1. Grandezze fisiche

1. Introduzione

L'universo e il mondo in cui viviamo offrono uno scenario immenso di eventi incredibilmente vari. L'esigenza di comprendere le varie forme di vita, la complessità dell'universo, la struttura della materia, da sempre ha spinto l'uomo a studiare e analizzare con metodi sempre più sofisticati i fenomeni che si manifestano in natura. La fisica si è così sviluppata come una delle attività più importanti dell'intelletto umano determinando, come ricaduta, un profondo contributo al progresso della civiltà e della cultura in generale.

La fisica, intesa dai Greci come scienza della natura, $\varphi\tilde{\upsilon}\sigma\iota\varsigma$, nel suo più vasto significato, ossia come scienza che studia tutti i fenomeni naturali, fu chiamata fino all'inizio del XIX secolo, filosofia naturale. Successivamente si è limitata a studiare un più ristretto numero di argomenti: la meccanica, l'acustica, l'ottica e l'elettromagnetismo; scienze in cui la natura delle sostanze coinvolte non muta. È sorta quindi la suddivisione in argomenti classici con scarse connessioni reciproche, anche se la meccanica ha costituito il principio guida di tutti.

Questa suddivisione in seguito è gradualmente cambiata, riportando il ruolo della fisica verso il concetto più ampio degli inizi. Nella fisica del XX secolo, fisica moderna, con la scoperta della quantizzazione, la teoria della relatività, le nuove teorie cosmologiche e la scoperta di particelle elementari sempre più numerose, si è determinato un nuovo orientamento nel pensiero scientifico, cosicché i fenomeni fisici vengono descritti in maniera più unificante e più logica. Tuttavia di questa evoluzione la fisica classica non ne ha sofferto; basta pensare che le leggi naturali di importanza fondamentale, come le leggi di Newton, le leggi di conservazione dell'energia, della quantità di moto, del momento angolare, le leggi della termodinamica e dell'elettromagnetismo, continuano ad essere non solo i cardini della fisica moderna, ma anche i fondamenti di specializzazioni e attività professionali.

Queste circostanze hanno posto la fisica in una posizione di privilegio rispetto alle altre scienze naturali, anche perché l'impiego del metodo sperimentale conferisce ad essa una forza ineguagliabile. Il metodo sperimentale ha come fondamento la facoltà di riprodurre in laboratorio molti fenomeni naturali nelle condizioni più idonee per l'osservazione, cioè di eseguire una esperienza da cui trarre risultati che hanno validità universale. Va osservato che non sempre i fenomeni naturali possono essere riprodotti in laboratorio; a questa categoria appartengono quelli che si svolgono su larga scala come, per esempio, i fenomeni astronomici o geofisici; tuttavia anche in questi casi abili ricercatori possono dedurre conclusioni certe e universali.

Una volta che il ricercatore ha esaminato in dettaglio il fenomeno e individuato i vari *fattori* che in esso intervengono può, con l'esperienza, stabilire le relazioni di causa ed effetto e quindi la legge fisica che lo governa. Molte volte queste relazioni, per la loro complessità, possono sfuggire se l'esperienza non è opportunamente preparata e se non si dispone di un adeguato apparato sperimentale; infatti la natura non ci consente di assistere direttamente, per esempio, alla caduta libera dei gravi nel vuoto oppure al moto di una particella carica in un campo di induzione magnetica.

Stabilire una legge fisica comporta due strumenti fondamentali: l'uso di un linguaggio appropriato e la definizione dei fattori che intervengono nel fenomeno. Questi ultimi saranno definiti nel prossimo paragrafo. Il linguaggio della fisica è la matematica; essa fornisce la semplicità e la compattezza necessarie per esprimere le leggi fisiche e le loro conseguenze. In particolare la geometria svolge ed ha sempre svolto un ruolo preminente, perciò occorre anzitutto chiedersi se la geometria euclidea ha validità universale. Per fortuna la risposta è affermativa sia su scala ordinaria che su scala cosmica.

Presupponendo noto il concetto di misura geometrica, occorre stabilire se gli assiomi della geometria euclidea siano validi, verificando sperimentalmente, per esempio, i teoremi di Euclide. Infatti la geometria euclidea viene accettata perché le misure geometriche, nelle dimensioni ordinarie, danno una approssimazione talmente buona da non mettere in evidenza deviazioni apprezzabili rispetto ai teoremi; pertanto riteniamo che sia valida anche su scala cosmica. Tuttavia ciò non comporta in generale, che l'applicazione della geometria euclidea sia evidente e corretta.

Nel secolo scorso Gauss propose di verificare se la misura degli angoli interni di un grande triangolo desse come somma 180°. È noto infatti che in un triangolo sferico, giacente cioè su una superficie sferica, la somma degli angoli interni è sempre maggiore di 180°. In figura 1 è mostrato un triangolo tracciato sulla superficie terrestre, in cui il lato a giace sull'equatore ed i lati b e c giacciono su due meridiani passanti per il polo A. È evidente che la somma degli angoli $\alpha+\beta+\gamma > 180°$; in particolare $\beta = \gamma = 90°$ ed ovviamente non è valido il teorema di Pitagora poiché $a^2+b^2 \neq c^2$, essendo $b = c$.

Gauss, usando strumenti geodetici, misurò gli angoli del triangolo formato dalle cime delle tre montagne tedesche: Brocken, Hohehagen e Inselberg, il cui lato più lungo era di 100 km. Il risultato fornì che la somma degli angoli interni del triangolo differiva da 180° di 0,680 secondi d'arco; Gauss concluse che lo spazio è euclideo. Un'altra prova della validità di tale conclusione è fornita da un'esperienza suggerita da Schwarzschild (1900). Essa consiste nel misurare gli angoli sotto cui una stella lontana è vista dalla terra. In due osservazioni eseguite a distanza di sei mesi, la terra assume rispetto al sole posizioni opposte, la cui distanza è uguale all'asse maggiore dell'orbita ellittica ($3 \cdot 10^{11}\, m$), figura 2. Indicando con α e β i due angoli sotto cui è vista la stella, fino a distanze di circa $3 \cdot 10^{18}\, m$ (300 anni luce), corrispondenti al limite di misura angolare dei moderni telescopi, si ottiene sempre $\alpha + \beta < 180°$. Si chiama parallasse l'angolo $[180° - (\alpha + \beta)]/2$. Siccome la parallasse, per distanze di questo ordine di grandezza, è estremamente piccola, si deduce che il raggio di curvatura dell'universo è certamente maggiore di $10^{18} m$, ma ulteriori approfondimenti esulano dai limiti di queste considerazioni.

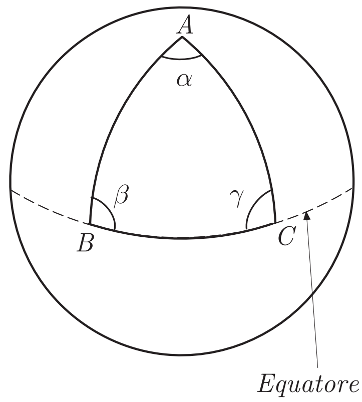

Fig. 1.1

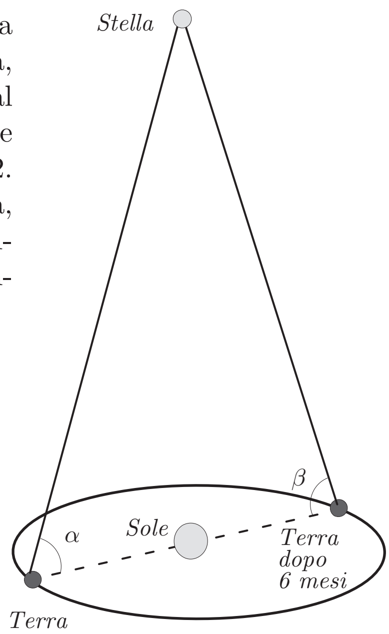

Fig. 1.2

2. Grandezze fisiche ed equazioni dimensionali

Definiamo grandezza fisica od osservabile *un fattore che interviene nel fenomeno fisico per il quale sia possibile stabilire il criterio del confronto*. In altri termini, fissata l'unità di misura, sia possibile definire la grandezza in maniera quantitativa.

Ciò implica una operazione di misura che può essere diretta o indiretta. Nel primo caso la grandezza viene confrontata con l'unità prefissata oppure vengono osservate le indicazioni di un apparecchio opportunamente tarato; è il caso, ad esempio, della misura di una lunghezza con un righello o della temperatura con un termometro. Nel secondo caso il valore della grandezza può essere ricavato attraverso l'equazione di definizione che, in genere, contiene grandezze misurabili direttamente.

Molte grandezze fisiche devono essere definite rispetto ad una certa terna di riferimento; infatti posizione, spostamento, velocità e accelerazione di un corpo dipendono dal riferimento adottato. Per esempio, l'altezza di un oggetto può essere riferita rispetto al livello del mare, la posizione di una nave o di un aereo rispetto a certe coordinate geodetiche. I valori che si ottengono sono diversi nei vari riferimenti, tuttavia è sempre possibile correlarli, una volta assegnata la relazione di trasformazione delle coordinate.

Certe grandezze fisiche devono essere espresse oltre che quantitativamente, cioè da un numero, anche da una direzione. Tali sono le grandezze vettoriali che descriveremo nel prossimo capitolo. Nello studio della fisica si introdurranno numerose grandezze fisiche di cui ne esprimiamo alcune attraverso equazioni di definizione non formalmente esatte; superficie S, volume V, densità ρ, velocità v, accelerazione a, energia cinetica E_c:

$$S = l^2\,, \qquad V = l^3\,, \qquad \rho = \frac{m}{V}$$

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t}\,, \qquad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

dove l, m, t, sono rispettivamente la lunghezza, la massa e il tempo. Si osservi che le sei equazioni legano tra loro nove grandezze. Possiamo ancora definire, la quantità di moto p, la forza F, lo sforzo normale σ:

$$p = mv, \qquad F = ma, \qquad \sigma = \frac{F_n}{S},$$

dove F_n è la forza normale alla superficie. In totale sono state introdotte dodici grandezze e nove relazioni tra queste. Si potrebbe continuare nell'elenco, trovando che la differenza tra le grandezze e le equazioni di definizione è sempre tre; pertanto assegnate tre grandezze, le altre possono essere espresse in funzione di queste ultime. Si osservi che il numero di grandezze che si possono assegnare è arbitrario, ma naturalmente il criterio è quello di assumerne il minor numero possibile e scegliere quelle per le quali si possa stabilire una unità di misura inalterabile, riproducibile, universalmente accettata e definita mediante una misurazione diretta.

In meccanica vengono adottate tre grandezze che chiamiamo *fondamentali: lunghezza, massa e tempo*; tutte le altre sono chiamate *grandezze derivate*. In elettrodinamica, per ragioni di opportunità, viene introdotta una quarta grandezza che è l'intensità di corrente.

Alle grandezze fondamentali vengono attribuite dimensioni che si indicano rispettivamente con i simboli

$$[L]\,, \qquad [M]\,, \qquad [T].$$

Allora, trattando algebricamente le equazioni di definizione, si trova che le dimensioni della velocità sono

$$[v] = \frac{[L]}{[T]} = [L]\,[T]^{-1}\,;$$

le dimensioni dell'accelerazione

$$[a] = \frac{[v]}{[T]} = [L]\,[T]^{-2}\,;$$

quelle della forza

$$[F] = [M][a] = [M][L][T]^{-2};$$

le dimensioni dell'energia cinetica

$$[E_c] = [M][v]^2 = [M][L]^2[T]^{-2},$$

e così via.

Le equazioni dimensionali sono molto utili per il controllo delle equazioni tra grandezze in cui, ovviamente, i due membri devono avere le stesse dimensioni. Per esempio, nell'equazione $(mv^2)/2 = mgh$, dove g è l'accelerazione di gravità e h una altezza, il primo membro ha le dimensioni dell'energia cinetica, $[M][L]^2[T]^{-2}$, il secondo membro le dimensioni $[M][a][L]$, cioè

$$[M][L][T]^{-2}[L] = [M][L]^2[T]^{-2};$$

l'uguaglianza dimensionale è verificata; la grandezza del secondo membro è chiamata energia potenziale.

Si noti che nelle dimensioni dell'energia cinetica non si è tenuto conto del fattore 1/2, Infatti tutti i fattori numerici si assumono adimensionati; tuttavia bisogna fare attenzione ai coefficienti moltiplicativi che compaiono in molte espressioni. Per esempio, la forza viscosa è definita dall'espressione $F = -bv$, dove b è un coefficiente che tiene conto delle proprietà del mezzo e dalla forma del corpo, v la velocità. Per la validità dell'equazione entrambi i membri devono avere le dimensioni di una forza; pertanto le dimensioni di b sono

$$[b] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{[M][L][T]^{-2}}{[L][T]^{-1}} = [M][T]^{-1}\,.$$

Bisogna osservare inoltre che grandezze fisiche diverse possono risultare equidimensionate; il caso del lavoro e del momento di una forza è il più noto. Infatti esprimendo, in maniera non formalmente esatta, il lavoro come prodotto della forza per lo spostamento nella direzione della forza, e il momento come prodotto della forza per il braccio, le dimensioni delle due grandezze risultano uguali. In tal caso l'ambiguità dimensionale non si elimina, però le grandezze e le unità di misura sono ben diverse; il lavoro è misurato in *joule* ed il momento della forza in *newton per metro*.

3. Unità di misura delle grandezze fondamentali. Sistema Internazionale di Unità di Misura (SI)

La lunghezza e il tempo sono concetti primitivi originati dalla necessità dell'uomo di fissare i confini dei propri campi, stabilire una misura di volume per gli scambi dei prodotti della terra e inoltre distinguere il ritmo dei giorni e delle stagioni tra passato e futuro. Ecco perché nei vari paesi si riscontrano le più svariate unità. Pollici, yard, miglia, galloni, nel sistema anglosassone; braccia, leghe, oncie, pertiche, staia, e molte altre diffuse un po' dappertutto. Non altrettanto intuitivi sono i concetti di massa e di intensità di corrente; la prima à una grandezza caratteristica di ogni corpo che ne determina il comportamento quando interagisce con altri corpi e per essere definita ha bisogno del concetto di forza. Analogamente, l'intensità di corrente è definita mediante l'interazione elettromagnetica tra particelle cariche in moto.

La massa può essere definita operativamente sfruttando la proprietà della bilancia a bracci uguali; si dice che due corpi hanno la stessa massa quando, essendo poste sui piatti della bilancia, questa risulta in equilibrio. Se su un piatto vengono poste masse tarate, la massa del corpo viene determinata nelle unità prestabilite. In realtà, la massa ottenuta con questo procedimento è la massa gravitazionale che, a priori, non è necessariamente uguale alla massa inerziale, cioè alla massa che determina il comportamento caratteristico di un corpo interagente con altri corpi. Tuttavia oggi si può affermare, con una precisione di misura di circa una parte su 10^{11}, che i valori delle due masse coincidono.

3.1. Lunghezza

L'unità di lunghezza è il *metro* (m). Storicamente (1889) il metro fu definito come la lunghezza di 1/10.000.000 del quadrante del meridiano terrestre passante per Parigi. Il campione era definito dalla distanza tra due tratti molto sottili incisi su una sbarra di $Pt(90\%)Ir(10\%)$. Questo campione venne conservato a Sèvres e ogni nazione si riferì ad esso per stabilire il proprio metro campione.

Nella definizione moderna, adottata nella XI Conferenza Generale di Pesi e Misure (1960), il metro è uguale a 1.650.763,73 lunghezze d'onda della radiazione elettromagnetica emessa nel vuoto dall'isotopo ^{86}Kr, in corrispondenza alla transizione tra gli stati $2p_{10}$ e $5d_5$. La radiazione emessa è facilmente identificabile poiché appare come una riga arancione nello spettro di emissione di questo isotopo.

Infine, secondo la convenzione adottata dalla XVII Conferenza Generale di Pesi e Misure (1983), il metro è definito anche come la lunghezza del cammino percorso dalla luce nel vuoto nell'intervallo di tempo di $1/299.792.458\,s$.

3.2. Massa

L'unità di massa è il *kilogrammo* (kg); esso è definito come la massa del prototipo internazionale del kilogrammo, realizzato con un blocco di platino-iridio che avrebbe dovuto avere la massa di un dm^3 di acqua distillata a $4^\circ\, C$ (1889). In effetti tale prototipo ha la massa di 1 $dm^3 + 27mm^3$ di acqua, ma non è apparso necessario modificarlo.

Il kilogrammo è stato definito anche per mezzo di una proprietà atomica, cioè come la massa di $5,0183 \cdot 10^{25}$ atomi dell'isotopo ^{12}C del carbonio; infatti l'unità di massa atomica (a.m.u.; atomic mass unit), è esattamente 1/12 della massa di tale isotopo.

Si deve osservare che quest'ultima definizione, pur avendo i vantaggi di quella atomica, se connessa alla definizione macroscopica di kilogrammo, implica l'uso di una costante universale, il numero di Avogadro N_A, che è noto con una precisione di una parte su 10^5, ossia $N_A = 6,02252 \cdot 10^{23}\, molecole/mole$.

3.3. Intervallo di tempo

L'unità di intervallo di tempo è il *secondo* (s). La definizione di questa grandezza ha avuto una evoluzione piuttosto complessa poiché è necessario fare riferimento a un moto periodico stabile, come quello dei corpi celesti, ed in relazione al periodo di tale moto stabilire l'unità di intervallo di tempo. Per diversi secoli tale unità è stata correlata al periodo di rotazione della terra attorno al suo asse. Tuttavia una unità di intervallo di tempo fondata sull'osservazione del moto apparente del sole rispetto alla terra, sarebbe costante solo se il sole apparisse sempre nello stesso punto ad intervalli regolari; è evidente che la rotazione della terra non soddisfa questa condizione. Infatti l'orbita della terra non è circolare, perciò la sua velocità varia, passando da un valore massimo al perielio ad un valore minimo all'afelio; inoltre il piano equatoriale non coincide col piano dell'eclittica, formando con esso un angolo di $23,5^\circ$.

Anche apportando tutte le possibili correzioni, sussistono variazioni secolari ed irregolari del moto della terra. Tenuto conto di tutto ciò è stato definito un *tempo solare medio*, mediato nell'arco di un anno tra due successivi equinozi di primavera (anno tropico), la cui unità è il secondo, uguale alla frazione 1/86400 del giorno solare medio. Pertanto l'anno solare medio comprende 365 giorni, 5 ore, 48 minuti e 45,5 secondi.

Successivamente, per varie esigenze anche di carattere astronomico, sono stati definiti un *tempo universale*, un *tempo sidereo* e un *tempo delle effemeridi*. Quest'ultimo fu adottato nel 1956 e l'unità corrispondente, secondo delle effemeridi, è uguale alla frazione 1/31.556.925,9747 dell'anno tropico 1900, ovvero del tempo che la terra impiegò a compiere la sua orbita attorno al sole nel 1900. Oggi, secondo la convenzione adottata dalla XIII Conferenza Generale di Pesi e Misure del 1967, il secondo è definito come la durata di 9.192.631.770,0 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli iperfini dello stato fondamentale del ^{133}Cs.

Si capisce il grande contributo apportato dalla fisica moderna nella realizzazione di campioni primari delle unità fondamentali, campioni che possono essere realizzati con grandissima precisione in laboratorio.

3.4. Intensità di corrente

Come grandezza elettrica fondamentale, in un primo tempo, fu fissata la carica elettrica la cui unità è il coulomb (C), definita come la carica che una corrente elettrica di un ampère (A) trasporta in un secondo. Il coulomb può essere definito anche attraverso la legge di Coulomb

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

che esprime il modulo della forza che viene esercitata tra due cariche elettriche q_1, q_2, poste a distanza r. Se le cariche elettriche sono unitarie, dello stesso segno e poste alla distanza di un metro, la forza è repulsiva e vale $1/(4\pi\epsilon_0)$, dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto; numericamente: $8,99 \cdot 10^9 N$ (*newton*). Successivamente, nella IX Conferenza Generale di Pesi e Misure (1948), si preferì adottare direttamente l'ampère (A), definito come l'intensità di corrente costante che, fluendo in due conduttori rettilinei, paralleli, infinitamente lunghi, di sezione circolare trascurabile, posti nel vuoto alla distanza di un metro, determina tra essi la forza di $2 \cdot 10^{-7}\,N$ per metro di lunghezza. Questa definizione discende dalla relazione $\frac{dF}{dt} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$, che esprime il modulo della forza per unità di lunghezza che viene esercitata tra due fili paralleli, infinitamente lunghi, posti nel vuoto alla distanza r, in cui circolano le correnti di intensità I_1, I_2; μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto. Come si vede, le unità elettriche sono legate alle grandezze meccaniche, pertanto possono essere definite per mezzo delle grandezze fondamentali, lunghezza, massa e intervallo di tempo; tuttavia motivi di praticità suggeriscono l'introduzione della quarta grandezza fondamentale.

3.5. Altre grandezze del Sistema Internazionale di Unità di Misura

Alle unità elencate del (SI), vanno aggiunte:

L'unità di temperatura, *kelvin* (K). Il kelvin è la frazione 1/273,16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua. Definizione adottata dalla XIII Conferenza nel 1967.

Unità di quantità di sostanza: *mole* (mol). La mole è la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi di $0,012\,kg$ di ^{12}C. Definizione adottata dalla XIV Conferenza nel 1971.

Unità di intensità luminosa, *candela* (cd). La candela è l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza $540 \cdot 10^{12}\,Hz$ e la cui intensità energetica, in tale direzione, è di $1/683\ W/sr$. Definizione adottata dalla XVI Conferenza nel 1979.

Accanto alle sette grandezze fondamentali, nel SI vengono adottate due grandezze supplementari: l'angolo piano e l'angolo solido.

Unità di angolo piano: *radiante* (rad). Il radiante è l'angolo piano con il vertice nel centro di una circonferenza, che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.

Unità di angolo solido: *steradiante* (sr). Lo steradiante è l'angolo solido, con il vertice nel centro di una sfera, che sottende una calotta sferica la cui area è uguale a quella di un quadrato il cui lato ha la lunghezza del raggio della sfera.

Altri sistemi di unità di misura, ormai in disuso, sono il sistema CGS, le cui unità fondamentali sono il centimetro, il grammo e il secondo, e il sistema degli ingegneri che assume come unità fondamentali il metro, la forza (unità di misura: kilogrammo-forza, (kgf), $1\,kgf = 9.80665\,N$) e il secondo.

4. Fattori di conversione

Le misure delle grandezze fisiche vanno sempre espresse nel SI; tuttavia, per consuetudine resiste ancora l'uso di unità più correnti; basti pensare alla velocità che comunemente è espressa in km/h invece che in m/s, alla potenza espressa in cavalli anziché in $watt$. La nautica è addirittura un universo a parte; in essa non c'è posto per il sistema decimale. Le distanze sono misurate in miglia, le altezze in piedi, le velocità in nodi e così via. È evidente che questa pratica proviene dal sistema di misura anglosassone che nei secoli scorsi ebbe larga egemonia.

Noto il valore di una grandezza in un sistema di unità di misura, è possibile esprimerlo in qualunque altro sistema per mezzo di una opportuna conversione. È necessario quindi conoscere la relazione di conversione delle unità da un sistema all'altro, che si chiama fattore di conversione. In appendice sono elencati i fattori di conversione tra le grandezze più comuni; per il momento, a chiarire il procedimento valga qualche esempio.

Esempi

1. Un'automobile viaggia alla velocità di $80\,km/h$; esprimere la velocità in m/s.

Poiché $1\,km = 10^3\,m$ e $1\,h = 3600\,s$, si ha

$$1\frac{km}{h} = \frac{1000\,m}{3600\,s} = \frac{1\,m}{3,6\,s} = 0,2778\frac{m}{s}\,.$$

Il fattore di conversione da km/h a m/s è 0,2778; pertanto $80\,km/h = 22{,}22\,m/s$. Viceversa il fattore di conversione da m/s a km/h è 3,6.

2. Esprimere la densità dell'acqua nel sistema SI, sapendo che nel sistema CGS vale $1 g/cm^3$.

Poiché $1\,g = 10^{-3}\,kg$ e $1\,cm^3 = 10^{-6}\,m^3$, è

$$1\frac{g}{cm^3} = \frac{10^{-3}\,kg}{10^{-6}\,m^3} = 10^3\,\frac{kg}{m^3}\,;$$

il fattore di conversione dal sistema CGS al SI per la densità è 10^3.

3. Determinare in m/s e in km/h la velocità di una imbarcazione che viaggia a 10 nodi.

È noto che 1 nodo corrisponde alla velocità di un miglio marino all'ora; poiché 1 miglio marino (mi) è $1852\,m$ e $1\,h = 3600\,s$; si ha

$$1\frac{mi}{h} = \frac{1852\,m}{3600\,s} = 0,514\,\frac{m}{s};$$

dunque la velocità dell'imbarcazione è di $5,14\,m/s$. Per ottenere la velocità in km/h, si osservi che $1\,mi/h = 1,852\,km/h$, dunque $v = 18,52\,km/h$.

5. Ordini di grandezza

Prefisso	Potenza	Simbolo
atto	10^{-18}	a
femto	10^{-15}	f
pico	10^{-12}	p
nano	10^{-9}	n
micro	10^{-6}	μ
milli	10^{-3}	m
centi	10^{-2}	c
deci	10^{-1}	d
kilo	10^{3}	k
mega	10^{6}	M
giga	10^{9}	G
tera	10^{12}	T

In tabella 1 sono elencate le abbreviazioni in uso che esprimono i multipli e i sottomultipli secondo le potenze di 10. È molto importante che un fisico o un ingegnere percepisca il significato dei valori approssimativi delle grandezze che intervengono in un problema; questo concetto deve essere acquisito con l'esperienza e diventa poi parte dell'intuizione. Per esempio, è noto che una mole di sostanza contiene un numero di particelle uguale al numero di Avogadro che ha come ordine di grandezza 10^{23}, perciò il numero di particelle di una sostanza in quantità ordinaria, è approssimativamente dello stesso ordine di grandezza. La lunghezza d'onda della luce visibile è dell'ordine di $0,5\,\mu$, $(0,5\cdot 10^{-6}\,m)$, mentre la lunghezza d'onda delle onde elettromagnetiche, nelle trasmissioni radio in onde medie, è dell'ordine di $10^2\,m$.

La diversità tra gli ordini di grandezza in fisica è enorme; una molecola di idrogeno contiene due atomi, mentre le molecole delle proteine e degli acidi nucleici (ad esempio DNA e RNA) contengono parecchie centinaia di atomi; il corpo umano è composto di circa 10^{28} atomi. Si stima che il numero di nucleoni (protoni e neutroni) dell'universo sia dell'ordine di 10^{80}; il Sole ne dovrebbe contenere 10^{57}, dunque nell'universo dovrebbero esserci $10^{80}/10^{57} = 10^{23}$ stelle di massa circa uguale a quella del sole. Nelle tabelle 2, 3 e 4 sono riportati alcuni ordini di grandezze relativi alle lunghezze, alle masse e ai tempi.

6. Misure

L'operazione più importante dell'esperienza è la misura poiché da questa si trae il valore della grandezza fisica in esame, espresso con un numero, seguito *sempre* dalle sue unità. Nella misura, oltre a un buon progetto, si richiede anche competenza e abilità dello sperimentatore, il quale non deve introdurre perturbazioni apprezzabili sul sistema che sta osservando. Le misure possono essere *dirette o relative* oppure *indirette o assolute*. Nel primo caso la grandezza viene confrontata con campioni multipli o sottomultipli dell'unità fondamentale, come avviene nella misura di masse eseguite con bilance analitiche, oppure nella misura di lunghezze mediante calibri di precisione. Questo procedimento viene usato in casi particolari ed è sempre molto lungo e complesso.

Nella pratica di laboratorio, di solito, vengono usati strumenti tarati con i quali il valore della grandezza viene letto direttamente, osservando la posizione che assume un indice mobile su una scala graduata in corrispondenza alla variazione della grandezza; *lettura analogica*. Esempi di tali strumenti sono: comparatori per la misura di lunghezze, cronometri, manometri, amperometri e moltissimi altri. Gli indici possono essere realizzati nei più svariati modi, dipendenti dalla sensibilità dello strumento; indici ad ago, indici muniti di nonio, indici a leva ottica e così via. Recentemente, in molte apparecchiature, l'indice è stato sostituito da un *indicatore digitale* che elimina alcuni inconvenienti della lettura analogica.

Se la misura di una certa grandezza fisica viene ripetuta diverse volte nelle stesse condizioni, in genere, si ottengono valori diversi, anche se la differenza tra i valori ottenuti è sempre molto piccola; si dice che nelle misure sono stati commessi errori. Gli errori hanno origini molto diverse e vengono classificati in *sistematici* e *casuali*.

Gli errori sistematici possono dipendere da imperfetta calibrazione dello strumento, da condizioni sperimentali non adatte e dallo sperimentatore stesso; essi sono sempre eliminabili.

Per quanto riguarda gli errori casuali, in genere, è impossibile stabilirne la causa poiché sono presenti in ogni esperimento, purché eseguito con apparecchiature adeguate. Tentativamente si può dire che sono dovuti ad errori di apprezzamento ed a fluttuazioni incontrollabili nelle condizioni di misura. Si capisce dunque che la misura non può dare il valore *vero* della grandezza, bensì il valore *più probabile*.

La teoria della misura esula dai nostri limiti, tuttavia per avere una idea del metodo sperimentale, è indispensabile darne alcuni cenni.

Ordine di grandezza di lunghezze (m)

Dimensioni dell'Universo	10^{27}
Distanza della galassia più vicina	10^{23}
Raggio della nostra galassia	10^{19}
Un anno luce	10^{16}
Sistema solare	10^{14}
Distanza dal Sole	10^{11}
Raggio della Terra	10^{6}
Spessore di un foglio di carta	10^{-4}
Raggi atomici	10^{-10}
Raggi nucleari	10^{-14}

Ordine di grandezza di masse (kg)

Sole	10^{30}
Terra	10^{24}
Nave	10^{8}
Uomo	10^{2}
Protone	10^{-27}
Elettrone	10^{-30}

Ordine di grandezza di intervalli di tempo(s)

Età della Terra	10^{17}
Un anno	10^{7}
Periodo delle onde sonore	10^{-3}
Periodo delle onde radio	10^{-10}
Periodo delle vibrazioni atomiche	10^{-15}
Periodo delle vibrazioni nucleari	10^{-21}

6.1. Sensibilità di lettura

Se la misura è eseguita con apparecchi tarati che, come s'è detto, è il metodo più frequente, definiamo sensibilità di lettura δx di un apparecchio il minimo spostamento dell'indice, causato dalla variazione della grandezza x, che è possibile apprezzare sulla scala graduata. Cooperano alla sensibilità di lettura la finezza dei tratti incisi sulla scala e il tipo di indice. Quando un buon apparecchio possiede questi requisiti ed è ben usato, δx è senz'altro la minima frazione dell'intervallo di graduazione apprezzabile sulla scala. Se, per esempio, nella misura di una lunghezza viene usato un calibro che può apprezzare 1/20 di mm, si dice che la sensibilità di lettura è di 1/20 di mm; una variazione di lunghezza viene apprezzata solo se è uguale o maggiore di tale valore.

A volte la sensibilità di lettura viene espressa come l'inverso di δx, in modo che il numero che ne risulta sia tanto più grande quanto più piccolo è δx. Negli apparecchi con indicatore digitale, si assume come sensibilità di lettura il valore corrispondente all'ultimo "digit" stabile durante la lettura.

L'affidabilità di una misura è determinata dal numero di cifre significative che, a loro volta, dipendono dalla stima dell'errore.

Supponiamo di eseguire, nelle stesse condizioni, N misure di una grandezza; se l'apparecchio è ben tarato e usato in modo appropriato, per effetto degli errori casuali, le letture differiranno tra loro di alcune unità di δx. Si assumerà allora come valore della misura, la media aritmetica delle letture:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N},$$

e finché N non è grande, la stima dell'errore della misura è data dalla semidifferenza tra i valori assoluti del massimo e del minimo dei valori ottenuti, che viene chiamata *semidispersione massima*.

6.2. Giustificazione della media

Consideriamo ora il caso di un numero di misure N molto grande, eseguite con un apparecchio di elevata sensibilità. Le misure saranno comprese in una regione, limitata dai valori minimo e massimo x_{min} e x_{max}, che suddividiamo in tanti intervalli Δx, di ampiezza piccola, ma tale che ognuno di essi comprenda un numero elevato di misure. Si riportano quindi in un grafico tanti rettangoli aventi ciascuno come base Δx e come altezza il rapporto tra il numero di misure $n(x)$ comprese in Δx e il numero totale N. La quantità $n(x)/N$ prende il nome di *frequenza* ed il grafico ottenuto *diagramma o istogramma delle frequenze*. Tale istogramma ha l'aspetto qualitativo mostrato in figura 3. Si osserva che il valore massimo dell'istogramma corrisponde alla

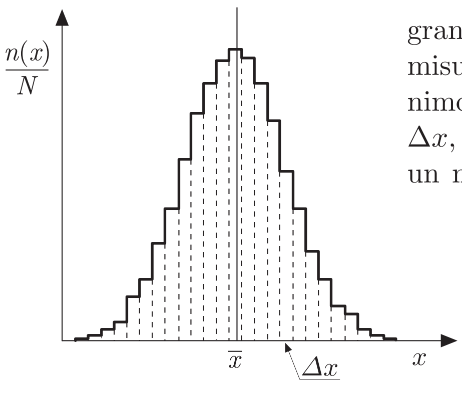

Fig. 1.3

media che, pertanto, può essere assunta come valore più *rappresentativo* o più probabile della misura. I valori che si discostano dalla media decrescono rapidamente a destra e a sinistra di essa.

All'aumentare di N, il numero dei rettangoli si può infittire poiché ognuno di essi contiene un elevato numero di misure, e all'istogramma si può adattare una curva continua, simmetrica rispetto alla media. Questa curva si chiama curva o distribuzione di Gauss ed è rappresentata dall'equazione

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\overline{x})^2/2\sigma^2}$$

dove $\mathcal{P}(x)$ indica la *densità di probabilità* e σ è la *deviazione standard* che descriveremo più oltre. È evidente che la curva presenta un massimo per $x = \overline{x}$, figura 4. I concetti di probabilità e di funzione di distribuzione sono esposti in Termodinamica.

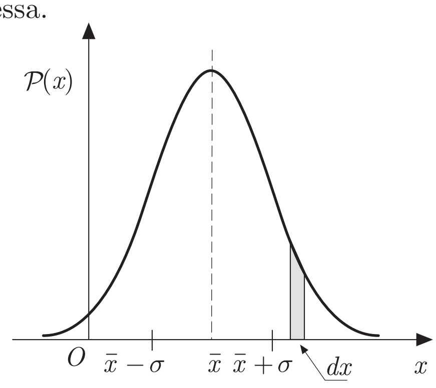

Fig. 1.4

L'introduzione del termine densità di probabilità è presto chiarito. Osserviamo che la frequenza, per N molto grande, tende alla probabilità che il numero di misure $n(x)$ sia compreso nell'intervallo Δx. Conviene quindi riportare sull'asse delle ordinate dell'istogramma la grandezza $n(x)/(N\Delta x)$ che è appunto la densità di probabilità. Allora il valore numerico del prodotto tra l'ordinata e Δx, area del rettangolo, dà la probabilità suddetta.

Poiché per N molto grande l'istogramma è rappresentato dalla curva di Gauss, la quantità $\mathcal{P}(x)dx$ rappresenta la probabilità che la misura sia compresa nell'intervallo elementare dx; areola tratteggiata della figura. Pertanto la probabilità che la misura sia compresa in un certo intervallo che ha come estremi x_1 e x_2, è

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{P}(x)dx,$$

ed è rappresentata dal valore numerico dell'area sottesa dalla curva e l'asse x, tra le ascisse x_1 e x_2. Si capisce subito che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(x)dx = 1.$$

Ciò significa che la misura è certamente compresa in tutto il campo di misurazione; l'area sottesa dalla curva di Gauss e l'asse delle ascisse risulta così unitaria o normalizzata.

7. Distribuzione degli errori

Si definisce errore della misura di indice i la quantità

$$\epsilon_i = x_i - \overline{x},$$

chiamata anche scarto dalla media. Si verifica immediatamente che la somma degli N errori è sempre nulla, pertanto anche la loro media è nulla.

Si definisce *deviazione standard* o scarto quadratico medio la quantità

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} \epsilon_i^2}.$$

La deviazione standard si ricava dalle misure sperimentali; essa indica il grado di precisione delle misure effettuate.

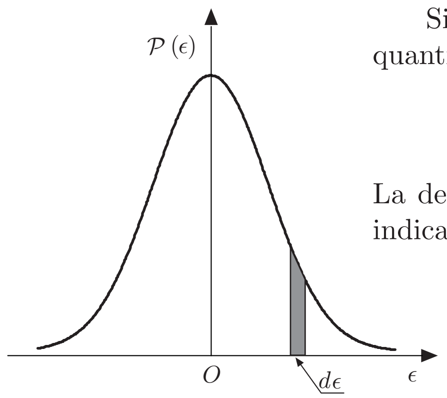

Fig. 1.5

La distribuzione degli errori è gaussiana con il massimo corrispondente a $\epsilon = 0$. In figura 5 è mostrato l'andamento della densità di probabilità $\mathcal{P}(\epsilon)$. Valgono le considerazioni fatte prima a proposito della distribuzione delle misure.

Parametro caratteristico della distribuzione di Gauss è la deviazione standard σ; in figura 6 sono mostrate le distribuzioni (a), (b) e (c) corrispondenti a valori di σ decrescenti, ossia con accuratezza crescente. Siccome per tutte le curve l'area sottesa deve essere uguale a 1, si evidenzia chiaramente che la curva (c) è quella corrispondente a misure più precise.

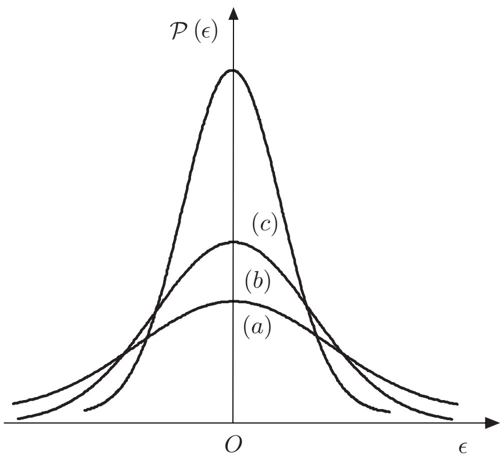

Fig. 1.6

Il significato di σ, in termini di probabilità, è spiegato nei testi di teoria della misura. Si dimostra che

$$\int_{-\sigma}^{+\sigma} \mathcal{P}(\epsilon) d\epsilon = 0,683,$$

dunque l'area corrispondente è il 68,3% dell'area totale. Ciò significa che una misura della grandezza, tra le N effettuate, ha il 68,3% di probabilità di assumere un valore compreso tra $\overline{x}-\sigma$ e $\overline{x}+\sigma$. Allora l'errore che va attribuito alla singola misura è $\pm\sigma$ e si evidenzia scrivendo $x_i \pm \sigma$.

Si è riconosciuto che il valore più probabile della grandezza è dato dalla media aritmetica delle misure. Per esprimere il risultato, pertanto, bisogna valutare l'errore da attribuire alla media, cioè la sua deviazione standard. In teoria della misura si dimostra che la deviazione standard della media è semplicemente

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Questo significa che effettuate un cero numero M di medie, ciascuna di N misure, possiamo definire la media delle medie

$$\overline{\overline{x}} = \frac{\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \cdots \overline{x}_M}{M}$$

e analogamente a quanto detto prima per la singola misura, le medie hanno a loro volta distribuzione gaussiana col massimo in

$\overline{\overline{x}}$. Pertanto la singola media ha una deviazione standard σ_m, ovvero il 68,3% di probabilità di essere compresa tra $\overline{\overline{x}} - \sigma_m$ e $\overline{\overline{x}} + \sigma_m$. Si deduce che l'errore di misura della grandezza è $\pm\sigma_m$ e scriveremo $\overline{x} \pm \sigma_m$.

8. Stima dell'errore massimo nelle misure indirette

Nelle misure indirette la grandezza, che indichiamo con y, è legata ad altre grandezze, che vanno misurate direttamente, mediante una equazione del tipo:

$$y = f(x_1, x_2, \cdots x_n). \tag{1}$$

È, per esempio, il caso di una lunghezza misurata come differenza tra due misure, $l = x_2 - x_1$, della velocità media, misurata come rapporto tra spazio percorso e il corrispondente intervallo di tempo, ecc...

Il problema consiste nel ricavare la distribuzione degli errori ϵ_y per effetto degli errori ϵ_i che si commettono nelle misure delle grandezze indipendenti; la distribuzione è ancora gaussiana. Non ci occuperemo in dettaglio di questo caso, ma ci limiteremo a una valutazione dell'errore massimo che presumibilmente si commette usando, per la misura delle grandezze indipendenti, apparecchi di assegnata sensibilità di lettura.

Assumendo la media come valore più probabile della misura, sviluppiamo la (1) in serie di Taylor nell'intorno di $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots \overline{x}_n)$, arrestandoci al primo ordine; si ha

$$y = y(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots \overline{x}_n) + \sum_1^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_{x_i = \overline{x}_i} (x_i - \overline{x}_i)\,.$$

Pertanto l'errore di cui è affetta la grandezza y, risulta

$$\epsilon_y = y - y(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots \overline{x}_n) = \sum_1^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_{x_i = \overline{x}_i} (x_i - \overline{x}_i)\,.$$

Sostituendo agli errori la sensibilità di lettura delle singole grandezze, si può scrivere approssimativamente:

$$\epsilon_y = \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2\right| + \cdots + \left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\Delta x_n\right|. \tag{2}$$

I vari termini vengono considerati in valore assoluto non essendo noto a priori il loro segno, perciò la precedente viene chiamata *errore assoluto massimo a priori o sensibilità della misura.*

Appare evidente inoltre che in una misura ben fatta tutti i termini della (2) devono essere dello stesso ordine di grandezza. Se, per esempio, la grandezza da misurare è una lunghezza espressa dalla differenza tra due letture $l = x_2 - x_1$, si ha immediatamente

$$\Delta l = \Delta x_2 + \Delta x_1.$$

In questo modo si può anche giudicare quali precauzioni devono essere prese nella misura di una certa grandezza e quale possibile errore può essere commesso se si dispone di certe apparecchiature. Supponiamo di voler preparare una soluzione all'1% di una certa sostanza in acqua. La concentrazione c è definita dal rapporto

$$c = \frac{p}{p_0},$$

In cui p è il peso del soluto e p_0 il peso del solvente; l'errore massimo a priori è dato da:

$$\epsilon_c = \left|\frac{\Delta p}{p_0}\right| + \left|\frac{p}{p_0}\frac{\Delta p_0}{p_0}\right| = \left|\frac{\Delta p}{p_0}\right| + \frac{p}{p_0}\left|\frac{\Delta p_0}{p_0}\right|.$$

Nel nostro caso $p/p_0 = 1/100$, quindi se si pesassero con ugual cura soluto e solvente si avrebbe $|\Delta p| = |\Delta p_0|$ e l'errore sarebbe costituito da due termini: uno $\Delta p/p_0$ e l'altro $p/p_0(\Delta p_0/p_0)$, cento volte più piccolo. È inutile pesare il solvente con la stessa cura con cui deve essere pesato il soluto; se quest'ultimo è pesato fino al milligrammo, basta pesare il solvente fino al decimo di grammo.

8.1. Errore relativo

L'errore relativo è definito dal rapporto tra l'errore, sia esso lo scarto o la deviazione standard oppure la sensibilità di lettura, e la misura della grandezza:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{x}, \qquad \sigma_r = \frac{\sigma}{x}, \cdots$$

Esso è una quantità adimensionata e, di solito si esprime in percentuale, ha inoltre il vantaggio di essere più significativo dell'errore assoluto. Valga questa semplice considerazione: le lunghezze di $10\,mm$ e di $1\,m$ vengano misurate con l'errore assoluto di $1mm$; nel primo caso viene commesso un errore del dieci per cento, nel secondo dell'un per mille. La seconda misura è ben più precisa della prima.

Ricordando la (2), l'errore relativo massimo a priori è definito da

$$\frac{\epsilon_y}{y} = \left|\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1\right| + \cdots + \left|\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x_n}\Delta x_n\right|, \tag{3}$$

che si può considerare come il differenziale del logaritmo di y, cioè

$$\frac{\epsilon_y}{y} = \frac{\Delta y}{y} = \Delta(\ln y).$$

Questa formulazione è molto comoda se la grandezza è del tipo

$$y = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

con α_i numeri reali qualsiasi. Si ha immediatamente

$$\frac{\epsilon_y}{y} = \left|\alpha_1\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \left|\alpha_2\frac{\Delta x_2}{x_2}\right| + \cdots + \left|\alpha_n\frac{\Delta x_n}{x_n}\right|.$$

Nel caso dell'esempio precedente si ha

$$\frac{\Delta c}{c} = \left|\frac{\Delta p}{p}\right| + \left|\frac{\Delta p_0}{p_0}\right|.$$

8.2. Cifre significative

Si è detto che una misura va espressa da un numero seguito dall'errore e dall'unità di misura. L'errore stabilisce il numero di cifre significative della misura che si possono garantire come esatte. Per esempio, un risultato espresso dal valore $35,387 \pm 0,001$ in cui sono presenti cinque cifre significative con un errore $\pm 0,001$ indica che l'ultima è incerta per $\pm 0,001$.

A volte si può ottenere un risultato del tipo $3,207 \pm 0,01$; in tal caso si arrotonda come $3,21 \pm 0,01$, usando il criterio di arrotondare alla decina successiva, se l'ultima cifra è maggiore di 5 o altrimenti alla precedente.

Ancora un esempio: supponiamo che siano stati ottenuti i valori 4,041; 1,135; 8,704 con un errore relativo dell'1% ed errore assoluto rispettivamente di 0,04; 0,01; 0,1; allora detti valori si scrivono

$$4,04 \pm 0,04; \qquad 1,13 \pm 0,01; \qquad 8,7 \pm 0,1.$$

È dunque inutile riportare nei risultati tutte le cifre decimali che si ottengono; queste vengono fissate dall'errore che si commette. Nella pratica di laboratorio molte volte è sufficiente una approssimazione dell'1%; per ottenere sicuramente tale approssimazione basta tener conto, con i criteri su esposti, delle prime due cifre significative dopo la virgola.