2. Elementi di algebra vettoriale

1. Grandezze vettoriali

Una grandezza fisica vettoriale è definita dal suo valore numerico, che si chiama modulo o intensità, e dalla sua direzione. In generale un numero reale positivo ed una direzione individuano un vettore. Si rammenti che una retta orientata, sulla quale è stato stabilito un verso positivo, e di conseguenza quello negativo, definisce una *direzione*.

Esempi di grandezze vettoriali sono: lo spostamento, la velocità, l'accelerazione, la forza, il campo elettrico e molte altre. Un vettore nello spazio euclideo è rappresentato graficamente da un segmento la cui lunghezza, una volta fissata l'unità di misura, rappresenta il modulo o l'intensità del vettore, e la cui direzione, indicata da una freccia, è stabilita dagli angoli che esso forma con gli assi di una terna cartesiana di riferimento prefissata.

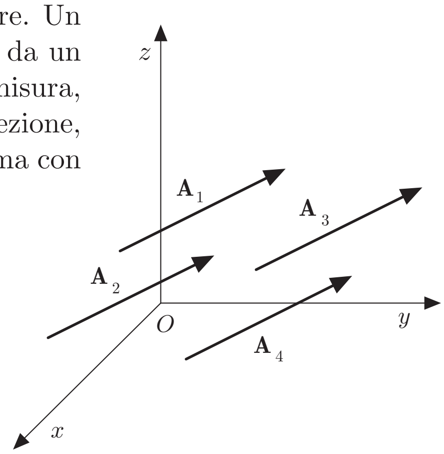

Fig. 2.1

Se il vettore non è applicato in un punto prefissato si dice *vettore libero* ed è rappresentato da uno degli ∞^3 segmenti equipollenti dello spazio, figura 1; esso pertanto può essere spostato lungo la retta su cui giace, retta d'azione, o trasportato su una qualsiasi altra retta parallela; in figura, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, ... sono tutti vettori equipollenti. Viceversa un vettore applicato ad un punto P è definito univocamente e lo indichiamo, precisando il punto di applicazione, con $(\mathbf{A}, P)$.

Graficamente un vettore è rappresentato da una lettera in grassetto $\mathbf{A}$, oppure da una lettera sormontata da una freccia $\overrightarrow{A}$. Altre volte, alludendo al vettore spostamento di un punto da una posizione P_1 ad una P_2, che si scrive $\mathbf{s} = P_2 - P_1$, si può usare la notazione $\mathbf{A} = (P - Q)$, avendo indicato con P e Q gli estremi del vettore.

Il modulo di un vettore $\mathbf{A}$ si indica semplicemente con A, oppure con $|\mathbf{A}|$.

Si definisce *versore* un vettore di modulo unitario. Esso, di solito, si indica con una lettera minuscola in carattere grassetto, munita di accento circonflesso; per esempio $\hat{\mathbf{u}}$. Il versore ovviamente stabilisce una direzione nello spazio, pertanto un vettore **A**, può essere indicato mediante il prodotto del suo modulo col versore che ne indica la direzione, ossia $A\hat{\mathbf{u}}$. In particolare, i versori degli assi di una terna cartesiana ortogonale x, y, z, nel seguito saranno indicati con le lettere **i**, **j**, **k**.

2. Direzione di un vettore

Consideriamo un vettore **A** appartenente ad un piano; fissata sul piano una retta orientata di riferimento, la direzione del vettore risulta stabilita univocamente dall'angolo θ che la retta d'azione del vettore forma con la retta di riferimento, figura 2. Un vettore **B** di direzione opposta formerà con la retta di riferimento un angolo $\pi + \theta$.

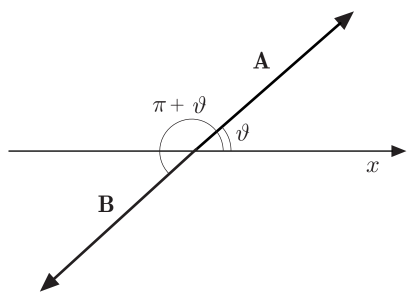

Fig. 2.2

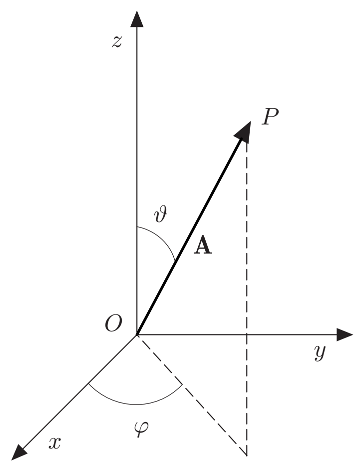

Fig. 2.3

Se il vettore **A** è rappresentato nello spazio, per quanto detto al paragrafo 1, a proposito dei vettori liberi, è possibile fissare una terna cartesiana e spiccare il vettore dalla sua origine come in figura 3. Gli angoli θ, polare, e φ, azimutale, stabiliscono la direzione del vettore. Il vettore di direzione opposta forma angoli $\theta+\pi$, $\varphi+\pi$. La direzione del vettore può essere individuata anche dai coseni direttori $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, dove α, β, γ, sono gli angoli che la retta d'azione di **A** forma con gli assi x, y e z.

3. Operazioni elementari

3.1. Somma di vettori

Consideriamo due vettori **A** e **B**; si dice somma dei due vettori il vettore **R**, definito da

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

Il vettore somma si ottiene mediante il seguente procedimento: si scelga un punto O e partendo da questo si riportino i vettori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$; completando il parallelogramma individuato dai due vettori, la diagonale concorrente con essi è il vettore somma $\mathbf{R}$, figura 4; è questa la così detta *regola del parallelogramma*. È altresì intuitiva l'operazione inversa: è possibile scomporre un vettore in due o più vettori aventi direzioni assegnate.

Dalla figura 4 si osserva che per costruire in maniera più semplice la somma di due vettori basta riportare il secondo adiacente al primo e chiudere il lato del triangolo col vettore risultante $\mathbf{R}$. Si deduce inoltre che la somma di due vettori gode della proprietà commutativa:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

Quando si deve eseguire la somma di più vettori la regola va applicata in successione. Ne discende che la somma di vettori gode della proprietà associativa.

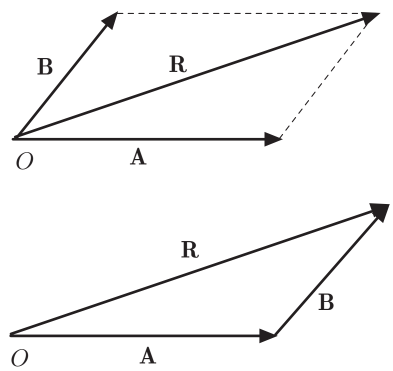

Fig. 2.4

Modulo del vettore somma

Dalla figura 5 si ha

$$\overline{OE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DE}^2;$$

ma:

$$\overline{OD} = \overline{OF} + \overline{FD} = A + B\cos\theta, \quad \overline{DE} = B\sin\theta,$$

pertanto:

$$\begin{aligned}\overline{OE}^2 = R^2 &= (A + B\cos\theta)^2 + B^2\sin^2\theta \\ &= A^2 + B^2\cos^2\theta + 2AB\cos\theta + B^2\sin^2\theta \\ &= A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta;\end{aligned}$$

da cui:

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \qquad (1)$$

Se si prende in considerazione l'angolo γ, figura 5, si ha

$$2AB\cos\theta = 2AB\cos(\pi - \gamma) = -2AB\cos\gamma,$$

quindi:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma}\,. \qquad (2)$$

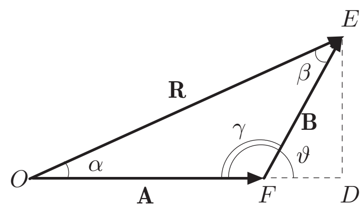

Fig. 2.5

Direzione del vettore somma

La direzione del risultante, per esempio rispetto ad $\mathbf{A}$, si ottiene mediante il teorema dei seni:

$$\frac{R}{\sin\gamma} = \frac{B}{\sin\alpha} = \frac{A}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\alpha} = \frac{A}{\sin\beta},$$

da cui si ricava α. Nel caso che i due vettori siano ortogonali si ha $\tan\alpha = B/A$.

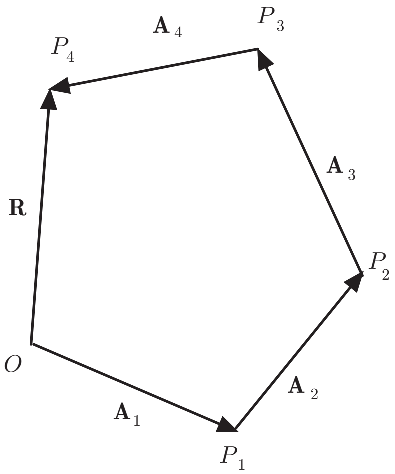

Fig. 2.6

Consideriamo ora n vettori $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ... $\mathbf{A}_n$ di cui vogliamo determinare il risultante. Preso un punto qualunque O, costruiamo i vettori

$$\mathbf{A}_1 = (P_1 - O), \quad \mathbf{A}_2 = (P_2 - P_1), \quad \cdots \quad \mathbf{A}_n = (P_n - P_{n-1}),$$

La somma degli n vettori è il vettore $\mathbf{R} = (P_n - O)$ espresso da

$$\mathbf{R} = (P_n - O) = (P_1 - O) + (P_2 - P_1) + \cdots + (P_n - P_{n-1}).$$

La somma vettoriale così ottenuta stabilisce la *regola della poligonale costruita con vettori adiacenti*, come mostrato in figura 6. In particolare se la poligonale si chiude, la somma è nulla.

3.2. Differenza di vettori

Dati due vettori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, si definisce differenza tra i due vettori il vettore $\mathbf{D}$ che aggiunto a $\mathbf{B}$ riproduce $\mathbf{A}$, ossia:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}.$$

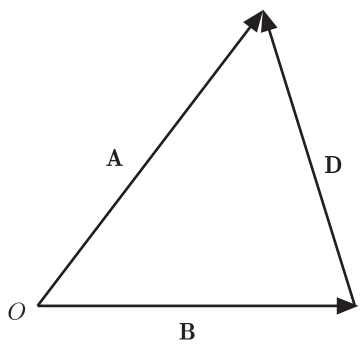

Fig. 2.7

Considerando opposto di $\mathbf{B}$ il vettore $-\mathbf{B}$, avente lo stesso modulo ma direzione opposta, si può scrivere

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}).$$

La differenza tra vettori è operazione opposta alla somma e gode di tutte le proprietà formali di quest'ultima. In figura 7 è mostrato un semplice modo per effettuare la differenza di due vettori. Scelto un punto O, da questo si riportino i vettori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$; il vettore differenza $\mathbf{D}$ chiude il triangolo puntando sull'estremo di $\mathbf{A}$.

Modulo della differenza

Dalla figura 8 si ha

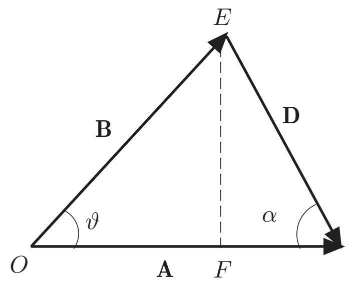

Fig. 2.8

$$\begin{aligned} D^2 &= (A - B\cos\theta)^2 + B^2\sin^2\theta \\ &= A^2 + B^2\cos^2\theta - 2AB\cos\theta + B^2\sin^2\theta \\ &= A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta, \end{aligned}$$

da cui

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}. \tag{3}$$

L'angolo α che dà la direzione di $\mathbf{D}$, per esempio rispetto ad $\mathbf{A}$, si può ricavare, come nel caso della somma, dal teorema dei seni.

Si osservi che la somma algebrica di più vettori può essere effettuata mediante la regola della poligonale costruita con vettori adiacenti. Basta riportare sui lati della poligonale, gli opposti dei vettori da sottrarre.

Esempi

1. Dati due vettori di modulo $A = 5\,u$, $B = 8\,u$, che formano un angolo $\theta = 60°$, determinare il modulo del vettore **R** somma e l'angolo formato da quest'ultimo con **A**, figura 9. (u indica una unità di misura arbitraria)

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} = \sqrt{129} = 11,36\,u$$

$$\frac{R}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{B}{\sin\alpha}, \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{B\sin\theta}{R}; \quad \alpha = 37,58°.$$

2. Il vettore **R** somma di due vettori **A** e **B** ha modulo $R = 10\,u$ e forma un angolo $\alpha = 30°$ con **A**, il cui modulo è $A = 12\,u$, figura 10. Trovare il modulo di **B** e l'angolo θ compreso tra **A** e **B**.

$$\frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\pi - \theta)}; \qquad \alpha + \beta + \gamma = 180°, \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = \theta.$$

$$\frac{A}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{R}{\sin(\pi - \theta)}, \quad \Rightarrow \quad A\sin\theta = R\sin\theta\cos\alpha - R\cos\theta\sin\alpha;$$

$$\tan\theta = \frac{R\sin\alpha}{R\cos\alpha - A} = -1,5 \quad \Rightarrow \quad \theta = 123,74°;$$

$$\frac{B}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\theta} \qquad B = \frac{R\sin\alpha}{\sin\theta} = 6,01\,u.$$

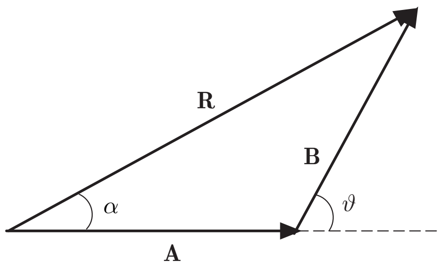

Fig. 2.9

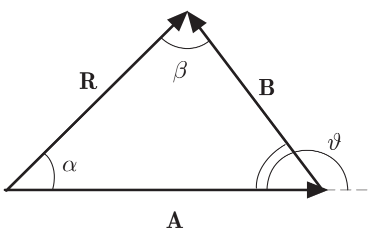

Fig. 2.10

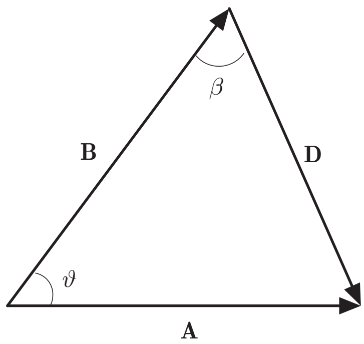

Fig. 2.11

3. Dati due vettori **A** e **B**, di moduli $A = 8\,u$, $B = 10\,u$, che formano un angolo $\theta = 60°$, determinare il modulo D della differenza fra i due vettori e l'angolo β formato con **B**; figura 11.

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{D}; \qquad D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta} = 9,16\,u;$$

$$\frac{A}{\sin\beta} = \frac{D}{\sin\theta}; \qquad \sin\beta = \frac{A\sin 60°}{D} = 0,76; \qquad \beta = 49,1°$$

4. Proiezione ortogonale di un vettore; componenti

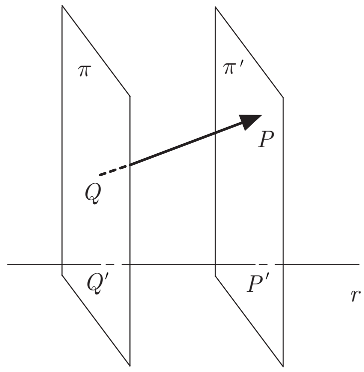

Fig. 2.12

Un vettore **A** può essere proiettato ortogonalmente su una retta orientata o su un piano. Conduciamo dagli estremi P, Q del vettore due piani π, π', perpendicolari ad una retta r orientata, figura 12, e siano P', Q' le intersezioni con r.

Il vettore $(P' - Q')$ si chiama *il componente* di **A** secondo r. Il modulo del vettore $(P' - Q')$, preso col segno positivo se concorde con la direzione di r o negativo se discorde, si chiama *la componente* di **A** secondo r, e va indicata con A_r; essa è chiaramente una quantità scalare:

$$Q'P' \equiv A_r = A\cos\theta,$$

dove θ è l'angolo formato dal vettore con r. Ovviamente tali considerazioni valgono, in particolare, se **A** ed r giacciono nello stesso piano. Analogamente proiettando il vettore su un piano, si ottengono il componente e la componente del vettore secondo il piano.

4.1. Componenti cartesiane di un vettore

Fissato un riferimento cartesiano ortogonale nel piano ed un vettore giacente in esso come in figura 13, proiettiamo gli estremi del vettore **A** sugli assi x ed y; le quantità:

$$OP' \equiv A_x, \qquad OP'' \equiv A_y,$$

prese col loro segno, sono le componenti di **A** secondo gli assi x ed y. Il modulo di **A** è:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}.$$

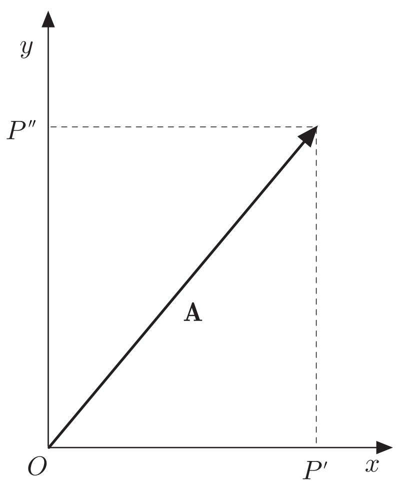

Fig. 2.13

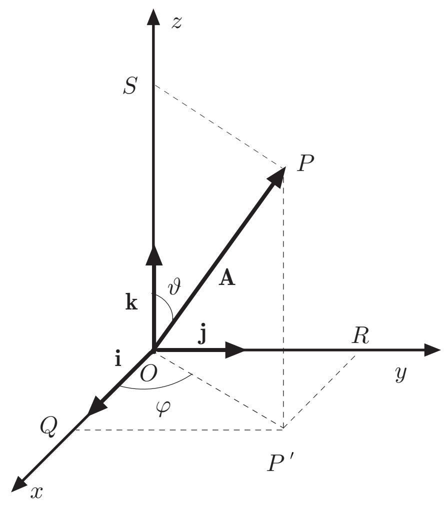

Fig. 2.14

Analogamente si definiscono le componenti di un vettore nello spazio secondo gli assi di una terna cartesiana ortogonale. Dalla figura 14 si ha:

$$OQ \equiv A_x, \qquad OR \equiv A_y, \qquad OS = PP' \equiv A_z,$$

oppure:

$$A_x = A\sin\theta\cos\varphi, \qquad A_y = A\sin\theta\sin\varphi, \qquad A_z = A\cos\theta.$$

Il modulo di $\mathbf{A}$ è:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \qquad (5)$$

Ovviamente, cambiando la terna di riferimento cambiano le componenti, però il modulo rimane inalterato.

Tenendo presente che un vettore può essere rappresentato dal prodotto del suo modulo per il versore della sua retta d'azione, fissata una terna cartesiana ortogonale e indicando con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, i versori degli assi spiccati dall'origine O, come in figura 14, il vettore $\mathbf{A}$ può essere espresso come somma dei suoi componenti secondo gli assi:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}. \qquad (5)$$

Per comodità, si è rappresentato il vettore $\mathbf{A}$ spiccato dall'origine degli assi; se esso è comunque posizionato nello spazio, indicandolo con la notazione $\mathbf{A} = (P - Q)$, figura 15, le sue componenti risultano:

$$A_x = x_P - x_Q, \qquad A_y = y_P - y_Q, \qquad A_z = z_P - z_Q.$$

Si noti che in queste relazioni non compaiono le coordinate di P e Q separatamente, ma solo le loro differenze, perciò le proiezioni del segmento PQ non mutano se si sostituisce ad esso uno qualsiasi dei segmenti equipollenti atti ad individuare il vettore.

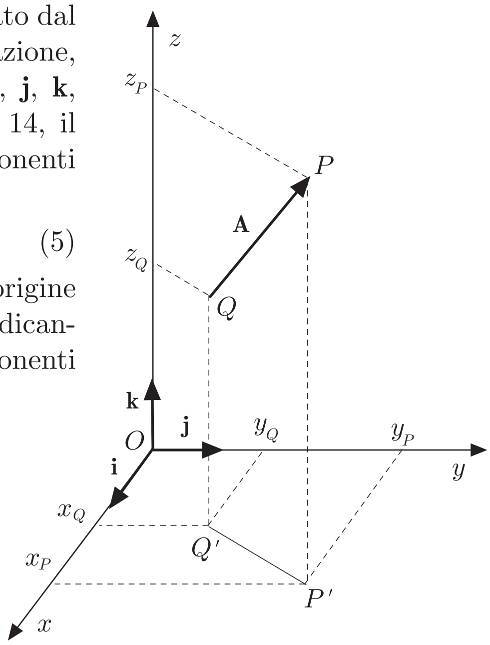

Fig. 2.15

5. Prodotto tra vettori

5.1. Prodotto scalare

Si definisce prodotto scalare di due vettori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ la quantità scalare

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta; \qquad (6)$$

Il prodotto scalare si indica con un punto; l'angolo θ formato dai due vettori stabilisce il segno del prodotto scalare, figura 16. In particolare esso è massimo quando i vettori sono allineati ed è nullo quando sono ortogonali.

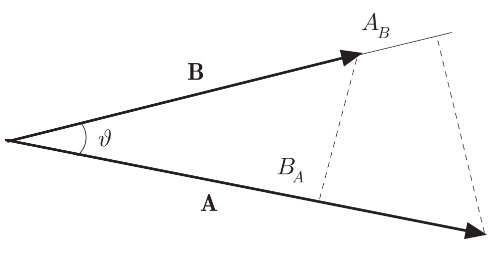

Fig. 2.16

Dalla definizione si deduce che il prodotto scalare di due vettori è uguale al modulo di uno di essi per la componente dell'altro secondo il primo e viceversa, cioè:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_B B = B_A A.$$

Il prodotto scalare di due vettori paralleli ed equiversi è uguale al prodotto dei moduli, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB$; in particolare $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$.

Dalla (6) discende che il prodotto scalare di $\mathbf{A}$ per un versore $\hat{\mathbf{u}}$ rappresenta la componente di $\mathbf{A}$ secondo la direzione individuata da $\hat{\mathbf{u}}$. La (6) mostra infine che il prodotto scalare gode della proprietà commutativa:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

ed inoltre della proprietà distribuitiva:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}.$$

È inoltre evidente che se m è uno scalare:

$$m(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = m\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot m\mathbf{B}.$$

5.2. Prodotto vettoriale

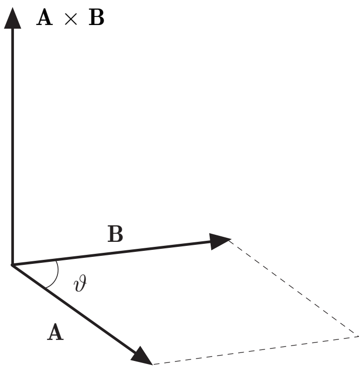

Fig. 2.17

Si definisce prodotto vettoriale tra due vettori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ e si indica con $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, il vettore ortogonale al piano individuato dai due vettori che ha modulo

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin\theta, \tag{7}$$

in cui θ è l'angolo, $< 180°$, compreso tra i due vettori, figura 17. Il prodotto vettoriale è massimo se i due vettori sono ortogonali mentre è nullo se sono paralleli.

La direzione del vettore $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ è determinata dalla regola di Ampère. Questa regola dice che un osservatore in piedi sul piano dei due vettori, deve vedere il vettore prodotto entrare dai piedi e uscire dalla testa quando $\mathbf{A}$ si sovrappone a $\mathbf{B}$, per una rotazione antioraria minore di 180°. Esistono altre regole equivalenti, per esempio quella dell'avanzamento di una vite destra o la ben nota regola della mano destra.

Dalla definizione si deduce che il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa, in altri termini:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}.$$

Il modulo del prodotto vettoriale si può interpretare anche come il prodotto del modulo di $\mathbf{B}$ per la componente di $\mathbf{A}$ ortogonale a $\mathbf{B}$ e viceversa; esso geometricamente rappresenta l'area del parallelogramma individuato dai due vettori.

5.3. Rappresentazione vettoriale di una superficie

In conformità alla rappresentazione geometrica del modulo del prodotto vettoriale, una superficie piana S, il cui contorno è orientato come in figura 18, può essere rappresenta da un vettore $\mathbf{S}$, di modulo uguale al valore numerico dell'area della superficie, ortogonale ad essa ed orientato secondo la regola di Ampère. Le componenti di $\mathbf{S}$ secondo gli assi di una terna cartesiana, hanno un significato geometrico semplice. Consideriamo una superficie piana S e supponiamo che il piano cui appartiene la superficie formi un angolo θ col piano x-y, allora la proiezione di S su tale piano è $S\cos\theta$, figura 19. La normale ad S forma anch'essa l'angolo θ con l'asse z; pertanto la componente del vettore $\mathbf{S}$ lungo z è $S_z = S\cos\theta$. Lo stesso ragionamento vale se la superficie è comunque orientata; le componenti di $\mathbf{S}$ secondo gli assi cartesiani sono uguali alle proiezioni della superficie sui piani coordinati.

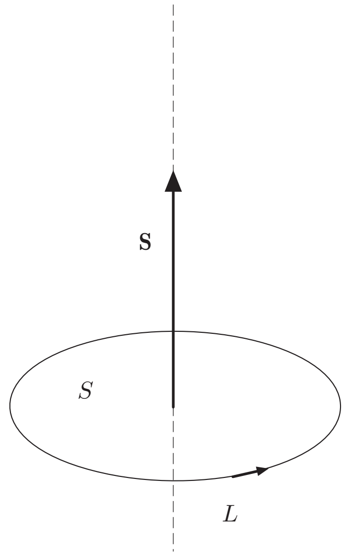

Fig. 2.18

Se la superficie non è piana, si può sempre suddividere in un gran numero di superfici elementari ΔS, ciascuna approssimativamente piana. Perciò il vettore che rappresenta l'intera superficie è dato da

$$\mathbf{S} = \sum_i \Delta\mathbf{S}_i.$$

Si osservi che il modulo di $\mathbf{S}$ non è uguale all'area della superficie; il modulo del vettore risultante non è uguale alla somma dei moduli $\sum_i \Delta S_i$. Tuttavia le sue componenti sono uguali alle proiezioni della superficie sui piani coordinati.

Consideriamo ora una superficie chiusa che suddividiamo in tante superfici elementari, approssimativamente piane, ciascuna rappresentata da un vettore $\Delta\mathbf{S}$, volto verso l'esterno. Possiamo associare le superfici elementari a coppie, tali che la somma delle loro proiezioni sia nulla. Per esempio, in figura 20 $\Delta\mathbf{S}$, $\Delta\mathbf{S}'$ hanno la stessa proiezione sul piano x-y, ma segni opposti: $\Delta S_z = -\Delta S'_z$. Così per le proiezioni sugli altri piani coordinati.

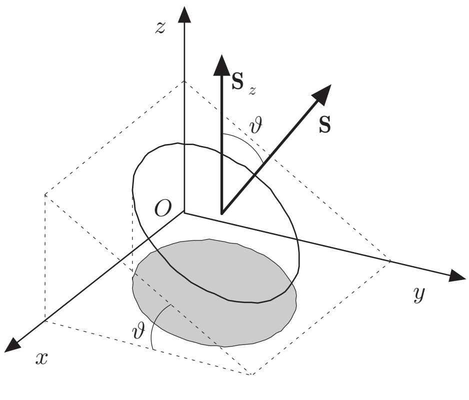

Fig. 2.19

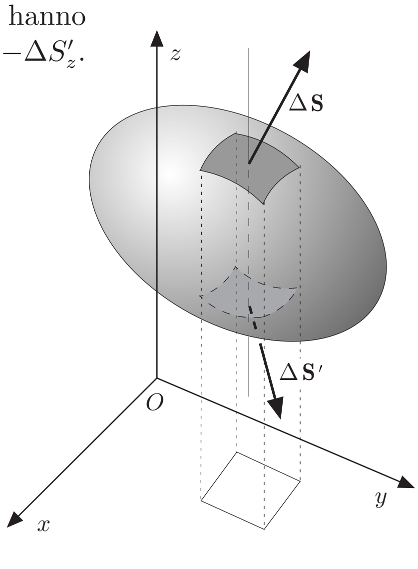

Fig. 2.20

Estendendo il ragionamento a tutte le coppie di superfici elementari in cui si può suddividere S, si conclude che il vettore rappresentativo di una superficie chiusa è sempre nullo.

6. Operazioni tra vettori in coordinate cartesiane

Se esprimiamo i vettori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ in coordinate cartesiane:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k},$$
$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k};$$

la somma o la differenza tra i due vettori si può scrivere

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_x \pm B_x)\mathbf{i} + (A_y \pm B_y)\mathbf{j} + (A_z \pm B_z)\mathbf{k}; \tag{8}$$

espressione che si estende al caso di più vettori. Si rammenti che le componenti, essendo quantità scalari, vanno prese sempre col loro segno, determinato dall'orientazione degli assi.

Il prodotto scalare è dato da:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \cdot (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z,\end{aligned} \tag{9}$$

essendo nulli i prodotti scalari dei termini misti che contengono versori ortogonali tra loro.

Analogamente, il prodotto vettoriale si scrive:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \times (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}).$$

Si osservi che i prodotti vettoriali tra i versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{i}$ della terna, risultano:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \end{array}$$

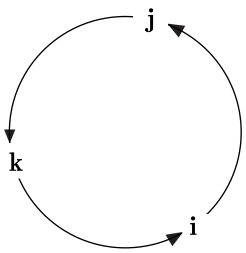

Fig. 2.21

relazioni che possono essere facilmente rammentate, disponendo i versori secondo lo schema di figura 21. Circolando in senso antiorario, si ottengono i prodotti vettoriali positivi. Cicolando in senso orario, quelli negativi. Pertanto si ha:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k},$$

che si può esprimere, più semplicemente, con la matrice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}, \tag{10}$$

sviluppando secondo i minori della prima riga.

La (10) conferma che il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa; infatti scambiando due righe della matrice, il prodotto vettoriale cambia segno.

Facendo attenzione all'ordine, vale la proprietà distributiva; infatti:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x + C_x & B_y + C_y & B_z + C_z \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}.$$

Infine, se m è uno scalare positivo:

$$m(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = m\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times m\mathbf{B}.$$

Si osservi che il modulo di un vettore, il prodotto scalare e il prodotto vettoriale sono grandezze invarianti rispetto ad un cambiamento della terna di riferimento. Infatti, nella traslazione di una terna di riferimento rispetto ad un'altra, le componenti di un vettore non variano perché, per quanto detto al paragrafo 4.1, intervengono le differenze tra le coordinate degli estremi del vettore. Nella rotazione, passando da una terna cartesiana (x, y, z) ad una nuova terna cartesiana (x', y', z'), avente in comune con la prima l'origine O, le componenti, espresse dalle coordinate dell'estremo del vettore spiccato dall'origine, si trasformano, come insegna la geometria, nel modo seguente:

$$A_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{i,k} A_k, \tag{11}$$

dove A_k sono le componenti secondo la terna (x, y, z), A_i le componenti secondo la terna (x', y', z') ed $\alpha_{i,k}$ i nove coseni direttori di quest'ultima rispetto alla prima. La trasformazione (11) è lineare, lascia inalterata la distanza tra due punti e quindi il modulo del vettore.

La (11) può essere illustrata mediante le formule di trasformazione di coordinate cartesiane piane, per rotazione. In figura 22 è mostrata la rotazione di un angolo θ degli assi x', y' rispetto agli assi x, y; si ricava facilmente

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y sin\,\theta \\ y' &= -x sin\,\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

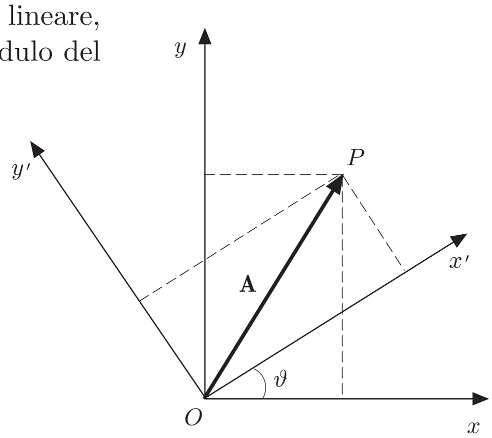

Fig. 2.22

dove

$$\alpha_{x',x} = \cos\theta, \quad \alpha_{x',y} = sin\,\theta, \quad \alpha_{y',x} = -sin\,\theta, \quad \alpha_{y',y} = \cos\theta.$$

Si verifica immediatamente che il modulo del vettore, distanza del suo estremo dall'origine, in seguito alla trasformazione, è invariante per rotazione delle coordinate.

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2.$$

Le precedenti formule di trasformazione si possono esprimere sotto forma di matrice, mediante trasformazioni ortogonali, ossia:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Indicando con M la matrice della trasformazione, si ha:

$$r' = Mr.$$

Poiché M è una matrice ortogonale, come noto, il suo inverso è uguale alla trasposta; $M^{-1} = M^T$. Si ottiene pertanto la trasformazione inversa:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Esempi

4. Dati tre vettori complanari di modulo $A = 6\,u$, $B = 5\,u$, $C = 4\,u$ e assegnati l'angolo $\theta_1 = 50°$ tra **A** e **B**, l'angolo $\theta_2 = 75°$ tra **B** e **C**, trovare il modulo del vettore risultante **R** e l'angolo θ che forma con **A**.

Assunto l'asse x orientato come **A**, l'asse y ortogonale ad esso e indicando con **R** il risultante, si ha:

$$R_x = A + B\cos 50° + C\cos 125° = 6,92\,u$$
$$R_y = B\sin 50° + C\sin 125° = 7,11\,u,$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 9,9\,u, \quad \tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = 1,027, \quad \theta = 45,77°.$$

5. Dati i vettori:

$$\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \qquad \mathbf{B} = -1\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

trovare modulo e direzione della somma, della differenza e l'angolo α tra i due vettori.

$$\begin{aligned} R = |\mathbf{A} + \mathbf{B}| &= \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2} \\ &= \sqrt{(3-1)^2 + (4+1)^2 + (-5+2)^2} = 6,16\,u \\ D = |\mathbf{A} - \mathbf{B}| &\sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2} \\ &= \sqrt{(3+1)^2 + (4-1)^2 + (-5-2)^2} = 8,6\,u. \end{aligned}$$

Per determinare la direzione di **R** si tenga presente la figura 3; per la somma si ha

$$R_z = R\cos\theta, \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{R_z}{R} = -0,487, \quad \Rightarrow \quad \theta = 119,14°;$$

$$R_x = R\sin\theta\cos\varphi, \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{R_x}{R\sin\theta} = 0,371, \quad \Rightarrow \quad \varphi = 68,178°.$$

Per la differenza:

$$D_z = D\cos\theta, \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{D_z}{D} = -0,81, \quad \Rightarrow \quad \theta = 144,48°;$$

$$D_x = D\sin\theta\cos\varphi, \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{D_x}{D\sin\theta} = 0,8, \quad \Rightarrow \quad \varphi = 36,8°.$$

L'angolo tra **A** e **B** si ricava per mezzo della definizione di prodotto scalare;

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\alpha,$$
$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB},$$

e poiché

$$A = \sqrt{9+16+25} = 7,07\,u, \qquad B = \sqrt{1+1+4} = 2,45\,u,$$

risulta:

$$\cos\alpha = -0,519, \quad \Rightarrow \quad \alpha = 121,30°.$$

6. Dati due punti di coordinate $P_1 \equiv (1,2,-3)$, $P_2 \equiv (3,-1,2)$, determinare la loro distanza e l'equazione della retta passante per P_1 e P_2.

Scelta una terna cartesiana ortogonale con origine in O, i vettori

$$\mathbf{r}_1 = 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_2 = 3\mathbf{i} - 1\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

individuano la posizione dei punti P_1 e P_2. Il vettore differenza

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k},$$

ha modulo

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \sqrt{4+9+25} = 6,16\,u,$$

e rappresenta la distanza P_1P_2.

L'equazione della retta passante per i punti assegnati è

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{5}.$$

In generale, assegnato un vettore

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k},$$

si può ricavare l'equazione della retta ad esso parallela e passante per il punto $P \equiv (x_1, y_1, z_1)$. Infatti, essendo le differenze $(x - x_1)$, $(y - y_1)$, $(z - z_1)$, rispettivamente parallele ad A_x, A_y, A_z, si ha

$$\frac{x-x_1}{A_x} = \frac{y-y_1}{A_y} = \frac{z-z_1}{A_z}.$$

Il lettore può facilmente verificare che l'equazione di tale retta è data vettorialmente, dall'equazione:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{A} = 0.$$

7. *Coseni direttori*

I coseni direttori fissano univocamente una direzione rispetto ad una terna di riferimento x, y, z. Spicchiamo dall'origine O della terna un vettore $\mathbf{A}$ di modulo arbitrario, come mostrato in figura 23, e siano α, β, γ gli angoli che esso forma con gli assi. Poiché:

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k},$$

dividendo per il modulo di $\mathbf{A}$, si ha:

$$\frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{A_x}{A}\mathbf{i} + \frac{A_x}{A}\mathbf{j} + \frac{A_z}{A}\mathbf{k}.$$

Ma:

$$\frac{A_x}{A} = \cos\alpha, \qquad \frac{A_y}{A} = \cos\beta, \qquad \frac{A_z}{A} = \cos\gamma, \tag{12}$$

per cui possiamo scrivere:

$$\frac{\mathbf{A}}{A} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k},$$

cioè, il versore di $\mathbf{A}$ fissa la direzione mediante i coseni direttori.

Quadrando e sommando le (12) si ottiene:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

relazione ben nota in geometria.

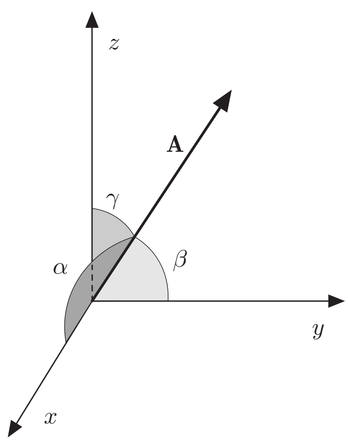

Fig. 2.23

8. *Equazione del piano*

Indichiamo con $\mathbf{N}$ un vettore normale al piano con origine in un punto O esterno ad esso e con l'estremo sul piano, figura 24. $\mathbf{r}$ sia un vettore arbitrario che ha la stessa origine O e l'altro estremo in un punto P generico del piano. Si ha:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{N} = N^2$$

Ciò significa che se O è l'origine di una terna cartesiana, per tutti i punti del piano ortogonale ad $\mathbf{N}$ si deve avere:

$$xN_x + yN_y + zN_z = N^2,$$

che è l'equazione del piano cercata.

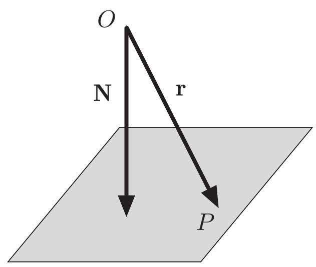

Fig. 2.24

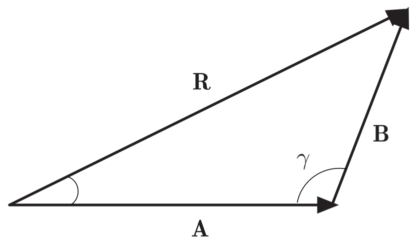

Fig. 2.25

9. *Teorema dei seni*

Dato un triangolo definito da $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, figura 25, moltiplichiamo tale somma vettorialmente per $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{R} = \mathbf{A} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B},$$

che implica l'uguaglianza dei moduli, cioè:

$$AR \sin\beta = AB \sin\gamma, \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}.$$

10. *Angolo tra due vettori*

L'angolo tra due vettori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, come si è visto nell'esempio 5, si ricava da

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB}.$$

L'angolo è invariante al mutare della terna di riferimento, anche se le componenti dei due vettori cambiano con essa. L'angolo si può ricavare anche da un'altra espressione. Se i due vettori sono individuati dagli angoli polari, θ_1, θ_2 e dagli angoli azimutali φ_1, φ_2, come in figura 26; si ha:

$$A_x = A \sin\theta_1 \cos\varphi_1, \quad A_y = A \sin\theta_1 \sin\varphi_1, \quad A_z = A \cos\theta_1,$$

$$B_x = B \sin\theta_2 \cos\varphi_2, \quad B_y = B \sin\theta_2 \sin\varphi_2, \quad B_z = B \cos\theta_2,$$

Il prodotto scalare tra i vettori è

$$AB\cos\theta_{12} = AB \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + AB \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + AB \cos\theta_1 \cos\theta_2;$$

da cui:

$$\cos\theta_{12} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2,$$

espressione indipendente dalle componenti dei vettori che, pertanto, dà l'angolo tra due direzioni nello spazio.

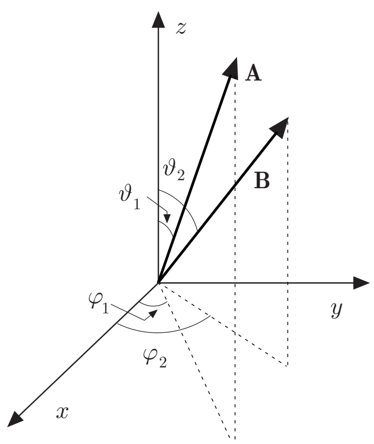

Fig. 2.26

7. Prodotto misto

Si definisce prodotto misto di tre vettori $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, lo scalare $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$. Il suo valore numerico rappresenta il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i tre vettori, figura 27. Infatti il modulo di $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ è dato dal valore numerico dell'area di base del parallelepipedo e la componente di $\mathbf{C}$ secondo $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ne è, a meno del segno, l'altezza. In base a questa interpretazione geometrica discende che:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}, \qquad (13)$$

espressione che può essere rammentata disponendo i vettori come in figura 21 e circolando in senso antiorario.

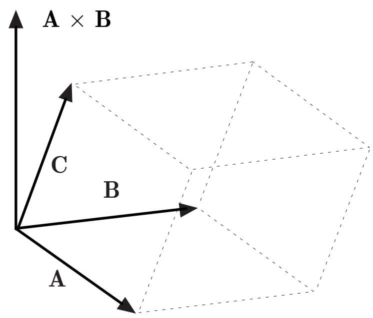

Fig. 2.27

Inoltre è possibile scambiare i simboli di prodotto scalare e vettoriale:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

Il prodotto misto, mediante le componenti cartesiane dei tre vettori, si esprime:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

In conformità con l'interpretazione geometrica e con la (14), il prodotto misto cambia segno se vengono scambiate due righe della matrice ed è nullo se due dei vettori che vi partecipano sono uguali.

8. Doppio prodotto vettoriale

Si definisce doppio prodotto vettoriale di tre vettori $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, il vettore $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$. Esso è un vettore complanare con $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ e per esso vale la relazione:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}. \qquad (15)$$

Questa identità va verificata scrivendo il primo membro in forma cartesiana.

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \left\{ \begin{pmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{pmatrix} C_z - \begin{pmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{pmatrix} C_y \right\} \mathbf{i} + \cdots$$

Sommando e sottraendo rispettivamente $A_x B_x C_x$, $A_y B_y C_y$, $A_z B_z C_z$, alle componenti secondo $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, e $\mathbf{k}$, la (15) resta dimostrata. Si faccia attenzione che nello scrivere il doppio prodotto vettoriale; le parentesi sono essenziali, cioè non vale la proprietà associativa.

Altro doppio prodotto vettoriale è il seguente:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}, \qquad (16)$$

che può essere verificato come prima.

La (16), come la (15), può essere dimostrata in maniera più immediata; si osservi infatti che il vettore $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ è complanare con $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, perciò possiamo scrivere:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \lambda\mathbf{B} + \mu\mathbf{C},$$

essendo λ e μ due scalari, indipendenti dal riferimento, in quanto tale è il prodotto vettoriale.

Scelta, per comodità, una terna in cui l'asse y coincida con la direzione di $\mathbf{B}$ e l'asse z in modo che $\mathbf{C}$ sia disposto nel piano y-z, si ha

$$\mathbf{B} = B\mathbf{j}, \qquad \mathbf{C} = C_y\mathbf{j} + C_z\mathbf{k}, \qquad \mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= A_zBC_z\mathbf{j} - A_yBC_z\mathbf{k}\\ &= (A_yC_y + A_zC_z)B\mathbf{j} - A_yB(C_y\mathbf{j} + C_z\mathbf{k}).\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\lambda = A_yC_y + A_zC_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, \qquad \mu = -A_yB = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{B},$$

da cui discende la (16).

Altra relazione notevole è:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [\mathbf{D} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]\mathbf{C} - [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]\mathbf{D}. \tag{17}$$

Infatti ponendo $\mathbf{F} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ e tenendo presente la (16), si deduce immediatamente la (17).

9. Derivata di un vettore

Consideriamo un vettore $\mathbf{A}(t)$ funzione di una certa variabile, per esempio del tempo. Possiamo scrivere

$$\mathbf{A}(t) = A(t)\hat{\mathbf{u}}(t),$$

con $A(t)$ e $\hat{\mathbf{u}}(t)$ rispettivamente, modulo e versore del vettore assegnato.

La derivata del vettore è definita da:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}[A(t)\hat{\mathbf{u}}(t)] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t)\hat{\mathbf{u}}(t+\Delta t) - A(t)\hat{\mathbf{u}}(t)}{\Delta t}.$$

Scrivendo il numeratore:

$$\begin{aligned}&\left[A(t) + \frac{dA}{dt}\Delta t\right]\left[\hat{\mathbf{u}}(t) + \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt}\Delta t\right] - A(t)\hat{\mathbf{u}}(t)\\ &= \left[\frac{dA}{dt}\hat{\mathbf{u}}(t) + A\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt}\right]\Delta t + \left[\frac{dA}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt}\right](\Delta t)^2.\end{aligned}$$

Dividendo per Δt e passando al limite per $\Delta t \to 0$, si ottiene

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \frac{dA}{dt}\hat{\mathbf{u}} + A\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt}. \tag{18}$$

La derivata di un vettore è costituita da due termini: il primo vettore ha come modulo la derivata del modulo stesso ed è diretto lungo $\hat{\mathbf{u}}$; il secondo rappresenta la variazione di direzione. Per quanto riguarda quest'ultimo, si noti che $d\hat{\mathbf{u}}/dt$ è un vettore ortogonale ad $\hat{\mathbf{u}}$. Infatti derivando l'identità $\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 1$, si ha

$$2\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0.$$

Essendo diversi da zero sia $\hat{\mathbf{u}}$ che $d\hat{\mathbf{u}}/dt$, si deduce che essi sono ortogonali.

10. Reticolo cristallino e reticolo reciproco

Nei solidi cristallini gli atomi sono disposti secondo un reticolo, costituito da celle elementari, ciascuna delle quali contiene uno o più atomi.

La cella elementare del reticolo cristallino più semplice, reticolo di Bravais, contiene un solo atomo. È conveniente, ma non necessario, rappresentare la posizione degli atomi nei vertici delle celle elementari cosicchè, definiti gli spigoli della cella mediante i vettori fondamentali o di base $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, in genere non ortogonali tra loro, la posizione di ogni atomo, rispetto ad un qualsiasi altro atomo, assunto come origine, può essere definita per mezzo del vettore traslazione $\mathbf{T}$:

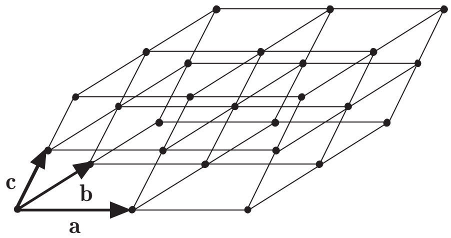

Fig. 2.28

$$\mathbf{T} = n_1\mathbf{a} + n_2\mathbf{b} + n_3\mathbf{c},$$

dove n_1, n_2, n_3 sono numeri interi, figura 28.

Si deduce che un reticolo cristallino possiede simmetria di traslazione, pertanto gli atomi appaiono disposti nello stesso modo se osservati da un punto individuato da un vettore posizione $\mathbf{r}$ oppure da un vettore posizione $\mathbf{r}'$, tale che:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + n_1\mathbf{a} + n_2\mathbf{b} + n_3\mathbf{c}.$$

I vettori $\mathbf{r}'$ e $\mathbf{r}$ devono differire per una traslazione $\mathbf{T}$. In figura 29 è mostrato, per semplicità, un reticolo bidimensionale rettangolare, di vettori fondamentali $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. In Fisica dei Solidi si dimostra che le proprietà strutturali ed elettroniche dei solidi cristallini possiedono simmetria di traslazione; lo studio di tali proprietà è fondato sul concetto di reticolo reciproco, introdotto da J. W. Gibbs.

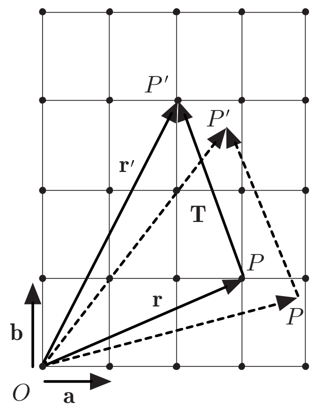

Fig. 2.29

Limitandoci a considerare le caratteristiche vettoriali del reticolo reciproco, i suoi vettori di base $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$, sono definiti in funzione dei vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, dalle equazioni:

$$\mathbf{a}^* = 2\pi\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}, \qquad \mathbf{b}^* = 2\pi\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}, \qquad \mathbf{c}^* = 2\pi\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}.$$

L'unità di misura di tali vettori è l'inverso di una lunghezza; infatti si osservi che il denominatore delle equazioni di definizione rappresenta il volume della cella elementare. Inoltre $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$, risultano ortogonali ai piani reticolari del reticolo diretto.

Si verifica immediatamente che $\mathbf{a}^*\cdot\mathbf{a} = 2\pi$, $\mathbf{a}^*\cdot\mathbf{b} = 0$ e le altre analoghe relazioni.

Il volume della cella del reticolo reciproco è definita da:

$$V^* = \mathbf{a}^*\cdot(\mathbf{b}^*\times\mathbf{c}^*) = \left(\frac{2\pi}{V}\right)^3(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot[(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})],$$

dove V è il volume della cella del reticolo diretto. Ma per la (17):

$$(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\mathbf{a} = V\mathbf{a},$$

pertanto

$$V^* = \mathbf{a}^*\cdot(\mathbf{b}^*\times\mathbf{c}^*) = \left(\frac{2\pi}{V}\right)^3 V(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = \left(\frac{2\pi}{V}\right)^3 V^2 = \frac{(2\pi)^3}{V}.$$

Il volume della cella elementare del reticolo reciproco è inversamente proporzionale al volume della cella elementare del reticolo diretto.