; tuttavia, data la sua importanza, conviene formularlo fin da ora.

Abbiamo ricavato velocità ed accelerazione mediante successive derivazioni rispetto al tempo del vettore posizione $\mathbf{r}(t)$. Dalla definizione di accelerazione si ha:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{a}(t)dt$$

che, come è noto dall'analisi, rappresenta una equazione differenziale che si può integrare, nota l'accelerazione $\mathbf{a}(t)$ e la velocità $\mathbf{v}_0$ iniziale del punto all'istante $t = 0$, assegnata nel problema come condizione iniziale. In simboli:

$$\mathbf{v} = \int \mathbf{a}(t)dt + \mathbf{v}_0; \tag{40}$$

si rammenti che nell'operazione di derivazione le costanti scompaiono e di ciò bisogna tener conto nell'integrazione che, come noto, è l'operazione inversa.

La (40) è una equazione vettoriale che, in un problema tridimensionale, si scinde nelle tre equazioni scalari:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \int \ddot{x}(t)dt + \dot{x}_0, \\ \dot{y}(t) &= \int \ddot{y}(t)dt + \dot{y}_0, \\ \dot{z}(t) &= \int \ddot{z}(t)dt + \dot{z}_0. \end{aligned} \tag{41}$$

Una volta ricavata la velocità, essendo:

$$d\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t)dt,$$

con una successiva integrazione si ricava il vettore posizione:

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)dt + \mathbf{r}_0;$$

anche qui r_0 è la posizione del punto all'istante $t = 0$.

Questa equazione, in modo analogo a quanto detto per la velocità, si traduce nelle tre relazioni scalari:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \dot{x}(t)dt + x_0, \\ y(t) &= \int \dot{y}(t)dt + y_0, \\ z(t) &= \int \dot{z}(t)dt + z_0, \end{aligned} \tag{42}$$

che integrate danno le equazioni dei moti componenti.