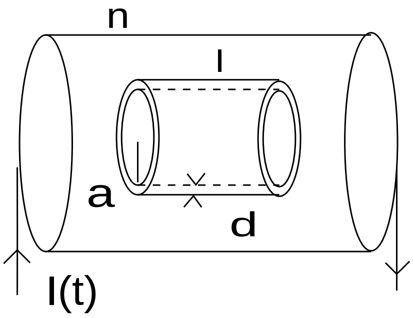
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Raccolta di esercizi di Fisica II
CAMPI ELETTROMAGNETICI INDOTTI



1. In un solenoide lungo e compatto, in aria e con n spire per unità di lunghezza, la corrente viene portata da 0 ad un valore I_0 costante, con legge temporale $I(t) = (t/T)I_0$. Al suo interno, parallelamente all' asse del solenoide è posto un tubo cilindrico di lunghezza l, raggio a e piccolo spessore d, fatto di materiale conduttore non ferromagnetico di resistività uniforme ρ. Calcolare l' energia che viene dissipata per effetto Joule nel tubo. Si trascuri l' autoinduzione. Valori numerici: $n = 10^3/m, I_0 = 10A, T = 10^{-2}s, l = 0.8m, a = 0.1m, d = 1mm, \rho = 2 \cdot 10^{-8}\Omega m$.

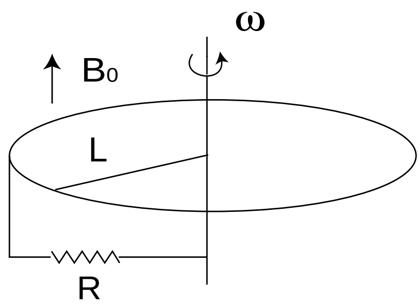
SOLUZIONE:

Il flusso $\Phi(B)$ concatenato con il cilindro di materiale ferromagnetico è variabile nel tempo. In accordo alla legge di Faraday Neumann Lenz , viene indotta un forza elettromotrice pari a $-\frac{d\Phi(B)}{dt}$ che a sua volta da luogo ad una corrente elettrica lungo il mantello del cilindro stesso. Tenendo conto che il campo B prodotto dal solenoide $B = \mu_0 n I(t)$ è uniforme e diretto parallelamente alle generatrici del cilindro, il flusso $\Phi(B)$ è semplicemente dato dal prodotto del modulo di B per l'area della base.
Per il calcolo dell'energia complessivamente dissipata per effetto Joule occorre integrare la potenza istantanea nell'intervallo (0,T) richiesto per raggiungere la corrente costante I_0. Passato tale intervallo, la fem indotta cessa di esistere essendo la corrente I(t) costante.
$U = \int_0^T W\, dt = \int_0^T \frac{f_i^2}{R} dt = \int_0^T (\mu_0 n \frac{I_0}{T} \cdot \pi a^2)^2 \cdot \frac{1}{R} dt = T \cdot (\mu_0 n \frac{I_0}{T} \cdot \pi a^2)^2 \cdot \frac{1}{R}$
Per il calcolo della resistenza elettrica complessiva è opportuno ricordare che un conduttore di sezione costante S, lunghezza l e resistività ρ, presenta ai suoi capi una resistenza R pari a $R = \rho\, l/S$. Dato il verso di circolazione della corrente già citato precedentemente, la lunghezza l e la sezione S sono nel nostro caso pari a
$l = 2\pi a \quad ; \quad S = d \cdot l$

Sostituendo l'espressione della resistenza R, si perviene al risultato finale

$$U = WT = \frac{\mu_0^2 n^2 I_0^2 \pi a^3 l d}{2T\rho} \simeq 1J$$

2. Una sbarra metallica lunga L ruota con velocità angolare ω in un piano orizzontale intorno ad un perno conduttore verticale passante per un estremo. L'altro estremo della sbarra scorre lungo un contatto strisciante. Il contatto strisciante è collegato elettricamente al perno con una resistenza R. La sbarra è immersa durante tutta la rotazione in un campo di induzione magnetica uniforme $\vec{B}_c$ verticale. Calcolare la potenza dissipata nella resistenza.



SOLUZIONE:

L'asta di materiale conduttore si muove all'interno di una zona in cui è presente un campo di induzione B uniforme. Le cariche sono quindi soggette alla forza di Lorentz F_L ovvero a un campo elettromotore

$$f_i = \int_0^L \vec{E}_i \cdot \vec{dl} \qquad \vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}_0 \quad \text{parallelo alla sbarra}$$

Tenendo conto dell'orientazione di B e del verso di rotazione dell'asta, il campo E_i risulta diretto lungo l'asta e orientato verso l'esterno della circonferenza.
La forza elettromotrice indotta è pari a

$$f_i = \int_0^L \omega x B_0 dx = \omega B_0 \frac{L^2}{2} \quad \text{essendo a distanza x dal perno} \quad E_i = \omega x B_0$$

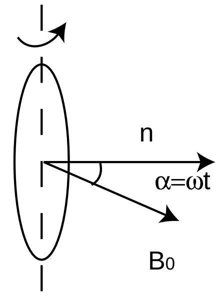
Essendo inoltre l'asta collegata alla resistenza R, si trova che la potenza dissipata è data da

$$P = i^2 R = \frac{f_i^{\,2}}{R} = \frac{\omega^2 {B_0}^2 L^4}{4R}$$

3. Una bobina di N spire circolari di area S e resistenza totale R può ruotare intorno ad un asse coincidente con un diametro. La bobina è immersa in un campo magnetico uniforme, costante nel tempo, di induzione $\vec{B}_0$, perpendicolare all'asse di rotazione. Calcolare il momento meccanico medio che deve fornire un motore per mantenere la bobina in rotazione con velocità angolare costante ω. Si trascurino l'autoinduzione e gli attriti meccanici.

SOLUZIONE:

La bobina è soggetta ad un flusso concatenato $\Phi(B)$ variabile nel tempo. Per effetto dell'induzione e.m, viene indotta un f.e.m ovvero una corrente indotta pari a



$$i_{ind} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\Phi(\vec{B_0}) = \frac{N\omega SB_0}{R}sen\omega t$$

Il momento magnetico della spira associato alla corrente indotta è:$\vec{m} = NSi_{ind}\vec{n}$. Il momento meccanico fornito dal motore deve essere uguale e contrario al momento meccanico agente sulla spira : $\vec{M}_{mot} = -\vec{M} = -\vec{m} \times \vec{B}_0$

$$M_{mot} = \frac{\omega N^2S^2B_0^2}{R}sen^2\omega t \Rightarrow M_{mot} = \frac{\omega N^2S^2B_0^2}{2R}$$

4. Una piccola spira di raggio $a = 1cm$ è percorsa da una corrente alternata $i_0cos(\omega t)(\omega = 10^4, i_0 = 1A)$. Calcolare la corrente che si induce in una grande spira di raggio $b = 1m$ complanare e concentrica con la spira piccola. Sia $R = 1\Omega$ la resistenza della spira grande.

SOLUZIONE:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2b} \quad \textit{campo generato dalla spira grande al centro se fosse percorsa da una corrente.}$$

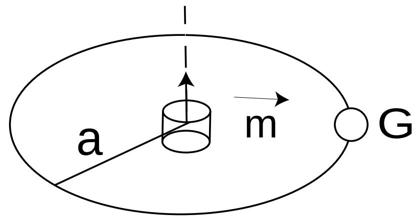
$$\Phi_{spirapiccola}(\vec{B_0}) = \frac{\mu_0 I}{2b}\pi a^2 \quad M = \frac{\Phi(B_0)}{I} = \frac{\mu_0\pi a^2}{2b} \quad coeff.\ mutua\ induzione$$
$(M_{12} = M_{21})$

$$fem = -M\frac{di}{dt} = M\omega i_0 sin(\omega t) \quad I(t) = \frac{fem(t)}{R} = \frac{\mu_0\pi a^2\omega i_0}{2bR}sin(\omega t) = I_0 \sin(\omega t)$$

$I_0 \cong 2\ \ \mu A$

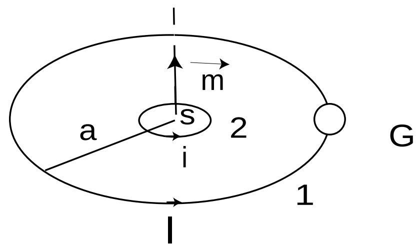
5. Al centro di una spira circolare conduttrice di resistenza R e raggio a, nella quale è inserito un galvanometro balistico G, è disposto in aria, un piccolo cilindro magnetizzato lungo la direzione del suo asse, che è disposto perpendicolarmente al piano della spira.

A partire da questa situazione iniziale, il magnete viene portato a grande distanza. Per effetto di questo spostamento il galvanometro balistico registra il passaggio di una carica totale Q nella spira. Ricavare l'espressione del momento magnetico del cilindretto magnetizzato.



SOLUZIONE:

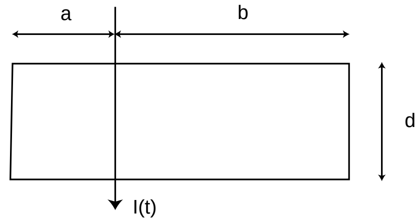
$m = iS \;\; M = M_{21} = \dfrac{\Phi_2(B_1)}{I} \simeq \dfrac{\mu_0 I}{2aI} S$
$(S << \pi a^2)$



Per Felici : $Q = \dfrac{1}{R}\left[\Phi_{in} - \Phi_{fin}\right] = \dfrac{1}{R}\Phi_{in} \longrightarrow \Phi_{in} = RQ$

ma: $\Phi_{in} = Mi = \dfrac{\mu_0(iS)}{2a} = \dfrac{\mu_0 m}{2a} = RQ \longrightarrow m = \dfrac{2aRQ}{\mu_0}$

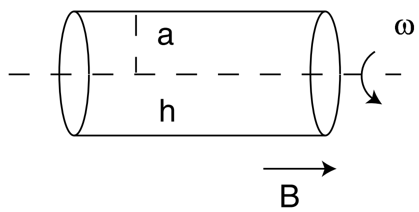
6. Una spira rettangolare chiusa di resistenza r sia appoggiata su un filo indefinito percorso da una corrente di intensità $I(t)$, come mostrato in figura. Spira e filo sono isolati elettricamente. Si calcoli l'energia dissipata nella spira se la corrente che scorre nel filo aumenta segue ndo la legge: $I(t) = I_0\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$. Si trascuri l'autoinduzione. $[r = 5\Omega,\ I_0 = 3A,\ \tau = 1ms,$ $b = 3a = 2d = 0.1m]$



SOLUZIONE:

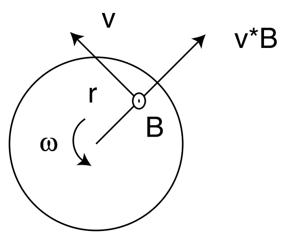
$f_i = -\dfrac{d\phi(B)}{dt} \qquad \phi(B) = \displaystyle\int_a^b d \cdot dx \cdot B(x) = \int_a^b \frac{\mu_0 I(t) d}{2\pi x} = \frac{d\mu_0 ln\frac{b}{a}}{2\pi} I(t)$
$\Longrightarrow f_i = \dfrac{\mu_0}{2\pi} ln\dfrac{b}{a}\dfrac{I_0}{\tau} e^{\frac{-t}{\tau}}$
$\mathcal{E} = \displaystyle\int_0^\infty p(t)dt = \int_0^\infty \frac{f_i^2}{r}dt = \frac{d^2\mu_0^2 ln^2\frac{b}{a} I_0^2}{8\pi^2\tau r} \qquad \Rightarrow \ \mathcal{E} = 1.2 \cdot 10^{-12} J$

7. Un cilindro di rame di raggio a e altezza $h >> a$, ruota con velocità angolare uniforme ω attorno al proprio asse ed è immerso in un campo B stazionario e uniforme, parallelo all'asse del cilindro. Calcolare l'espressione della carica Q presente all'interno del corpo cilindrico.



SOLUZIONE:

All' interno del cilndro di rame :
$\vec{E} = -\vec{E}_L = -\omega B \vec{r}$



Applichiamo il teorema di Gauss ad una superficie cilndrica appena contenuta nel cilindro di rame:

$$Q = \epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\epsilon_0 ES = -\epsilon_0 ES = -\epsilon_0 \omega B a \cdot 2\pi a h$$