Problemi sui Gas Ideali
A cura del Prof. T.Papa

1. Una mole di gas ideale monoatomico alla temperatura iniziale $T_0 = 300\,K$ esegue una trasformazione politropica reversibile di equazione $TV^{-3} = cost$, raddoppiando il volume iniziale V_0. Determinare la quantità di calore scambiata dal gas.

Usando l'equazione di stato, l'equazione della politropica si può scrivere

$$pV^{-2} = cost, \qquad (\delta = -2).$$

Il calore molare della politropica è

$$C_\delta = C_V + \frac{R}{1-\delta} = \frac{11}{6}R,$$

quindi:

$$Q = nC_\delta(T_f - T_0). \tag{1}$$

Ma,

$$T_0V_0^{-3} = T_f(2V_0)^{-3}; \quad \Rightarrow \quad T_f = 8T_0.$$

Sostituendo nella (1),

$$Q = nR\frac{77}{6}T_0 = 7647\,cal.$$

2. Due moli di gas ideale monoatomico si espandono secondo la trasformazione reversibile, di equazione

$$p = p_0 + a(V - V_0) - b(V - V_0)^2,$$

in cui la pressione dello stato finale è uguale a quella dello stato iniziale $p_0 = 10^5\,Pa$. Calcolare il lavoro ed il calore associati alla trasformazione; $(a = 2 \cdot 10^8\,Pa/m^3,\ b = 5 \cdot 10^{11}\,Pa/m^6)$.

Nel diagramma V-p la trasformazione è rappresentata da un arco di parabola ad asse verticale e concavità volta in basso i cui stati estremi sono alla stessa pressione p_0. Per la prima legge della termodinamica,

$$Q = \Delta U + \mathcal{L}. \tag{1}$$

Detto V_1 il volume finale, si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int_{V_0}^{V_1} pdV = \int_{V_0}^{V_1} \left[p_0 + a(V-V_0) - b(V-V_0)^2\right] dV \\ &= p_0(V_1 - V_0) + \frac{1}{2}a(V_1 - V_0)^2 - \frac{1}{3}b(V_1 - V_0)^3.\end{aligned}$$

Ma, dall'equazione della trasformazione, per $p = p_0$ e $V = V_1$, si ricava

$$V_1 - V_0 = \frac{a}{b} = 4 \cdot 10^{-4}\,m^3. \tag{2}$$

Sostituendo nella precedente, il lavoro risulta:

$$\mathcal{L} = 45,34\,J.$$

La variazione di energia interna è

$$\Delta U = nC_V(T_1 - T_0) = \frac{3}{2}p_0(V_1 - V_0) = 60\,J,$$

dove si è tenuto conto dell'equazione di stato. Dalla (1) si ottiene il calore associato alla trasformazione:

$$Q = 105,34\,J.$$

Si noti che il lavoro e la variazione di energia interna risultano piuttosto piccoli. Ciò è dovuto al fatto che la variazione di volume, come risulta dalla (2), è molto modesta.

3. Un recipiente cilindrico adiabatico, munito di pistone anch'esso adiabatico, è contenuta una mole di gas ideale ed una massa $m = 20\,gm$ di ghiaccio. Il sistema è in equilibrio alla pressione $p_0 = 1\,atm$ e alla temperatura $\theta_0 = 0\,°C$. Il gas viene compresso reversibilmente finché tutto il ghiacco si è sciolto. Calcolare il volume finale del gas, assumendo indipendenti dalla pressione la temperatura ed il calore di fusione del ghiaccio $\lambda_f = 80\,cal/gm$.

Finché il ghiaccio è presente alla sua temperatura di fusione, la compressione è isoterma reversibile. In tal caso

$$\Delta U = 0, \quad \Rightarrow \quad Q = -\mathcal{L},$$

dove Q è il calore assorbito nella fusione del ghiaccio e $-\mathcal{L}$ il lavoro di compressione, esterno. Detto V_1 il volume finale, si ha

$$m\lambda_f = -nRT_0 \ln \frac{V_1}{V_0}.$$

da cui:

$$V_1 = V_0 \exp\left[-\frac{m\lambda_f}{nRT_0}\right] = \frac{nRT_0}{p_0} \exp\left[-\frac{m\lambda_f}{nRT_0}\right] = 1,18 \cdot 10^{-3}\, m^3.$$

4. Un gas ideale monoatomico è contenuto in un recipiente adiabatico, in equilibrio alla temperatura $T_A = 320\,K$. Successivamente esso si espande, occupando il volume $V_B = 3V_A$ e compiendo il lavoro $\mathcal{L} = 150\,J/mol$, quindi viene compresso adiabaticamente e reversibilmente fino al volume finale $V_C = V_A$. Determinare la temperatura finale del gas.

L'espansione AB è irreversibile. Per la prima legge della termodinamica,

$$nC_V(T_B - T_A) + n\mathcal{L} = 0,$$

si ricava:

$$T_B = T_A - \frac{\mathcal{L}}{C_V} = T_A - \frac{2\mathcal{L}}{3R}.$$

Pertanto, tenuto conto dell'equazione dell'adiabatica BC,

$$T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} = T_B 3^{\gamma-1},$$

si ottiene:

$$T_C = \left(T_A - \frac{2\mathcal{L}}{3R}\right) 3^{5/3-1} = 640,5\,K.$$