

PROBLEMI SULLE MACCHINE TERMICHE
A cura del Prof. T.Papa

1. Il funzionamento di una macchina a vapore può essere approssimato a quello di una macchina di Carnot, che assorbe calore alla temperatura θ_2 della caldaia e cede calore alla temperatura θ_1 del condensatore. La quantità d'acqua per unità di tempo, prodotta nel condensatore è $dm/dt = 2 \text{ kg/min}$. Determinare la potenza della macchina sapendo che $\theta_2 = 200^\circ\text{C}$, $\theta_1 = 30^\circ\text{C}$ e che la variazione d'entalpia di evaporazione dell'acqua nel condensatore è $\Delta H = 43,8 \text{ kJ/mol}$.

Per un ciclo di Carnot:

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}; \quad \Rightarrow \quad Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

La potenza erogata risulta,

$$W = \frac{\mathcal{L}}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{\Delta t} = \frac{Q_1}{\Delta t} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right).$$

Essendo

$$\frac{Q_1}{\Delta t} = \frac{dm}{dt} \Delta H,$$

si ottiene:

$$W = \frac{dm}{dt} \Delta H \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = 45,5 \text{ kW}.$$

Si faccia attenzione alle unità di misura (peso molecolare dell'acqua: 18).

2. Un gas ideale biatomico esegue un ciclo costituito da una isobara AB che ne raddoppia il volume, una politropica BC di equazione $pV^2 = \text{cost}$ e da una isoterma CA . Calcolare il rendimento del ciclo.

Dall'equazione di stato e dall'equazione della politropica si trae:

$$T_B = 2T_A, \quad T_C = T_A, \quad T_B V_B = T_C V_C, \quad V_C = 4V_A.$$

Le quantità di calore coinvolte nel ciclo sono:

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= nC_p(T_B - T_A) = nC_p T_A > 0 \\ Q_{BC} &= nC_\delta(T_C - T_B) = -nC_\delta T_A < 0 \\ Q_{CA} &= nRT_A \ln \frac{V_A}{V_C} = -nRT_A \ln 4 < 0, \end{aligned}$$

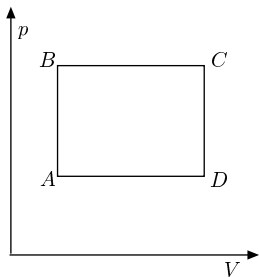
con

$$C_\delta = C_V + \frac{R}{1-\delta} = \frac{3}{2}R.$$

Il rendimento risulta:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{BC} + Q_{CA}}{Q_{AB}} = 1 - \frac{C_\delta + \ln 4}{C_p} \approx 18\%.$$

3. Una mole di gas ideale biatomico compie un ciclo costituito dalle seguenti trasformazioni reversibili: isocora AB , isobara BC , isocora CD ed una isobara DA che chiude il ciclo. Calcolare il rendimento del ciclo conoscendo la variazione di energia interna $\Delta U_{AB} = 4 \text{ kJ}$, la variazione di entalpia $\Delta H_{BC} = 14 \text{ kJ}$ e la temperatura $T_B = 700 \text{ K}$. Si supponga che la vibrazione molecolare non sia attiva.



Il rendimento è dato da

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_a}, \quad \eta = 1 - \frac{Q_c}{Q_a}, \quad (1)$$

dove Q_a è il calore assorbito e Q_c quello ceduto. Nel ciclo in esame:

$$Q_a = Q_{AB} + Q_{BC}, \quad Q_c = Q_{CD} + Q_{DA},$$

dove:

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= \Delta U_{AB} = C_V(T_B - T_A) & Q_{CD} &= \Delta U_{CD} = C_V(T_C - T_D) \\ Q_{BC} &= \Delta H_{BC} = C_p(T_C - T_B) & Q_{DA} &= \Delta H_{DA} = C_p(T_D - T_A). \end{aligned} \quad (2)$$

Per calcolare il rendimento si può usare la prima delle (1). In tal caso,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (p_B - p_A)(V_C - V_B) = \left(p_B - p_B \frac{T_A}{T_B}\right) \left(V_B \frac{T_C}{T_B} - V_B\right) \\ &= p_B V_B \left(1 - \frac{T_A}{T_B}\right) \left(\frac{T_C}{T_B} - 1\right) = \frac{p_B V_B}{T_B^2} (T_B - T_A)(T_C - T_B) \\ &= \frac{R}{T_B} (T_B - T_A)(T_C - T_B). \end{aligned}$$

Ma,

$$(T_B - T_A) = \frac{\Delta U_{AB}}{C_V}; \quad (T_C - T_B) = \frac{\Delta H_{BC}}{C_p},$$

pertanto:

$$\mathcal{L} = \frac{R}{T_B} \frac{\Delta H_{BC}}{C_p} \frac{\Delta U_{AB}}{C_V}.$$

Tenendo conto delle (2), il rendimento formulato con la prima delle (1) risulta:

$$\eta = \frac{R}{T_B} \frac{\Delta H_{BC} \Delta U_{AB}}{C_V C_p (\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC})} = 6\%$$

Ovviamente si ottiene lo stesso risultato dalla seconda delle (1) che si scrive.

$$\eta = 1 - \frac{\Delta U_{CD} + \Delta H_{DA}}{\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC}}. \quad (3)$$

Osservando che dall'equazione di stato si ha

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{T_D}{T_C},$$

si riconosce che

$$\begin{aligned} \Delta U_{CD} &= C_V(T_C - T_D) = C_V T_C \left(1 - \frac{T_D}{T_C}\right) = C_V T_C \left(1 - \frac{T_A}{T_B}\right) \\ &= C_V \frac{T_C}{T_B} (T_B - T_A) = \frac{T_C}{T_B} \Delta U_{AB}. \end{aligned}$$

Analogamente:

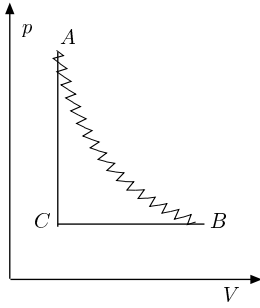
$$\Delta H_{DA} = \frac{T_D}{T_C} \Delta H_{BC} = \frac{T_A}{T_B} \Delta H_{BC}.$$

La (3) diventa

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC} - \Delta U_{AB} T_C / T_B - \Delta H_{BC} T_A / T_B}{\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC}} \\ &= \frac{(1 - T_C / T_B) \Delta U_{AB} + (1 - T_A / T_B) \Delta H_{BC}}{\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC}} \\ &= \frac{(T_B - T_C) \Delta U_{AB} + (T_B - T_A) \Delta H_{BC}}{T_B (\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC})} \\ &= \frac{-\Delta H_{BC} \Delta U_{AB} / C_p + \Delta U_{AB} \Delta H_{BC} / C_V}{T_B (\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC})} = \frac{R}{T_B} \frac{\Delta U_{AB} \Delta H_{BC}}{C_V C_p (\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC})}, \end{aligned}$$

come prima.

4. Una mole di gas ideale monoatomico compie un ciclo ABC , in cui AB è una espansione adiabatica irreversibile, BC una isobara reversibile che riporta il gas al volume iniziale, CA una isocora reversibile che chiude il ciclo. Sapendo che $T_A = 2T_B$ e $\Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = -6 J/K$, calcolarne il rendimento.



$$\eta = 1 - \frac{Q_{BC}}{Q_{CA}} = 1 - \frac{C_p (T_B - T_C)}{C_V (T_A - T_C)} = 1 - \gamma \frac{T_B / T_C - 1}{T_A / T_C - 1}. \quad (1)$$

Dall'equazione di stato si ha:

$$\frac{T_B}{T_C} = \frac{V_B}{V_C} = \frac{V_B}{V_A}, \quad \Rightarrow \quad T_C = T_B \frac{V_A}{V_B}.$$

La (1) diventa,

$$\eta = 1 - \gamma \frac{V_B / V_A - 1}{T_A V_B / T_B V_A - 1} = 1 - \gamma \frac{V_B / V_A - 1}{2V_B / V_A - 1}. \quad (2)$$

Per ricavare il rapporto V_B / V_A , si osservi che la variazione di entropia del ciclo è nulla

$$\Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0, \quad \Rightarrow \quad \Delta S_{AB} - 6 = 0. \quad (3)$$

Poiché

$$\Delta S_{AB} = C_V \ln \frac{T_B}{T_A} + R \ln \frac{V_B}{V_A}, \quad T_A = 2T_B,$$

sostituendo nella (3) si ha

$$C_V \ln \frac{1}{2} + R \ln \frac{V_B}{V_A} = 6.$$

Quindi, dividendo per C_V ,

$$\ln \frac{1}{2} + \frac{R}{C_V} \ln \frac{V_B}{V_A} = \frac{6}{C_V}.$$

Essendo

$$\frac{R}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \gamma - 1,$$

si ottiene

$$\ln \frac{1}{2} + \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = \frac{6}{C_V}.$$

ovvero,

$$\ln \frac{1}{2} \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = \frac{6}{C_V}.$$

Si ottiene:

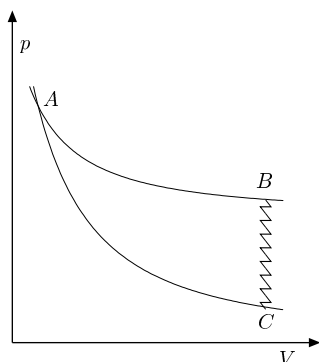
$$\frac{V_B}{V_A} = 2^{1/(\gamma-1)} e^{6/[C_V(\gamma-1)]} = 2^{3/2} e^{6/R} = 5,8.$$

Sostituendo nella (2) si ottiene:

$$\eta = 0,248.$$

Si rammenti che per il gas ideale monoatomico $\gamma = 1,66$.

5. Una mole di gas ideale monoatomico esegue un ciclo composto da una espansione isoterma reversibile AB che ne raddoppia il volume, da una trasformazione isocora irreversibile BC , realizzata ponendo il gas a contatto con una sorgente a temperatura T_C , e da una adiabatica reversibile CA che chiude il ciclo. Calcolare il rendimento e la variazione di entropia dell'universo.



Il rendimento è dato da

$$\eta = 1 - \frac{Q_{BC}}{Q_{AB}}, \quad (1)$$

dove le quantità di calore assorbito Q_{AB} e ceduto Q_{BC} sono,

$$Q_{AB} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A}, \quad Q_{BC} = nC_V(T_B - T_C). \quad (2)$$

Dall'equazione dell'adiabatica reversibile si ha

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}, \quad \Rightarrow \quad T_C = T_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1}. \quad (3)$$

Sostituendo la (3) e la (2) nella (1) e ricordando che per il gas ideale monoatomico $\gamma = 1,66$, si ottiene

$$\eta = 1 - \frac{3}{2} \frac{1 - (V_A/V_B)^{\gamma-1}}{\ln V_B/V_A} = 0,2.$$

Per quanto riguarda la variazione di entropia dell'universo si osservi che se il ciclo fosse reversibile tale variazione sarebbe nulla. Poiché la trasformazione isocora è irreversibile si ha necessariamente una variazione di entropia delle sorgenti, in quanto la variazione di entropia dell'intero ciclo è nulla. Pertanto denotando con S^* l'entropia delle sorgenti, si ha

$$\Delta S_u = \Delta S_{AB}^* + \Delta S_{BC}^*.$$

Ma

$$\begin{aligned} \Delta S_{AB}^* &= -R \ln \frac{V_B}{V_A} = -5,76 \text{ J/K}, \\ \Delta S_{BC}^* &= C_V \frac{T_B - T_C}{T_C} = C_V \left[\left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = 7,23 \text{ J/K} \end{aligned}$$

tenuto conto, per la (3), che $T_A = T_B$. Pertanto

$$\Delta S_u = 1,47 J/K.$$

6. Un gas ideale monoatomico compie un ciclo reversibile, costituito da una espansione isoterma AB , dove il gas raddoppia il volume, da una isocora BC e da una adiabatica CA . Calcolare il rendimento del ciclo.

Detta T la temperatura assoluta dell'isoterma e T_C quella dello stato C , si ha

$$\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} = 1 - \frac{C_V(T - T_C)}{RT \ln V_B/V_A}. \quad (1)$$

Per ricavare T_C , si osservi che nel ciclo la variazione di entropia è nulla:

$$\Delta S = C_V \ln \frac{T_C}{T} + R \ln \frac{V_B}{V_A} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_C = T 2^{-2/3}. \quad (2)$$

Lo stesso risultato si ottiene considerando gli stati A e C dell'adiabatica. Sostituendo la (2) nella (1), si ottiene:

$$\eta = 1 - \frac{C_V T (1 - 2^{-2/3})}{RT \ln 2} = 0,2.$$

7. Per mantenere un ambiente alla temperatura costante $\theta_A = 20^\circ C$, quando la temperatura esterna è $\theta_E = -3^\circ C$, occorre una quantità di calore per unità di tempo dQ/dt . Per ottenere lo scopo si può usare:

a) una stufa elettrica che trasforma direttamente in calore l'energia elettrica assorbita,

b) una pompa di calore ideale che, prelevando calore dall'esterno (a temperatura θ_E), ceda calore all'ambiente (a temperatura θ_A) assorbendo lavoro meccanico.

Supponendo che il lavoro meccanico sia fornito alla pompa di calore da un motore elettrico avente un rendimento $\eta_e = 0,9$, si determini il rapporto tra le potenze elettriche utilizzate nei due metodi. Il rendimento del motore elettrico, analogamente ad ogni altro rendimento, è definito come il rapporto tra la potenza meccanica erogata e la potenza elettrica assorbita.

Detta W_m la potenza meccanica erogata dal motore e W_e la potenza elettrica assorbita, si ha

$$\eta_e = \frac{W_m}{W_e}; \quad (1)$$

mentre il rendimento della pompa di calore ideale, supponendo che sia l'esterno che l'ambiente da riscaldare possano essere approssimati a sorgenti, è dato da

$$\eta = 1 - \frac{T_E}{T_A}. \quad (2)$$

Con la stufa si ottiene la conversione diretta di potenza elettrica in calore nell'unità di tempo, quindi detta W_e^s la potenza elettrica assorbita, si ha

$$\frac{dQ}{dt} = W_e^s,$$

mentre con la pompa di calore, detta W_e^p la potenza elettrica assorbita, si ha

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{W_m}{\eta} = \frac{\eta_e}{\eta} W_e^p,$$

dove si è tenuto conto della (1). Pertanto:

$$\frac{W_e^s}{W_e^p} = \frac{\eta_e}{\eta} = \eta_e \frac{T_A}{T_A - T_E} = 11,46. \quad (3)$$

Ciò significa che la potenza elettrica impegnata dalla stufa risulta 11,46 volte la potenza elettrica impegnata dalla pompa di calore.

Si noti che la (3) può essere scritta

$$\frac{W_e^s}{W_e^p} = \eta_e \left(1 + \frac{T_E}{T_A - T_E} \right),$$

dove:

$$e_m = \frac{T_E}{T_A - T_E}$$

è l'efficienza frigorifera massima della macchina di Carnot inversa. L'efficienza frigorifera in generale è data dal rapporto tra il calore prelevato dalla sorgente fredda ed il lavoro occorrente. L'efficienza frigorifera aumenta al diminuire del salto di temperatura $T_A - T_E$.

8. Due moli di gas ideale biatomico compiono un ciclo $ABCA$, dove AB è una espansione reversibile in cui il gas è in equilibrio termico con una sorgente costituita da ghiaccio in presenza della sua acqua di fusione, passando da un volume $V_A = 10 \ell$ ad un volume $V_B = 15 \ell$; BC una trasformazione adiabatica reversibile, con la quale il gas ritorna al suo volume iniziale; CA una trasformazione in cui il gas, posto nuovamente a contatto con la sorgente, ritorna rapidamente allo stato iniziale. Calcolare il lavoro del ciclo e la variazione di entropia del sistema (universo).

Nella trasformazione AB , isoterma, $T_A = T_B = 273 K$. La temperatura in C , va ricavata ricorrendo all'equazione dell'adiabatica reversibile,

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}, \quad \Rightarrow \quad T_C = T_A \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = 321 K.$$

Il lavoro compiuto nel ciclo è

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{AB} + \mathcal{L}_{BC} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} - nC_V(T_C - T_A) = -154,7 J.$$

La variazione di entropia dell'universo dev'essere maggiore di zero in quanto il ciclo contiene una trasformazione irreversibile (isocora CA). Ma, la variazione di entropia del ciclo è nulla, pertanto la variazione di entropia dell'universo è uguale alla variazione di entropia della sorgente. Questa cede calore lungo la trasformazione AB ed assorbe calore lungo CA ; pertanto

$$\Delta S_u = \Delta S_{sorg} = -\frac{Q_{AB}}{T_A} + \frac{Q_{CA}}{T_A}.$$

Ossia

$$\Delta S_{sorg} = -nR \ln \frac{V_B}{V_A} + \frac{nC_V(T_C - T_A)}{T_A} = -6,76 + 7,30 = 0,56 J/K.$$

9. Una mole di gas ideale monoatomico compie un ciclo $ABCD$ in cui AB è una isoterma reversibile a temperatura $T_2 = 350 K$, BC una isocora irreversibile, CD una isoterma reversibile a temperatura $T_1 = 250 K$, DA una adiabatica reversibile. calcolare il lavoro compiuto nel ciclo ed il calore scambiato nella trasformazione BC ; ($V_B = 3V_A = 9 \ell$).

Non è noto il volume V_D , ma usando l'equazione dell'adiabatica reversibile si ha

$$T_2^{1/(\gamma-1)} V_A = T_1^{1/(\gamma-1)} V_D, \quad \Rightarrow \quad V_D = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)} V_A = 4,99 \ell.$$

Il lavoro del ciclo è dato da

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{AB} + \mathcal{L}_{CD} + \mathcal{L}_{DA}, \quad (1)$$

dove:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{AB} &= RT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} = 3195 \text{ J} \\ \mathcal{L}_{CD} &= RT_1 \ln \frac{V_D}{V_B} = -1225,2 \text{ J} \\ \mathcal{L}_{DA} &= -C_V(T_2 - T_1) = -\frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = -1246,5 \text{ J}.\end{aligned}$$

Sostituendo nella (1) si ottiene

$$\mathcal{L} = 723,3 \text{ J}.$$

Poiché nel ciclo

$$\Delta U = 0, \quad \Rightarrow \quad Q_{ciclo} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} = \mathcal{L}, \quad (2)$$

ed essendo

$$Q_{AB} = \mathcal{L}_{AB}, \quad Q_{CD} = \mathcal{L}_{CD},$$

sostituendo nella (2), si ricava:

$$Q_{BC} = \mathcal{L} - \mathcal{L}_{AB} - \mathcal{L}_{CD} = -1246,5 \text{ J}.$$

10. Un gas ideale compie un ciclo $ABCD A$, in cui: AB è una espansione ottenuta ponendo il gas a contatto con una sorgente a temperatura T_1 e dimezzando la pressione esterna; BC una trasformazione adiabatica reversibile che raffredda il gas dalla temperatura T_1 alla temperatura T_2 ; CD una compressione ottenuta ponendo il gas a contatto con una sorgente a temperatura T_2 e raddoppiando la pressione esterna; DA una compressione adiabatica reversibile che riporta il gas nello stato iniziale. Determinare il rapporto tra il rendimento del ciclo e quello della macchina di Carnot che lavora tra le stesse sorgenti. ($T_1 = 900 \text{ K}$, $T_2 = 300 \text{ K}$)

Le trasformazioni AB e CD sono evidentemente irreversibili. Poiché per entrambe gli stati iniziali e finali sono alle stesse temperature, rispettivamente T_1 e T_2 , si ha

$$V_B = 2V_A, \quad V_C = 2V_D, \quad \Delta U_{AB} = 0, \quad \Delta U_{CD} = 0.$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}Q_{AB} &= \mathcal{L}_{AB} = p_B(V_B - V_A) = \frac{p_A V_A}{2} = \frac{nRT_1}{2} > 0 \\ Q_{CD} &= \mathcal{L}_{CD} = p_D(V_D - V_C) = -P_D V_D = -nRT_2 < 0.\end{aligned}$$

Pertanto i rendimenti η del ciclo e η_C della macchina di Carnot risultano:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{CD}}{Q_{AB}} = 1 - \frac{2T_2}{T_1} = \frac{1}{3}, \quad \eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{2}{3}, \quad \eta = \frac{\eta_C}{2}.$$

11. Una macchina frigorifera lavora scambiando calore con l'ambiente esterno a temperatura θ_0 , da considerare come una sorgente ideale. Calcolare il lavoro minimo occorrente per solidificare una massa m di acqua inizialmente in equilibrio a temperatura ambiente. (calore di fusione dell'acqua, $\lambda_f = 80 \text{ cal/gm}$, $m = 1 \text{ kg}$, $\theta_0 = 27^\circ \text{C}$)

Il lavoro minimo si realizza in condizioni di reversibilità. Per la legge di accrescimento dell'entropia, la variazione di entropia dell'universo (frigorifero, acqua, ambiente) dev'essere maggiore o uguale a zero, $\Delta S_u \geq 0$, dove il segno di uguaglianza vale per processi reversibili. Pertanto, dette ΔS_{acq} , ΔS_{frig} e ΔS_{amb} rispettivamente, le variazioni di entropia dell'acqua, del frigorifero e dell'ambiente, si ha

$$\Delta S_u = \Delta S_{acq} + \Delta S_{frig} + \Delta S_{amb} = 0.$$

Ma $\Delta S_{frig} = 0$ in quanto la macchina lavora ciclicamente, quindi:

$$\Delta S_{acq} + \Delta S_{amb} = 0. \quad (1)$$

La variazione di entropia dell'acqua risulta:

$$\Delta S_{acq} = mc_p \ln \frac{T_0}{T_1} - \frac{m\lambda_f}{T_1}, \quad (2)$$

dove $c_p \approx 1 \text{ cal/gm} \cdot K$ è il calore specifico a pressione costante e $T_1 = 273,15$.

La variazione di entropia dell'ambiente:

$$\Delta S_{amb} = \frac{Q + \mathcal{L}_{min}}{T_0}, \quad (3)$$

dove Q è il calore sottratto all'acqua,

$$Q = mc_p(T_0 - T_1) + m\lambda_f. \quad (4)$$

Sostituendo le (2) e (3) nella (1) e tenuto conto della (4), si ricava:

$$\mathcal{L}_{min} = -T_0 mc_p \ln \frac{T_1}{T_0} + \frac{T_0}{T_1} m\lambda_f - mc_p(T_0 - T_1) - m\lambda_f = 9,2 \text{ kcal} = 38,45 \text{ kJ}.$$

Al lavoro può essere attribuito il segno negativo in quanto viene assorbito dal frigorifero.

12. Due moli di gas ideale biatomico scambiano calore con due sorgenti a temperatura T_1 e $T_2 = 4T_1/5$, compiendo un ciclo $ABCD A$, dove: AB è una espansione isoterma reversibile che ne raddoppia il volume; BC una trasformazione a volume costante che raffredda il gas, posto a contatto con la sorgente a temperatura T_2 ; CD una compressione isoterma reversibile che riconduce il volume a quello iniziale; DA una trasformazione a volume costante che riscalda il gas, posto a contatto con la sorgente a temperatura T_1 . Calcolare il rendimento del ciclo. Ritenere congelati i gradi di libertà vibrazionali.

Il rendimento è

$$\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}},$$

dove:

$$Q_{ced} = Q_{BC} + Q_{CD} \quad Q_{ass} = Q_{AB} + Q_{DA}.$$

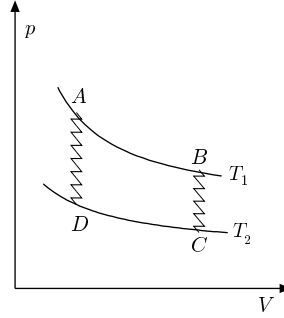
Essendo:

$$Q_{BC} = nC_V(T_2 - T_1), \quad Q_{CD} = nRT_2 \ln \frac{V_A}{V_B}$$

$$Q_{AB} = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}, \quad Q_{DA} = nC_V(T_1 - T_2),$$

si ottiene:

$$\eta = 1 - \frac{T_2 \ln 2 + \frac{5}{2} \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right)}{T_1 \ln 2 + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)} = 1 - \frac{4 \ln 2 + \frac{5}{8}}{5 \ln 2 + \frac{1}{2}} = 0,11.$$



Si noti che il rendimento risulterebbe lo stesso se le trasformazioni isocore fossero reversibili.

13. Una mole di gas ideale monoatomico descrive un ciclo $ABCA$ costituito da una adiabatica reversibile AB , una isoterma reversibile BC ed una isocora irreversibile CA , durante la quale il gas è posto in contatto con una sorgente a temperatura T_A . Sapendo che $V_B/V_A = 2$, calcolare il rendimento e le variazioni di entropia della sorgente e del gas durante la trasformazione isocora.

Il calore viene assorbito lungo l'isocora CA :

$$Q_{CA} = nC_V(T_A - T_B),$$

essendo $T_C = T_B$. Il calore ceduto, lungo la compressione isoterma, è

$$Q_{BC} = nRT_B \ln \frac{V_B}{V_A},$$

essendo $V_C = V_A$. Pertanto:

$$\eta = 1 - \frac{nRT_B \ln(V_B/V_A)}{nC_V(T_A - T_B)} = 1 - \frac{R \ln(V_B/V_A)}{C_V (T_A/T_B - 1)}.$$

Poiché,

$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1}, \quad \frac{R}{C_V} = \gamma - 1 = \frac{2}{3},$$

si ottiene:

$$\eta = 1 - \frac{2 \ln 2}{3 \cdot 2^{2/3} - 1} = 0,21.$$

Variazioni di entropia:

$$\Delta S_{sorg} = -\frac{Q_{CA}}{T_A} = -\frac{nC_V(T_A - T_B)}{T_A} = -nC_V \left(1 - \frac{T_B}{T_A} \right)$$

$$= -nC_V \left[1 - \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1} \right] = -4,61 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{BC} = nR \ln \frac{V_A}{V_B} = R \ln \frac{1}{2} = -5,76 \text{ J/K}.$$

Si verifica che la variazione di entropia dell'universo è maggiore di zero. Infatti la somma delle variazioni di entropia delle sorgenti, sorgente a temperatura T_A e sorgente relativa all'isoterma BC , risulta maggiore di zero.

14. Un gas ideale monoatomico compie il ciclo reversibile $ABCA$ in cui: AB è una adiabatica che ne raddoppia il volume; BC una isobara che riporta il volume a quello iniziale; CA una isocora che riporta il gas nello stato iniziale. Calcolare il rendimento.

Il calore viene assorbito lungo la trasformazione isocora CA e ceduto lungo l'isobara BC , pertanto

$$\eta = 1 - \frac{Q_{BC}}{Q_{CA}} = 1 - \frac{nC_p(T_B - T_C)}{nC_V(T_A - T_C)} = 1 - \gamma \frac{T_B/T_C - 1}{T_A/T_C - 1}. \quad (1)$$

Nell'isobara, essendo $V_B = 2V_A$, si ha:

$$\frac{V_B}{V_C} = \frac{V_B}{V_A} = \frac{T_B}{T_C} = 2 \quad (2)$$

Dall'equazione dell'adiabatica:

$$\frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = 2^{\gamma-1}, \quad T_A = T_B 2^{\gamma-1},$$

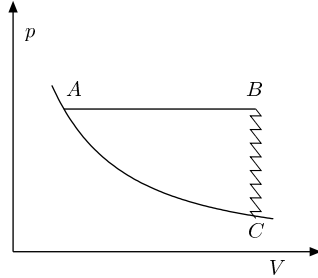
e tenendo conto della (2):

$$T_A = T_C 2^\gamma, \quad \frac{T_A}{T_C} = 2^\gamma. \quad (3)$$

Sostituendo le (2) e (3) nella (1) si ottiene:

$$\eta = 0,23.$$

15. Un gas ideale monoatomico esegue un ciclo $ABCA$ in cui: AB è una espansione isobara che ne raddoppia il volume; BC Una trasformazione isocora irreversibile, realizzata ponendo il gas a contatto il gas con una sorgente a temperatura T_C ; CA una compressione isoterma reversibile. Calcolare il rendimento del ciclo e la variazione di entropia dell'universo.



Problema analogo ad altri. Nel ciclo, irreversibile, calore viene assorbito lungo l'isobara. ■

$$Q_{AB} = nC_p(T_B - T_A),$$

ceduto nell'isocora BC e nell'isoterma CA :

$$Q_{BC} = nC_V(T_B - T_C) = nC_V(T_B - T_A)$$

$$Q_{CA} = nRT_A \ln \frac{V_A}{V_C} = nRT_A \ln \frac{V_A}{V_B}.$$

Dunque,

$$\eta = 1 - \frac{nC_V(T_B - T_A) + nRT_A \ln(V_B/V_A)}{nC_p(T_B - T_A)} = 1 - \frac{C_V(T_B/T_A - 1) + R \ln(V_B/V_A)}{C_p(T_B/T_A - 1)}.$$

Essendo $T_B/T_A = V_B/V_A = 2$, si ottiene:

$$\eta = 1 - \frac{C_V + R \ln 2}{C_p} = 0,12.$$

La variazione di entropia nel ciclo è nulla, quindi la variazione di entropia dell'universo è pari alla variazione di entropia delle sorgenti.

$$\Delta S_u = \Delta S_{sorg} = -C_p \ln \frac{T_B}{T_A} - R \ln \frac{V_A}{V_C} - C_V \frac{T_C - T_B}{T_C} = 16,3 \text{ J/K}.$$

Si noti che $T_C = T_A$.

16. Un gas ideale monoatomico esegue un ciclo reversibile $ABCA$ in cui: AB è una espansione isoterma, alla fine della quale $V_B/V_A = 1,3$; BC una espansione adiabatica dove $V_C/V_B = 1,2$; CA una politropica di equazione $pV^\delta = cost$ che riporta il gas nello stato iniziale. Determinare il valore δ della politropica.

Nel ciclo la variazione entropia è nulla:

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_B}{V_A} + nC_V \ln \frac{T_A}{T_C} + nR \ln \frac{V_A}{V_C} = 0.$$

Si ricava:

$$\left(\frac{V_B}{V_C}\right)^R = \left(\frac{T_C}{T_A}\right)^{C_V}. \quad (1)$$

Tenuto conto dall'equazione della politropica e dell'equazione di stato del gas, si ha:

$$p_A V_A^\delta = p_C V_C^\delta, \quad \Rightarrow \quad T_A V_A^{\delta-1} = T_C V_C^{\delta-1},$$

da cui:

$$\frac{T_C}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{(\delta-1)}.$$

Sostituendo nella (1), si ottiene:

$$\delta = 1 + \frac{2}{3} \left(\frac{\ln(V_B/V_C)}{\ln(V_A/V_C)}\right) = 1,27.$$

17. Una macchina termica reversibile assorbe una quantità di calore Q_0 da una sorgente costituita da una miscela di acqua e ghiaccio in equilibrio ($T_0 = 273 \text{ K}$), e cede calore ad una mole di gas ideale, in maniera tale che la temperatura T_1 di quest'ultimo rimanga costante. Si determini l'aumento percentuale di volume del gas, in corrispondenza alla solidificazione di una massa $m = 5 \text{ gm}$ di acqua. (Calore di fusione del ghiaccio $\lambda_f = 80 \text{ cal/gm}$).

Il gas compie una espansione isoterma reversibile a temperatura T_1 , quindi può essere considerato come una sorgente. Il processo è interamente reversibile; la variazione di entropia dell'universo (macchina e sorgenti) è uguale a zero. La macchina è una macchina di Carnot che opera tra le temperature T_0 e T_1 , quindi,

$$\frac{Q_0}{T_0} = \frac{Q_1}{T_1}, \quad \Rightarrow \quad Q_1 = Q_0 \frac{T_1}{T_0} = m\lambda_f \frac{T_1}{T_0},$$

dove Q_1 è il calore ceduto al gas. D'altra parte nell'espansione isoterma si ha:

$$Q_1 = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = m\lambda_f \frac{T_1}{T_0}, \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \exp \left[\frac{m\lambda_f}{nRT_0} \right].$$

Segue:

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{V_2}{V_1} - 1 = \exp \left[\frac{m\lambda_f}{nRT_0} \right] - 1 = 0,193 = 19,3\%.$$

18. Due corpi A e B identici, di capacità termica $C = 10 \text{ cal/K}$, costante nell'intervallo di temperature considerato, sono rispettivamente alle temperature $T_A = 400 \text{ K}$ e $T_B = 300 \text{ K}$.

Determinare il lavoro massimo ottenibile da una macchina che scambia calore con i due corpi.

La macchina assorbe calore dal corpo a temperatura più elevata e ne cede al corpo a temperatura più bassa, finché, raggiunta la temperatura di equilibrio, si arresta. Il lavoro massimo viene ottenuto in condizioni di reversibilità. Pertanto, per la legge di accrescimento dell'entropia, la variazione di entropia dell'universo è pari a zero.

$$\Delta S_u = \Delta S_A + \Delta S_B + \Delta S_{macch} = 0.$$

La variazione di entropia della macchina è nulla. Le variazioni di entropia dei corpi sono rispettivamente:

$$\Delta S_A = C \ln \frac{T_f}{T_A}, \quad \Delta S_B = C \ln \frac{T_f}{T_B},$$

quindi:

$$C \ln \frac{T_f}{T_A} + C \ln \frac{T_f}{T_B} = 0, \quad \ln \frac{T_f^2}{T_A T_B} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_f = \sqrt{T_A T_B} = 346,4 \text{ K}.$$

Il lavoro risulta:

$$\mathcal{L} = Q_A - Q_B = C(T_A - T_f) - C(T_f - T_B) = C(T_A + T_B - 2T_f) = 72 \text{ cal} = 301 \text{ J}.$$

19. Un motore termico, assimilabile alla macchina di Carnot, lavora tra le sorgenti a temperature $\theta_1 = 150^\circ\text{C}$ e $\theta_2 = 0^\circ\text{C}$ ed, a regime, compie 2 giri/s. Determinare la potenza del motore sapendo che la quantità di calore ceduta in ogni ciclo è $Q_2 = 1500 \text{ J}$.

Nella macchina di Carnot si ha

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}, \quad \Rightarrow \quad Q_1 = Q_2 \frac{T_2}{T_1} = 2,32 \text{ kJ}.$$

Il lavoro risulta

$$\mathcal{L} = Q_1 - Q_2 = 0,824 \text{ kJ},$$

la potenza:

$$W = \frac{\mathcal{L}}{\Delta t} = \frac{0,824}{0,5} = 1,6 \text{ kW}.$$

20. Una macchina termica funziona scambiando calore con due sorgenti alle temperature $T_A = 300 \text{ K}$ e $T_B = 250 \text{ K}$. Dopo un certo numero di cicli essa produce un lavoro $\mathcal{L} = 30 \text{ cal}$, mentre la variazione di entropia dell'universo risulta $\Delta S_u = 0,02 \text{ cal/K}$. Ricavare il rendimento della macchina.

Si ha un aumento dell'entropia dell'universo, quindi la macchina è irreversibile. Poiché la variazione di entropia di quest'ultima, che lavora ciclicamente, è nulla, si ha variazione di entropia delle sorgenti;

$$\Delta S_u = \frac{Q_B}{T_B} - \frac{Q_A}{T_A}. \quad (1)$$

Tenuto conto che

$$\mathcal{L} = Q_A - Q_B, \quad Q_B = Q_A - \mathcal{L},$$

sostituendo nella (1), si ricava:

$$Q_A = \frac{\Delta S_u + \mathcal{L}/T_B}{1/T_B - 1/T_A}.$$

Il rendimento risulta:

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_A} = \frac{\mathcal{L}(1/T_B - 1/T_A)}{\Delta S_u + \mathcal{L}/T_B} = 0,14.$$

21. Una macchina di Carnot funziona in senso inverso tra le sorgenti a temperature $\theta_1 = 0^\circ C$ e $\theta_2 = 100^\circ C$. Le sorgenti sono costituite da due grandi masse d'acqua che mantengono costante la loro temperatura. Sapendo che la potenza necessaria al funzionamento della macchina è $W = 798 \text{ watt}$, determinare quanto ghiaccio si forma nella sorgente fredda in un'ora; (calore di fusione dell'acqua $\lambda_f = 798 \text{ cal/gm}$).

Indicando con Q_1 il calore sottratto alla sorgente fredda e ricordando la definizione di efficienza frigorifera e , si ha:

$$e = \frac{Q_1}{\mathcal{L}} = \frac{Q_1}{W \Delta t} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}, \quad \Rightarrow \quad Q_1 = \frac{T_1}{T_2 - T_1} W \Delta t.$$

Tenendo presente che $\Delta t = 3600 \text{ s}$, la massa di ghiaccio prodotta risulta:

$$m = \frac{Q_1}{\lambda_f} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} \frac{W \Delta t}{\lambda_f} = 2,35 \text{ kg}.$$

22. Un gas ideale monoatomico, nello stato iniziale $p_A = 32,8 \text{ atm}$, $V_A = 2 \text{ l}$, $T_A = 400 \text{ K}$, esegue il ciclo $ABCD A$ dove: AB è un'espansione isoterma reversibile a temperatura $T_1 = T_A$, BC una espansione adiabatica reversibile, CD una compressione isoterma reversibile a temperatura $T_2 = T_D$, DA una isocora irreversibile, che riporta il gas nello stato iniziale. Quest'ultima trasformazione può essere realizzata in due modi:

- a) ponendo il gas a contatto con la sorgente a temperatura T_1
- b) effettuando lavoro adiabatico esterno \mathcal{L} .

Calcolare il rendimento nei due casi e la variazione di entropia delle sorgenti nel caso b); ($V_B = 8 \text{ l}$, $T_2 = 250 \text{ K}$).

Le quantità di calore coinvolte nel ciclo sono:

$$Q_{AB} = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} = 90,9 \text{ l} \cdot \text{atm}; \quad n = \frac{p_A V_A}{RT_A} = 2 \text{ mol}$$

$$Q_{BC} = 0$$

$$Q_{CD} = nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} = -85,7 \text{ l} \cdot \text{atm}; \quad V_D = V_A, \quad V_C = V_B \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

$$Q_{DA} = nC_V(T_1 - T_2) = 36,9 \text{ l} \cdot \text{atm}.$$

Nel primo caso il rendimento risulta:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{CD}}{Q_{AB} + Q_{DA}} = 0,33.$$

Nel secondo caso nel gas viene dissipato lavoro adiabatico, che determina la stessa variazione di energia interna del primo caso. Pertanto il rendimento è lo stesso. Si rammenti che il rendimento di una macchina è, in generale, definito dal rapporto tra il lavoro utile ottenuto e l'energia, di qualsiasi genere, impiegata.

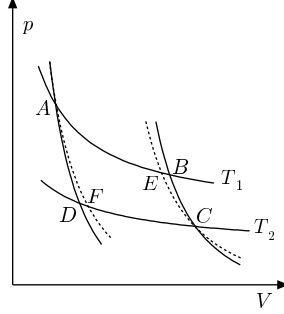
La variazione di entropia delle sorgenti, caso b), è

$$\Delta S_{sorg} = -\frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{CD}}{T_2} = 0,12 \text{ l} \cdot \text{atm/K}.$$

23. Una macchina di Carnot opera tra le sorgenti a temperature $T_1 = 600 \text{ K}$ e $T_2 = 300 \text{ K}$, utilizzando una mole di He . Una seconda macchina opera tra le stesse sorgenti, utilizzando una mole di H_2 . Supponendo che i gas possano essere assimilati a gas ideali e che nei due cicli, le pressioni minima e massima siano le stesse, determinare la differenza tra i lavori ottenibili dalle macchine.

Per il teorema di Carnot il rendimento delle macchine è lo stesso (indipendente dalla sostanza),

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{\mathcal{L}^{(He)}}{Q_1^{(He)}} = \frac{\mathcal{L}^{(H_2)}}{Q_1^{(H_2)}}, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{(He)} - \mathcal{L}^{(H_2)} = \eta \left(Q_1^{(He)} - Q_1^{(H_2)} \right). \quad (1)$$



Indichiamo con $ABCD$ il ciclo dell'elio e con $AECF$ il ciclo dell'idrogeno; essi differiscono per la pendenza delle adiabatiche in cui, per l'elio (gas monoatomico) $\gamma_1 = 5/3$ e per l'idrogeno (gas biatomico) $\gamma_2 = 7/5$. Nei due cicli la pressione massima è p_A e quella minima p_C . Dalle equazioni delle adiabatiche reversibili si ha,

$$\begin{aligned} p_B T_1^{\gamma_1/(1-\gamma_1)} &= p_C T_2^{\gamma_1/(1-\gamma_1)} \\ p_E T_1^{\gamma_2/(1-\gamma_2)} &= p_C T_2^{\gamma_2/(1-\gamma_2)}. \end{aligned} \quad (2)$$

D'altra parte,

$$Q_1^{(He)} = RT_1 \ln \frac{p_A}{p_B}, \quad Q_1^{(H_2)} = RT_1 \ln \frac{p_A}{p_E},$$

quindi per la (1) si ha:

$$\Delta \mathcal{L} = \eta RT_1 \ln \frac{p_E}{p_B} = R(T_1 - T_2) \ln \frac{p_E}{p_B}. \quad (3)$$

Dividendo membro a membro le (2):

$$\frac{p_E}{p_B} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{[(\gamma_2/(1-\gamma_2)) - \gamma_1/(1-\gamma_1)]};$$

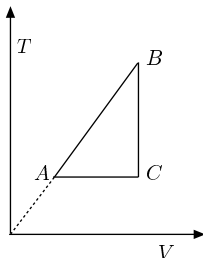
Sostituendo nella (3) e ricordando i valori di γ_1 e γ_2 , si ottiene:

$$\Delta \mathcal{L} = R(T_1 - T_2) \left(\frac{\gamma_2}{1-\gamma_2} - \frac{\gamma_1}{1-\gamma_1} \right) \ln \frac{T_2}{T_1} = R(T_1 - T_2) \ln \frac{T_1}{T_2} = 1728 J.$$

24. Un gas ideale monoatomico, nel diagramma V - T , compie un ciclo $ABCA$ rappresentato da un triangolo rettangolo, come in figura. Sapendo che $T_B = 3T_A$, calcolare il rendimento.

Dalla figura si riconosce che nella trasformazione AB il rapporto $T/V = c$ è costante, quindi si tratta di una isobara; BC è una isocora; CA una isoterma. Usando l'equazione di stato, si ha

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{T_B}{T_A} = 3, \quad \Rightarrow \quad V_B = V_C = 3V_A.$$



Le quantità di calore scambiate sono:

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= C_p(T_B - T_A), \\ Q_{BC} &= C_V(T_B - T_C), \\ Q_{CA} &= RT_A \ln \frac{V_C}{V_A}. \end{aligned}$$

Il rendimento risulta

$$\eta = 1 - \frac{Q_{BC} + Q_{CA}}{Q_{AB}} = 0,18.$$

25. Un gas ideale biatomico esegue il ciclo $ABCA$, in cui: AB è una espansione isobara che raddoppia il volume iniziale, $V_B = 2V_A$; BC un raffreddamento isocoro, ottenuto ponendo il gas in contatto con una sorgente a temperatura T_C ; CA una compressione isoterma che riporta il gas nelle condizioni iniziali. Calcolare il rendimento del ciclo e la variazione di entropia molare dell'universo.

Dall'equazione di stato, relativa all'isobara, si ha

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_A} = 2.$$

Le quantità di calore scambiate nel ciclo sono:

$$Q_{AB} = nC_p(T_B - T_A) = nC_pT_A,$$

assorbita;

$$Q_{BC} = nC_V(T_B - T_C) = nC_V(T_B - T_A) = nC_VT_A,$$

ceduta;

$$Q_{CA} = nRT_A \ln \frac{V_C}{V_A} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = nRT_A \ln 2,$$

ceduta. Il rendimento risulta:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{BC} + Q_{CA}}{Q_{AB}} = 1 - \frac{C_V + R \ln 2}{C_p} = 8,8\%$$

Il ciclo contiene una trasformazione irreversibile: l'isocora che raffredda il gas posto a contatto con la sorgente a temperatura $T_C = T_A$, pertanto risulta irreversibile. Ma la sua variazione di entropia è nulla, dunque la variazione di entropia dell'universo è uguale alla variazione di entropia delle sorgenti. Denotando con ΔS^* tali variazioni, per $n = 1$, si ha:

$$\begin{aligned} \Delta S_u &= \Delta S_{AB}^* + \Delta S_{BC}^* + \Delta S_{CA}^* \\ &= -C_p \ln \frac{T_B}{T_A} - \frac{Q_{BC}}{T_A} - R \ln \frac{V_A}{V_B} \\ &= -C_p \ln 2 + C_V + R \ln 2 = 6,4 J/(mol \cdot K). \end{aligned}$$

26. Una mole di gas ideale monoatomico compie il ciclo reversibile $ABCA$ in cui: AB è una isoterma; BC una isobara dove $V_C = V_A/2$; CA una trasformazione dove è costante il rapporto pressione volume. Calcolare il rendimento del ciclo.

La trasformazione CA è una politropica del tipo

$$pV^{-1} = \text{cost}, \quad \Rightarrow \quad \frac{p_A}{V_A} = \frac{p_C}{V_C}, \quad \Rightarrow \quad p_C = \frac{p_A}{2}, \quad T_C = \frac{T_A}{4}.$$

Essendo nella politropica $\delta = -1$, il suo calore molare risulta:

$$C_\delta = C_V + \frac{R}{1 - \delta} = C_V + \frac{R}{2}.$$

Nella trasformazione AB si ha

$$p_A V_A = p_B V_B = p_C V_B, \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{V_B}{2}.$$

Quantità di calore scambiate:

$$Q_{AB} = RT_A \ln \frac{V_B}{V_A}, \quad Q_{CA} = C_\delta (T_A - T_C),$$

assorbite.

$$Q_{BC} = C_p (T_A - T_C),$$

ceduta.

Pertanto:

$$\eta = 1 - \frac{C_p (1 - T_C/T_A)}{R \ln(V_B/V_A) + C_\delta (1 - T_C/T_A)} = 0.14.$$

27. Una mole di gas biatomico di equazione di stato,

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) V = RT,$$

esegue un ciclo $ABCD$ in cui: AB è una isoterma reversibile, in cui la temperatura della sorgente è $T_1 = 400 \text{ K}$; BC una isocora ottenuta ponendo il gas a diretto contatto con una sorgente alla temperatura $T_2 = 200 \text{ K}$; CD una compressione isoterma reversibile alla temperatura T_2 ; DA una isocora ottenuta ponendo il gas in contatto con la sorgente a temperatura T_1 e che riporta il sistema nello stato iniziale. Calcolare il rendimento del ciclo. Assumere $C_V = 5R/2$ e $V_B = 4V_A$.

Per la prima legge della termodinamica

$$\delta Q = dU + p dV = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right] dV.$$

Tenuto conto che

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p,$$

si ottiene:

$$\delta Q = C_V dT + RT \frac{dV}{V}.$$

Pertanto:

$$Q_{AB} = RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} = RT_1 \ln 4.$$

Inoltre:

$$Q_{BC} = C_V (T_B - T_C), \quad Q_{CD} = RT_2 \ln \frac{V_D}{V_C}, \quad Q_{DA} = C_V (T_A - T_D).$$

Il rendimento risulta,

$$\eta = 1 - \frac{Q_{BC} + Q_{CD}}{Q_{AB} + Q_{DA}} = \frac{R(T_1 - T_2) \ln 4}{RT_1 \ln 4 + 5R(T_1 - T_2)/2} = 0,26.$$