Raccolta di Problemi sulla Dinamica del Punto Materiale
A cura del Prof. T.Papa

1. Un autocarro di massa $m = 25\,t$ ha una forza di trazione costante $F = 1,5 \cdot 10^4\,N$. Supponendo che il veicolo parta da fermo su una strada piana e che il modulo della forza resistente si possa approssimare con la relazione $R = k + bv$, con $k = 8 \cdot 10^3\,N$ e $b = 70\,N/(km/h)$, determinare: la massima velocità raggiunta v_L (velocità limite), il tempo t_1 impiegato per raggiungere la velocità $v_1 = v_L/5$ e lo spazio percorso in tale tempo.

$$F - (k + bv) = m\frac{dv}{dt}. \tag{1}$$

La velocità limite si ha per $dv/dt = 0$, pertanto:

$$v_L = \frac{F-k}{b} = 100\,km/h = 27,78\,m/s.$$

La velocità dell'autocarro va ottenuta integrando la (1), che si può scrivere:

$$v_L - v = \frac{m}{b}\frac{dv}{dt}, \qquad \frac{dv}{v_L - v} = \frac{b}{m}dt.$$

Si ha:

$$-\ln(v_L - v) = \frac{b}{m}t + C,$$

con $C = -\ln v_L$, essendo nulla la velocità iniziale. Dunque:

$$v = v_L\left(1 - e^{-bt/m}\right).$$

Per $v = v_L/5$, tenuto conto che

$$b = 70\,N/(km/h) = 70 \cdot 3,6\,N/(m/s) = 252\,N/(m/s),$$

risulta

$$t_1 = \frac{m}{b}\ln\frac{5}{4} = 22,14\,s.$$

Lo spazio percorso nell'intervallo di tempo t_1 è dato da

$$x = v_L\int_0^{t_1}\left(1 - e^{-bt/m}\right)dt = v_L\left[t_1 + \frac{m}{b}\left(e^{-bt_1/m} - 1\right)\right] = 63,85\,m.$$

2. Una particella di massa $m = 1\,kg$ ha energia potenziale espressa dalla relazione

$$U = A(1 - \cos kx)$$

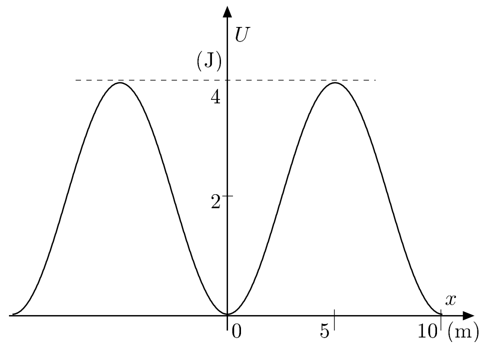
in cui $A = 2\,J$, $k = \pi/5\,rad/m$, e può muoversi, ovviamente, lungo l'asse x.

Inizialmente la particella si trova nella posizione $x_0 = 1\,m$. Determinare la massima distanza x_m che essa raggiunge se le velocità iniziali sono rispettivamente $v_0 = 2\,m/s$ e $v_0 = 4\,m/s$.

L'andamento dell'energia potenziale è periodico, come in figura, con massimi $U_{max} = 2A = 4\,J$, in corrispondenza a

$$kx = (2n+1)\pi, \qquad x = \frac{(2n+1)\pi}{k}.$$

La particella si trova nella buca di potenziale il cui valore massimo, $n = 0$, corrisponde a $x = 5\,m$ e pertanto nel primo caso, avendo energia cinetica $T = 2\,J$, non potrà oltrepassare tale massimo.



La particella è legata, dunque raggiunge la distanza massima con energia cinetica nulla; pertanto:

$$T_0 + U_0 = U;$$

da cui:

$$U = \frac{1}{2}mv_0^2 + A(1 - \cos kx_0) = 2,38\,J.$$

Quindi, alla distanza massima si ha

$$A(1 - \cos kx_m) = 2,38\,J.$$

Si ottiene:

$$x_m = \frac{1}{k}\cos^{-1}\left(1 - \frac{2,38}{A}\right) = 2,8\,m.$$

Nel caso in cui la velocità iniziale sia $v_0 = 4\,m/s$, l'energia totale della particella risulta

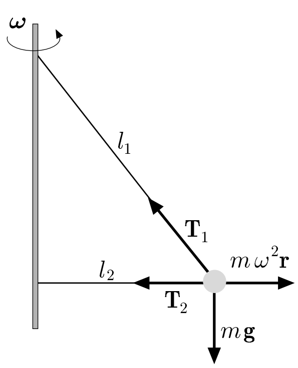
$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + U_0 = 16,38\,J,$$

maggiore dell'energia potenziale massima, pertanto la particella si allontana indefinitamente lungo l'asse x.

3. Un corpo puntiforme di massa $m = 1\,kg$ è collegato mediante due fili ideali, di lunghezza rispettivamente $l_1 = 1\,m$ e $l_2 = 0,5\,m$ ad un'asta rigida verticale che ruota con velocità angolare ω. I fili sono fissati all'asta in modo che, nella rotazione, il filo più corto risulti ortogonale ad essa. Assegnata la tensione massima che possono sopportare i fili, $T_{max} = 60\,N$, determinare il valore massimo di ω.

Nel riferimento ruotante si ha equilibrio delle forze reali e della forza di trascinamento (centrifuga):

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + m\mathbf{g} + m\omega^2\mathbf{r} = 0.$$



Proiettando sugli assi orizzontale e verticale, si ha:

$$-T_1\cos 60° - T_2 + m\omega^2 l_2 = 0, \qquad T_1 \sin 60° - mg = 0.$$

Dalla prima,

$$\frac{1}{2}T_1 + T_2 = m\omega^2 l_2. \tag{1}$$

Dalla seconda,

$$T_1\frac{\sqrt{3}}{2} = mg, \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}mg = 11,33\,N,$$

indipendente dalla velocità angolare.

Ricavando ω dalla (1) e sostituendo a T_2 il valore della tensione massima assegnato, si ha:

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{T_1}{2ml_2} + \frac{T_{max}}{ml_2}} = 11,46\, rad/s\,.$$

4. All'equatore un corpo cade liberamente dall'altezza $h = 100\, m$, con velocità iniziale nulla. Determinare, nel riferimento terrestre, le equazioni del moto e la deviazione x, rispetto alla verticale, del punto di impatto col suolo. Trascurare la forza centrifuga dovuta alla rotazione terrestre.

Nel riferimento solidale con la terra, il corpo è soggetto alla gravità, alla forza centrifuga ed alla forza di Coriolis. Va applicata la legge della dinamica relativa che si scrive:

$$m\mathbf{a}_r = m\mathbf{g} + m\omega^2\mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r, \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ ed $\mathbf{r}$ sono rispettivamente la velocità angolare della terra e la distanza del corpo dal suo centro.

Il problema è analiticamente piuttosto complesso. Tuttavia se si trascura ω^2 in quanto molto piccolo ($\omega = 7,27 \cdot 10^{-5} rad/s$, quindi il suo quadrato è dell'ordine di 10^{-11}) si ottiene una soluzione soddisfacente; vedi T. Papa; Lezioni di Fisica, Meccanica, pagina 263. Il lettore può trovare la soluzione esatta in J. B. Marion; Classical Dynamics, Academic Press, N. Y. pagina 352. Nel caso del problema proposto, il corpo cade all'equatore dove $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{v}_r$ sono ortogonali. Tenuto conto che la forza di Coriolis è rivolta verso est e fissato un riferimento con asse x orientato in questa direzione ed asse y verso l'alto, la (1) dà luogo alle due equazioni scalari:

$$\ddot{x} = |-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r| = 2\omega\, v_r; \qquad \ddot{y} = -g,$$

che integrate forniscono:

$$\dot{x} = \omega g t^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}\omega g t^3;$$

$$\dot{y} = -gt, \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + h.$$

Poiché la velocità angolare della terra è $\omega = 2\pi/T = 7,27 \cdot 10^{-5}\, rad/s$ e il tempo d'impatto al suolo $t = \sqrt{2h/g}$, si ottiene:

$$x = \frac{1}{3}\omega g \left(2\frac{h}{g}\right)^{3/2} = 2,18 \cdot 10^{-2}\, m.$$

5. Due masse $m_1 = 10\, kg$ e $m_2 = 5\, kg$ sono fissate agli estremi di un filo ideale e vengono trascinate, su un piano orizzontale, applicando a m_1 una forza costante $\mathbf{F}$, di modulo $F = 100\, N$. Quest'ultima forma con l'orizzontale un angolo $\theta = 30°$. Sapendo che i coefficienti di attrito cinetico tra il piano e le due masse sono rispettivamente $\mu_1 = 0,3$ e $\mu_2 = 0,15$, calcolare la tensione del filo e l'accelerazione delle masse.

La forza applicata forma l'angolo θ con l'orizzontale, quindi la forza normale applicata a m_1 è inferiore al suo peso. Detta T la tensione del filo, le equazioni della dinamica relative alle due masse sono:

$$F\cos\theta - \mu_1(m_1 g - F\sin\theta) - T = m_1 a, \qquad T - \mu_2 m_2 g = m_2 a. \tag{1}$$

L'accelerazione è ovviamente la stessa in quanto il filo, durante il moto, risulta teso; inoltre il modulo della tensione nel filo ideale si trasmette inalterato in ogni suo punto.

Dalla (1) si trae:

$$a = 4,3\, m/s^2, \qquad T = 29\, N.$$

6. In un riferimento inerziale, un punto materiale di massa m si muove su una traiettoria circolare di raggio r. L'area spazzata dal vettore posizione, con origine nel centro della circonferenza, segue la legge

$$S = \frac{1}{2}ct^2,$$

dove c è una costante. Determinare il modulo della forza agente sul punto materiale.

Nel problema viene assegnata la legge con cui viene spazzata l'area dal vettore posizione. Ciò indica che la derivata di S rispetto al tempo fornisce il modulo della velocità areolare:

$$\frac{dS}{dt} = ct. \tag{1}$$

Ricordando che la velocità areolare è definita dalla relazione

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}),$$

nel caso di traiettoria circolare, si ha

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}rv = \frac{1}{2}\omega r^2. \tag{2}$$

Uguagliando le (1) e (2):

$$ct = \frac{1}{2}\omega r^2, \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2c}{r^2}t. \tag{3}$$

La velocità angolare cresce linearmente col tempo.

D'altra parte, per determinare il modulo della forza agente sul punto materiale occorre conoscere il modulo dell'accelerazione, dato da:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \tag{4}$$

con

$$a_t = \dot{\omega}r, \qquad a_n = \omega^2 r.$$

Sostituendo nella (4),

$$a = r\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4},$$

e, tenuto conto della (3),

$$a = \frac{2c}{r}\sqrt{1 + \frac{4c^2}{r^4}t^4}.$$

Pertanto:

$$F = ma = \frac{2mc}{r}\sqrt{1 + \frac{4c^2}{r^4}t^4}.$$

7. Un dischetto è posto alla distanza $r = 10\,cm$ dall'asse di una piattaforma ruotante con velocità angolare $\omega_0 = 2\,rad/s$, restando fermo rispetto ad essa. Imprimendo alla piattaforma una accelerazione angolare $\alpha = \dot{\omega} = 2\,rad/s^2$ si osserva che dopo un intervallo di tempo $\Delta t = 1,5\,s$ il dischetto inizia a muoversi. Determinare il coefficiente di attrito statico.

Nel riferimento inerziale la forza agente sul dischetto è

$$\mu_s R_n = ma, \tag{1}$$

dove μ_s è il coefficiente di attrito statico ed $R_n = mg$ la reazione normale. Ma:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \tag{2}$$

con

$$a_t = \dot{\omega} r, \qquad a_n = \omega^2 r.$$

Trascorso l'intervallo di tempo Δt, la velocità angolare assume il valore

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega}\Delta t = 5\,rad/s;$$

quindi dalle (1) e (2) si trae:

$$\mu_s = \frac{a}{g} = \frac{r}{g}\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4} = 0,26.$$

8. Un punto materiale di massa $m = 10\,gm$ si muove su una traiettoria circolare di raggio $R = 20\,cm$ con moto uniformemente ritardato. Sapendo che all'istante $t_0 = 0$ la sua velocità ha modulo $v_0 = 15\,m/s$ e che all'istante $t_1 = 5\,s$ è nulla, determinare le leggi orarie della velocità, del moto e dell'accelerazione. Calcolare inoltre il lavoro compiuto dalle forze agenti nell'intervallo di tempo considerato.

Il modulo dell'accelerazione tangenziale è costante,

$$a_t = \frac{0 - v_0}{t_1 - t_0} = -3\,m/s^2.$$

Si deduce:

$$v = v_0 + a_t\,t = 15 - 3\,t, \qquad s = v_0 t + \frac{1}{2}a_t\,t^2 = 15\,t - \frac{3}{2}t^2. \tag{1}$$

Ricordando che il modulo dell'accelerazione è

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2},$$

con

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

tenuto conto della prima delle (1), si trova:

$$a = \sqrt{9 + \left[\frac{(15 - 3t)^2}{0,2}\right]^2}. \tag{2}$$

Si noti che all'istante t_1, essendo $v = 0$, si annulla soltanto l'accelerazione normale. Infatti in tale istante il punto materiale, animato di velocità iniziale v_0 positiva, per esempio diretta nel verso antiorario, ma soggetto all'accelerazione tangenziale negativa di modulo costante, inverte il suo moto e procede con accelerazione il cui modulo è dato dalla (2). D'altra parte il grafico della seconda delle (1), che esprime la legge oraria con cui è percorsa la traiettoria, è una parabola ad asse verticale e concavità volta in basso. L'ascissa t_1 corrisponde proprio al suo vertice, punto di inversione del moto.

Il lavoro delle forze è uguale alla variazione di energia cinetica del punto:

$$\mathcal{L} = \Delta T = -\frac{1}{2}m v_0^2 = -1,12\,J.$$

9. Una particella di massa $10\,gm$ e velocità iniziale di modulo $v_0 = 6\,m/s$, all'istante $t = 0$ entra in un mezzo dove è soggetta ad una forza viscosa del tipo $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$. Calcolare l'energia E dissipata nell'intervallo di tempo compreso tra $t = 0$ e $t = m/b$.

L'andamento della velocità si ottiene integrando l'equazione

$$m\frac{dv}{dt} = -b\,v, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}dt,$$

che fornisce

$$\ln v = -\frac{b}{m}\, t + C,$$

dove C è una costante che va determinata tenuto conto della condizione iniziale: $t = 0,\ v = v_0$. Pertanto,

$$\ln v = -\frac{b}{m}\, t + \ln v_0, \quad \Rightarrow \quad v = v_0 e^{-bt/m}.$$

L'energia dissipata è pari alla variazione di energia cinetica:

$$E = \Delta T = \frac{1}{2} m v_0^2 e^{-2bt/m} - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 (e^{-2} - 1) = -0,15\, J.$$

10. Un oggetto animato di velocità iniziale v_0 viene lanciato in modo da strisciare su un piano orizzontale scabro, arrestandosi dopo aver percorso una distanza d. Se il piano viene accelerato verso l'alto si osserva che l'oggetto, lanciato con la stessa velocità iniziale, si arresta percorrendo una distanza $d/2$. Determinare l'accelerazione del piano.

Supponendo costante la forza di attrito, per il teorema dell'energia cinetica si ha:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \mu_c R_n d = \mu_c m g d, \tag{1}$$

dove R_n è la reazione normale e μ_c il coefficiente d'attrito cinetico o dinamico.

Nel caso in cui il piano venga accelerato verso l'alto le forze che agiscono sull'oggetto sono: la forza di trascinamento $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$ e la risultante delle forze reali che comprende la reazione vincolare $\mathbf{R}'_n$ e la forza peso. Poiché l'oggetto non assume un moto verticale perché striscia ancora sul piano si ha:

$$\mathbf{R}'_n + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_t = 0.$$

Proiettando sulla verticale ascendente si ottiene:

$$R'_n - mg - ma_t = 0, \quad \Rightarrow \quad R'_n = m(g + a_t).$$

Dunque, ancora per il teorema dell'energia cinetica, si ha

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \mu_c R'_n \frac{d}{2} = \mu_c m (g + a_t) \frac{d}{2}. \tag{2}$$

dividendo membro a membro le (2) ed (1) si ottiene:

$$\frac{g + a_t}{g} = 2; \quad \Rightarrow \quad a_t = g.$$

11. Un treno viaggia alla velocità costante $v = 50\, km/h$. Supponendo che la forza di trazione del motore contrasti solo la forza di resistenza del mezzo, che si assume di tipo viscoso $F_v = -bv$ con $b = 100\, kg/s$, e che l'efficienza del motore sia $\epsilon = 0,6$ (rapporto tra l'energia erogata dal motore e l'energia elettrica assorbita), calcolare l'energia elettrica necessaria per percorrere $1\, km$.

Poiché il treno ha velocità costante, detta F la forza di trazione si deve avere,

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_v = 0, \qquad F - bv = 0, \qquad F = bv.$$

Detta E_{mot} l'energia erogata dal motore, E_{el} l'energia elettrica assorbita e Δl lo spazio percorso, si ha:

$$E_{el} = \frac{E_{mot}}{\epsilon} = \frac{F \Delta l}{\epsilon} = \frac{b v \Delta l}{\epsilon} = 2,3 \cdot 10^6\, J.$$

12. Un pendolo semplice di massa $m = 1\,kg$ e lunghezza l, inizialmente in quiete, è fissato al soffitto di un vagone che parte con accelerazione costante di modulo $a_t = 4,9\,m/s^2$. Calcolare la massima tensione del filo durante il moto del vagone.

Il pendolo, disposto inizialmente lungo la verticale, appena il vagone accelera comincia ad oscillare a causa della forza di trascinamento $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$. La posizione attorno alla quale avvengono le oscillazioni, nel riferimento del vagone (accelerato), è determinata dalla relazione

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_t = 0,$$

dove $\mathbf{F}$ è la somma delle forze reali: forza peso e tensione del filo. Detta $\mathbf{T}$ la tensione del filo, la precedente si scrive:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} + m\mathbf{a}_t = 0. \tag{1}$$

Assunto positivo il verso degli archi crescenti e proiettando sulla tangente alla traiettoria si ottiene la relazione:

$$ma_t \cos\theta_0 - mg\sin\theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_t = g\,\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} = g\tan\theta_0, \tag{2}$$

che determina l'angolo θ_0 attorno al quale avvengono le oscillazioni oppure, noto quest' ultimo, l'accelerazione di trascinamento.

Si intuisce subito, come avviene per un pendolo che oscilla in un riferimento inerziale, che in tale posizione la tensione del filo è massima. Infatti l'equazione della dinamica nel riferimento accelerato si scrive:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} + m\mathbf{a}_t = m\mathbf{a}_r.$$

Assunto come positivo il verso centripeto e proiettando sulla normale, si ha:

$$T - mg\cos\theta - ma_t\sin\theta = m\frac{v^2}{l}. \tag{3}$$

Detto φ l'angolo di oscillazione rispetto a θ_0, la (3) diventa

$$T - mg\cos(\theta_0 + \varphi) - ma_t\sin(\theta_0 + \varphi) = m\frac{v^2}{l},$$

ossia:

$$T - (mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0)\cos\varphi + (ma_t\cos\theta_0 - mg\sin\theta_0)\sin\varphi = m\frac{v^2}{l},$$

e ricordando la prima delle (2),

$$T - (mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0)\cos\varphi = m\frac{v^2}{l}.$$

Si trae,

$$T = (mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0)\cos\varphi + m\frac{v^2}{l}.$$

La tensione massima si ha per $\varphi = 0$, cioè

$$T_{max} = (mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0) + m\frac{v_0^2}{l},$$

dove v_0 è la velocità (massima) con cui transita il pendolo in corrispondenza a θ_0.

Essendo

$$mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0 = m\sqrt{g^2 + a_t^2},$$

si può anche scrivere:

$$T_{max} = m\sqrt{g^2 + a_t^2} + \frac{mv_0^2}{l}. \tag{4}$$

La velocità v_0 va ricavata per mezzo del teorema dell'energia cinetica:

$$m\sqrt{g^2+a_t^2}\,(1-\cos\theta_0)=\frac{1}{2}mv_0^2, \quad \Rightarrow \quad v_0^2=2\sqrt{g^2+a_t^2}\,(1-\cos\theta_0),$$

che sostituita nella (4) fornisce

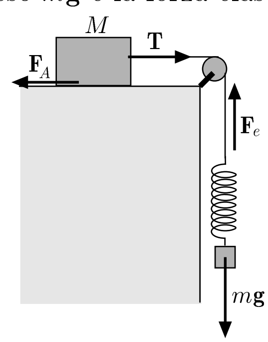
$$T_{max}=m\sqrt{g^2+a_t^2}\,(3-2\cos\theta_0).$$

Ricavando il valore di θ_0 dalla (2), si ottiene:

$$T_{max}=13,27\,N.$$

13. Un blocco di massa $M=4\,kg$, appoggiato su un piano orizzontale è collegato, mediante un filo inestendibile e di massa trascurabile, ad una molla ideale di costante elastica $k=100\,N/m$, disposta verticalmente, al cui estremo inferiore viene agganciata una massa m, in modo tale da non imprimere oscillazioni al sistema; vedi figura. Sapendo che i coefficienti di attrito statico e dinamico tra blocco e piano sono rispettivamente $\mu_s=0,5$, $\mu_d=0,2$, determinare per quale valore di m il sistema si pone in moto e il corrispondente allungamento della molla.

Le forze che agiscono su M sono la reazione vincolare $\mathbf{R}=\mathbf{R}_n+\mathbf{R}_t$, la tensione del filo $\mathbf{T}$ ed il peso $M\mathbf{g}$. La reazione vincolare normale $\mathbf{R}_n$ è ininfluente ai fini del moto in quanto opposta al peso, mentre la reazione tangenziale $\mathbf{R}_t$ è la forza di attrito $\mathbf{F}_A$. Le forze che agiscono su m sono il peso $m\mathbf{g}$ e la forza elastica.



Proiettando le forze su un asse orizzontale e su un asse verticale e tenuto conto che l'accelerazione di ogni parte del sistema è la stessa, le equazioni di Newton per le due masse sono:

$$T-F_A=Ma, \qquad F_e+mg=ma.$$

Poiché $F_e=-k\Delta x$ ed il filo ideale trasmette inalterato il modulo della forza elastica, risulta $T=k\Delta x$. Quindi le precedenti si scrivono:

$$k\Delta x-F_A=Ma, \qquad -k\Delta x+mg=ma. \tag{1}$$

Nelle condizioni di moto incipiente ($a=0$) si ha equilibrio dinamico delle forze; pertanto, indicando con Δx_1 l'allungamento della molla in queste condizioni, dalle (1) si ha

$$k\Delta x_1=F_A=\mu_s Mg, \qquad \Delta x_1=\frac{mg}{k}. \tag{2}$$

Dalla prima si ricava il valore minimo di m che pone in moto il sistema:

$$m=\mu_s M=2\,kg$$

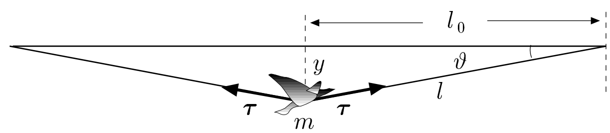
Quando il sistema è in moto, dalla prima delle (1) si ricava

$$a=\frac{k\Delta x-F_A}{M}.$$

Sostituendo nella seconda, tenuto conto della (2) e ricordando che $F_A = \mu_d Mg$, si ottiene

$$\Delta x = \frac{mg}{k}\frac{M(1+\mu_d)}{m+M} = \Delta x_1 \frac{M(1+\mu_d)}{m+M} = 0,8\Delta x_1 = 0,16\, m$$

14. Un cavo elastico di lunghezza $2l_0 = 40\, m$ e massa trascurabile è teso orizzontalmente tra due punti fissi. Nel suo punto di mezzo si posa un piccione di massa $m = 1\, kg$, che imprime oscillazioni verticali di ampiezza molto piccola rispetto alla lunghezza del cavo. Determinare la tensione del cavo, sapendo che il periodo delle oscillazioni è $T = 1\, s$ e assumendo trascurabile lo smorzamento



Detti y lo spostamento verticale, τ la tensione del cavo, θ l'angolo che esso forma con l'orizzontale, l'equazione della dinamica del sistema si scrive:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -2\tau \sin\theta + mg. \tag{1}$$

Supponendo che y sia piccolo si può assumere $\sin\theta = y/l \approx y/l_0$, altrimenti le oscillazioni sarebbero anarmoniche (l è funzione di y). Pertanto la (1) si riscrive:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -2\tau\frac{y}{l_0} + mg. \tag{2}$$

Le oscillazioni avvengono intorno ad un punto di equilibrio y_0 $(d^2y/dt^2 = 0)$, dato da

$$mg = 2\tau\frac{y_0}{l_0}, \quad \Rightarrow \quad y_0 = mg\frac{l_0}{2\tau}.$$

Introducendo la nuova variabile

$$y' = y - mg\frac{l_0}{2\tau},$$

la (2) diventa:

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{2\tau}{ml_0}y' = 0.$$

Pertanto,

$$\omega^2 = \frac{2\tau}{ml_0}, \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{2\pi^2 ml_0}{T^2} = 394,8\, N.$$

Osservazione
Si è accennato più sopra che se $y \ll l_0$ le oscillazioni possono considerarsi armoniche. Il problema è analogo al caso considerato in T. Papa, Lezioni di Fisica; Meccanica, pag. 232. Infatti

$$l^2 = l_0^2 + y^2 = l_0^2\left(1 + \frac{y^2}{l_0^2}\right) = l_0\left(1 + \frac{y^2}{l_0^2}\right)^{1/2};$$

quindi,

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_0}\left(1 + \frac{y^2}{l_0^2}\right)^{-1/2}.$$

Sviluppando in serie si ha:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_0}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{y^2}{l_0^2} + \cdots\right),$$

e l'equazione della dinamica del sistema si scrive:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -2\tau\frac{y}{l_0}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{y^2}{l_0^2} + \cdots\right).$$

Pertanto se $y \ll l_0$ è lecito trascurare i termini superiori al primo, ottenendo la (2).

15. Una molla ideale di costante elastica $k = 10\,N/m$ e lunghezza a riposo $l_0 = 1\,m$, vincolata per un estremo ad una parete verticale, è disposta su un piano orizzontale di lunghezza $4l_0$. La molla viene compressa fino a dimezzare la sua lunghezza e alla sua estremità libera viene appoggiata una massa puntiforme $m = 0,1\,kg$ che, una volta sbloccata la molla, viene spinta sul piano. Sapendo che il coefficiente d'attrito dinamico tra massa e piano è $\mu_d = 0,1$, calcolare velocità ed accelerazione della massa alla fine del piano.

Il lavoro delle forze non conservative è pari alla variazione di energia meccanica,

$$E_2 - E_1 = \mathcal{L}^{nc}, \quad \Rightarrow \quad E_2 = E_1 + \mathcal{L}^{nc},$$

ossia, detta v la velocità alla fine del piano,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 - \mu_d\, m\, g\left(4l_0 - \frac{1}{2}l_0\right).$$

Si ricava:

$$v^2 = \frac{k}{m}\frac{l_0^2}{4} - 7\mu_d\, g\, l_0, \quad \Rightarrow \quad v = 4,26\,m/s.$$

L'accelerazione, supponendo costante la forza d'attrito, è ovviamente costante e risulta

$$a = \mu_d\, g = 0.98\,m/s^2.$$

16. Una slitta di massa $m = 100\,kg$, trainata da una forza costante di modulo $F = 400\,N$ che forma un angolo θ rispetto all'orizzontale, deve percorrere un tratto $l = 50\,m$ su un piano. Sapendo che il coefficiente d'attrito dinamico tra slitta e piano è $\mu_d = 0,3$, determinare l'angolo θ affinché il tempo di percorrenza sia minimo, supponendo che la velocità iniziale sia nulla.

Il problema va risolto applicando l'equazione di Newton,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F},$$

dove $\mathbf{F}$ è la somma delle forze agenti: forza esterna, peso, reazione vincolare normale $\mathbf{R}_n$ e reazione tangente $\mathbf{R}_t$, pari alla forza d'attrito. Proiettando sugli assi x-y, orizzontale e verticale e tenuto conto che il moto avviene solo secondo x, si ha

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F\cos\theta - R_t = F\cos\theta - \mu_d(mg - F\sin\theta) \\ m\ddot{y} &= F\sin\theta - mg + R_n = 0. \end{aligned}$$

Dalla prima si ottiene:

$$\ddot{x} = \frac{F(\cos\theta + \mu_d\sin\theta) - \mu_d mg}{m}.$$

Affinché il tempo di percorrenza sia minimo, l'accelerazione impressa alla slitta dev'essere massima. Pertanto, annullando la derivata prima dell'accelerazione rispetto a θ, si ha:

$$-F\sin\theta + F\mu_d\cos\theta = 0, \qquad F\sin\theta = F\mu_d\cos\theta.$$

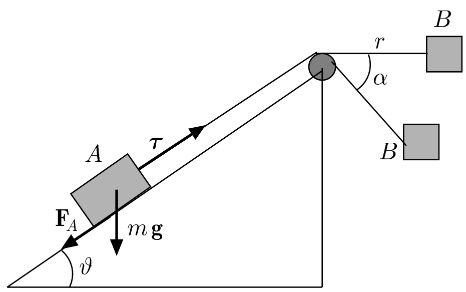
Si trae,

$$\tan\theta = \mu_d = 0,3, \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta^* = 16,7^\circ.$$

Il tempo di percorrenza minimo è dato da:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_{max}}} = \sqrt{\frac{2ml}{F(\cos\theta^* + \mu_d \sin\theta^*) - \mu_d \sin\theta^*}} = 4,9\,s$$

17. Una massa A, su un piano inclinato scabro che forma un angolo θ con l'orizzontale, è collegata mediante un filo ideale ad una massa uguale B, tenuta sospesa in posizione orizzontale rispetto al vertice più alto del piano ad una distanza r da esso. Si osserva che, rilasciata la massa B, A inizia a muoversi verso la sommità del piano quando il filo di collegamento forma un angolo α con l'orizzontale. Ricavare il coefficiente di attrito statico.



Lungo il filo ideale il modulo della tensione $\boldsymbol{\tau}$ si trasmette inalterato, quindi per la massa A, nelle condizioni di moto incipiente, si ha

$$\tau - (mg\sin\theta + \mu_s mg\cos\theta) = 0,$$

da cui,

$$\tau = mg\sin\theta + \mu_s mg\cos\theta. \tag{1}$$

Per la massa B, che percorre una traiettoria circolare, l'equazione della dinamica si scrive

$$m\mathbf{a} = \boldsymbol{\tau} + m\mathbf{g},$$

che proiettata nella direzione centripeta del filo fornisce

$$m\frac{v^2}{r} = \tau - mg\sin\alpha, \quad \Rightarrow \quad \tau = mg\sin\alpha + m\frac{v^2}{r}. \tag{2}$$

Tenuto conto che

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgr\sin\alpha, \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gr\sin\alpha,$$

e uguagliando le (1) e (2), si ottiene

$$3\sin\alpha - \sin\theta = \mu_s\cos\theta, \quad \Rightarrow \quad \mu_s = \frac{3\sin\alpha - \sin\theta}{\cos\theta}.$$

18. Una guida verticale scabra ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio $r = 10\,m$. Un blocchetto di massa $m = 5\,kg$ viene spinto dalla base della guida fino alla sommità, da una forza $\mathbf{F}$ tangente alla guida, di modulo tale da mantenere costante il modulo della velocità del blocchetto lungo tutta la traiettoria, uguale a $v_0 = 5\,m/s$. Sapendo che il coefficiente d'attrito dinamico tra blocchetto e guida è $\mu_d = 0,3$, determinare il lavoro della forza.

Indicando con $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_A$ e $\mathcal{L}_g$ rispettivamente i lavori della forza applicata, della forza d'attrito e della forza peso, per il teorema dell'energia cinetica, la somma di tali lavori è pari alla variazione di energia cinetica, nel caso del problema, nulla:

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_g = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} + \mathcal{L}_A = -\mathcal{L}_g = mgr, \tag{1}$$

pari alla variazione di energia potenziale del blocchetto. La somma dei lavori al primo membro è dovuta a forze non conservative; infatti la forza applicata è una sorta di forza "intelligente"che mantiene costante la velocità, per esempio una forza muscolare; la forza d'attrito è notoriamente non conservativa. Quindi, essendo il lavoro delle forze non conservative pari alla variazione di energia totale,

$$\mathcal{L}^{nc} = (T_B + U_B) - (T_A + U_A),$$

nel caso del problema ($T_B = T_A$) si ha:

$$\mathcal{L}^{nc} = U_B - U_A = mgr.$$

Per calcolare esplicitamente il lavoro della forza d'attrito si osservi che sul blocchetto agiscono le forze: F, la forza d'attrito $F_A = \mu_d R_n$, la reazione vincolare normale $\mathbf{R}_n$ ed il peso. Si ha:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_A + \mathbf{R}_n + m\mathbf{g}.$$

Proiettando lungo la tangente e lungo la normale alla guida, assunti positivi i versi centripeto e degli archi crescenti e tenuto conto che l'accelerazione tangenziale è nulla (velocità v_0 costante), si ha

$$\begin{aligned} &F - F_A - mg\sin\theta = 0 \\ &m\frac{v_0^2}{r} = R_n - mg\cos\theta, \end{aligned} \tag{2}$$

dove θ è l'angolo che forma la verticale col raggio. Dalla seconda delle (2) si ricava

$$R_n = mg\cos\theta + m\frac{v_0^2}{r}.$$

Pertanto, tenuto conto che l'elemento d'arco $ds = rd\theta$, il lavoro elementare della forza d'attrito $F_A = \mu_d R_n$ è dato da:

$$d\mathcal{L}_A = -\mu_d(mgr\cos\theta d\theta + mv_0^2 d\theta).$$

Integrando:

$$\mathcal{L}_A = -\mu_d\left(mgr\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta + mv_0^2\int_0^{\pi/2}d\theta\right) = -\mu_d\left(mgr + mv_0^2\frac{\pi}{2}\right).$$

Sostituendo nella (1),

$$\mathcal{L} = -\mathcal{L}_A - \mathcal{L}_g = \mu_d\left(mgr + mv_0^2\frac{\pi}{2}\right) + mgr = 696\,J$$

Va osservato che tale lavoro può essere ricavato dalla prima delle (2). Più sopra si è detto che la forza applicata al blocchetto dev'essere una forza "intelligente"in quanto va mantenuta costante la velocità. Se, per esempio, agisse una forza di modulo costante, tangente alla traiettoria, la reazione normale dipenderebbe oltre che dall'angolo θ, dalla velocità. In tal caso il calcolo del lavoro diverrebbe piuttosto complesso.

Limitandosi al caso di un corpo puntiforme vincolato ad una guida circolare scabra orizzontale, sul quale agisce una forza F di modulo costante tangente alla guida, l' equazione di Newton è

$$ma = F + F_A + R_n.$$

Come prima, proiettando sulla tangente e sulla normale, si ha

$$ma_t = F - F_A = F - \mu_d R_n, \qquad R_n = m\frac{v^2}{r}.$$

Pertanto:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F - \mu_d m\frac{v^2}{r}, \tag{3}$$

dove s è l'arco di traiettoria. Si osserva anzitutto che, ponendo $a_t = d^2s/dt^2 = 0$, la velocità del corpo tende al valore limite

$$v_L = \sqrt{\frac{Fr}{\mu_d m}}.$$

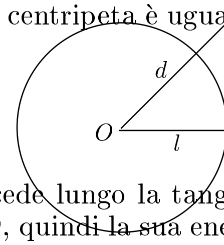
Dunque il lavoro delle forze è pari alla variazione di energia cinetica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv_L^2 - \frac{1}{2}mv_0^2,$$

dove v_0 è la velocità iniziale che, in particolare, può essere nulla. L'espressione della velocità va ricavata integrando la (3) col metodo descritto in T. Papa; Lezioni di Fisica, pagina 247. Essa è data da

$$v = v_L \tanh\frac{Ft}{mv_L}.$$

19. Un corpo puntiforme, vincolato ad un filo di lunghezza l e carico di rottura T_m, ruota attorno ad un punto fisso O, su un piano orizzontale scabro. Ad un certo istante il filo si spezza ed il corpo si arresta ad una distanza d dal centro di rotazione O. Determinare la massa del corpo ($\mu_d = 0,15$, $l = 3\,cm$, $d = 5\,cm$, $T_m = 4,9\,N$).



All'istante della rottura del filo la forza centripeta è uguale al carico di rottura del filo,

$$m\frac{v^2}{l} = T_m. \tag{1}$$

D'altra parte il corpo da quell'istante procede lungo la tangente alla traiettoria, arrestandosi alla distanza D, quindi la sua energia cinetica iniziale è uguale all'energia dissipata per attrito:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mu_d mgD, \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2\mu_d gD, \tag{2}$$

dove

$$D = \sqrt{d^2 - l^2}.$$

Sostituendo la (2) nella (1) si ricava

$$m = \frac{lT_m}{v^2} = \frac{lT_m}{2\mu_d gD} = 1,25\,kg.$$

20. Un corpo di massa $m = 80\,kg$ è agganciato ad un estremo di una corda elastica di lunghezza l_0. ancorata per l'altro estremo ad un punto O fisso. Il corpo cade da un'altezza l_0 al di sopra di O e precipita trattenuto dalla corda. Supponendo che la corda sia di massa trascurabile ed abbia costante elastica $k = \alpha/l_0$, con $\alpha = 4 \cdot 10^4\,N$, determinare la massima tensione.

Dopo che il corpo nella caduta ha percorso la quota $2l_0$ la corda inizia ad allungarsi di Δl. Si ha conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = mgh, \tag{1}$$

dove

$$h = 2l_0 + \Delta l.$$

In corrispondenza all'allungamento massimo $(\Delta l)_{max}$, la velocità del corpo è nulla $v = 0$, quindi la (1) diventa

$$\frac{1}{2}k(\Delta l)^2_{max} = mg[2l_0 + (\Delta l)_{max}] = 2mgl_0 + mg(\Delta l)_{max},$$

ossia

$$k(\Delta l)^2_{max} - 2mg(\Delta l)_{max} - 4mgl_0 = 0,$$

che fornisce:

$$(\Delta l)_{max} = m\frac{g}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 4mg\frac{l_0}{k}}.$$

Scartando il segno negativo e detta τ la tensione, si ottiene

$$\tau_{max} = k(\Delta l)_{max} = mg + \sqrt{(mg)^2 + 4mg\alpha} = 1,2 \cdot 10^4\, N.$$

21. Una piastra oscilla in un piano orizzontale, con moto armonico di ampiezza $A = 2,5\, cm$ e frequenza ν variabile. Sulla piastra viene appoggiato un dischetto e si osserva che che questo inizia a muoversi quando, aumentando la frequenza (molto lentamente) questa raggiunge il valore $\nu = 2\, Hz$. Determinare il coefficiente di attrito statico tra dischetto e piastra.

Nelle condizioni di moto incipiente dev'essere

$$ma = \mu_s mg.$$

Siccome l'accelerazione nel moto armonico è

$$a = -A\omega^2 \sin\omega t,$$

si ha

$$a_{max} = |A\omega^2|, \quad \Rightarrow \quad \mu_s = \frac{A\omega^2}{g} = 0,4.$$

22. Una pallina cade da un'altezza $h = 1\, m$ su un piano inclinato di un angolo $\theta = 20°$ con velocità iniziale nulla. Nell'ipotesi di urto elastico, determinare la distanza in cui avviene il secondo rimbalzo sul piano inclinato.

Fissato un riferimento cartesiano con origine nel punto di impatto della pallina, asse x orientato lungo il piano inclinato nel verso discendente ed asse y ortogonale, le componenti dell'accelerazione lungo tali assi sono

$$\ddot{x} = g\sin\theta \qquad \ddot{y} = -g\cos\theta. \tag{1}$$

Il modulo della velocità con cui incide e viene riflessa la pallina è dato da

$$v_0 = \sqrt{2gh},$$

e poiché gli angoli di incidenza riflessione sono uguali all'angolo θ del piano inclinato ed interessa la traiettoria dopo l'impatto, le (1) vanno integrate con le seguenti condizioni iniziali:

$$\dot{x}_0 = v_0 \sin\theta = \sqrt{2gh}\,\sin\theta, \qquad \dot{y}_0 = v_0\cos\theta = \sqrt{2gh}\,\cos\theta.$$

Si ottiene:
velocità,

$$\dot{x} = (g\sin\theta)t + \sqrt{2gh}\,\sin\theta, \qquad \dot{y} = -(g\cos\theta)t + \sqrt{2gh}\,\cos\theta;$$

equazioni del moto,

$$x = \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2 + (\sqrt{2gh}\,\sin\theta)t, \qquad y = -\frac{1}{2}(g\cos\theta)t^2 + (\sqrt{2gh}\,\cos\theta)t. \tag{2}$$

L'istante in cui si ha il secondo contatto della pallina col piano si ha per $y = 0$; risulta:

$$t_1 = \sqrt{\frac{8h}{g}}.$$

Sostituendo la precedente nella prima delle (2) si ricava l'ascissa cercata:

$$x_1 = \frac{1}{2}(g\sin\theta)\frac{8h}{g} + \sqrt{2gh}\,\sin\theta\sqrt{\frac{8h}{g}} = 8h\sin\theta = 2,74\,m.$$

23. Un corpo puntiforme di massa $m = 50\,kg$ può scorrere lungo una guida orizzontale scabra, soggetto ad una forza $\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$, dove x è l'ascissa rispetto al centro O della forza e $k = 50\,N/m$. Il corpo, inizialmente in quiete ad una distanza $d = 50\,cm$ da O, viene lasciato libero di muoversi, quindi transita per O e si ferma in un punto B. Sapendo che il coefficiente d'attrito dinamico è $\mu_d = 0,01$, determinare il minimo valore del coefficiente d'attrito statico affinché il corpo resti fermo in B.

Il corpo è soggetto alla forza di tipo elastico, alla forza d'attrito, opposta alla velocità, al peso ed alla reazione vincolare. L'equazione della dinamica si scrive:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_A + m\mathbf{g} + \mathbf{R}.$$

La reazione vincolare è opposta al peso; la forza d'attrito, nella fase del moto prevista dal problema è positiva, contraria alla direzione del moto e, per velocità modeste, costante. Pertanto sull'asse del moto si ha

$$m\ddot{x} = -kx + \mu_d mg. \tag{1}$$

Questa equazione è tipica del sistema massa-molla al quale viene applicata anche una forza costante. Il nuovo centro di oscillazione x_0 va determinato ponendo $\ddot{x} = 0$ (accelerazione nulla). Si ha

$$x_0 = \mu_d\frac{mg}{k}. \tag{2}$$

Introducendo la nuova variabile $x' = x - x_0$, la (1) diventa

$$\ddot{x}' = -\frac{k}{m}x',$$

che, come noto, ha soluzione

$$x' = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Vanno ora determinate ampiezza e fase. Derivando:

$$\dot{x}' = -A\omega\sin(\omega t + \varphi),$$

ed imponendo le condizioni iniziali ($t = 0$):

$$x'(0) = A\cos\varphi = d - x_0, \qquad \dot{x}'(0) = -A\omega\sin\varphi = 0.$$

Si ottiene

$$A = d - x_0, \qquad \varphi = 0.$$

Pertanto, passando alla vecchia variabile, le equazione del moto e della velocità sono:

$$x = x_0 + (d - x_0)\cos\omega t, \qquad \dot{x} = -(d - x_0)\omega\sin\omega t. \tag{3}$$

La soluzione trovata è valida finché il corpo raggiunge B; non è valida dopo, sia che il corpo resti fermo a causa dell'attrito statico, sia che si muova nel verso positivo fissato sulla guida. Il corpo raggiunge il punto B con velocità nulla (punto d'inversione del moto); dalla seconda della (3) si ha

$$-(d-x_0)\omega\sin\omega t = 0, \quad \Rightarrow \quad \omega t = 0.$$

Ricordando la (2), la prima delle (3) fornisce l'ascissa del punto B,

$$x_B = x_0 - (d-x_0) = 2\mu_d\frac{mg}{k} - d = -0,3\,m.$$

Affinché il corpo resti fermo in B è necessario che la forza di attrito statico sia maggiore o uguale alla forza elastica:

$$\mu_s mg \geq k|x_B|, \quad \Rightarrow \quad \mu_s \geq \frac{k|x_B|}{mg} = 0,03.$$

24. L'energia potenziale di un punto materiale è data dall'espressione

$$U = 10z - \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

Determinare le superfici equipotenziali, il modulo della forza agente sul punto nella posizione $P \equiv (5;10;10)$ ed il luogo dei punti in cui la forza ha modulo costante.

Le superfici equipotenziali sono

$$10z - \frac{1}{2}(x^2+y^2) = C,$$

dove C è una costante. Le superfici equipotenziali sono paraboloidi di rotazione attorno all'asse z del riferimento.

Le componenti della forza sono date da

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = x; \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = y; \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -10.$$

Il modulo della forza nel punto assegnato risulta:

$$\sqrt{x^2+y^2+100} = 15\,N.$$

Si rammenti che la forza è ortogonale alle superfici equipotenziali. I luoghi dei punti in cui la forza ha modulo costante soddisfano l'equazione:

$$x^2+y^2+100 = cost,$$

cilindri intersezioni con le superfici equipotenziali. Si noti la analogia col problema riguardante un fluido contenuto in un vaso cilindrico, ruotante attorno al suo asse.

25. Un punto materiale di massa m si muove lungo una guida circolare orizzontale di raggio $r = 80\,cm$. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico e la velocità iniziale sono rispettivamente $\mu_d = 0,1$, $v_0 = 1\,m/s$, determinare dopo quanti giri la velocità si dimezza ed il corrispondente modulo dell'accelerazione.

Sul punto agisce la reazione normale al vincolo $R_n = mv^2/r$ e la forza d'attrito $F_A = \mu_d R_n$. Pertanto l'unica equazione atta ad individuare il moto è

$$m\frac{dv}{dt} = -\mu_d m\frac{v^2}{r}. \qquad (1)$$

Per integrare la (1), detto θ l'angolo di rotazione, si ponga

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{v}{r}.$$

Sostituendo al primo membro della (1) si ottiene:

$$\frac{dv}{d\theta} = -\mu_d\, v.$$

Separando le variabili:

$$\frac{dv}{v} = -\mu_d d\theta.$$

Integrando:

$$\ln v = -\mu_d\theta + C,$$

dove C è una costante che, in base alle condizioni iniziali $\theta = 0$, $v = v_0$, risulta $\ln v_0$. Pertanto la precedente diventa

$$\ln v = -\mu_d\theta + \ln v_0, \quad \Rightarrow \quad v = v_0 e^{-\mu_d\theta}. \tag{2}$$

Ponendo $v = v_0/2$ nella (2), l'angolo θ^* per il quale la velocità si dimezza risulta

$$\ln 2 = \mu_d\theta^*, \quad \Rightarrow \quad \theta^* = \frac{\ln 2}{\mu_d}.$$

Il numero di giri è

$$2\pi n = \frac{\ln 2}{\mu_d}, \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln 2}{2\pi\mu_d} = 1,1\, giri.$$

Il modulo dell'accelerazione è

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{\mu_d^2 + 1},$$

che per $v = v_0/2$ risulta:

$$a = \frac{v_0^2}{4r}\sqrt{\mu_d^2 + 1} = 0,31\, m/s^2.$$

26. Un corpo puntiforme è appoggiato sulla falda interna di un cono circolare che ruota attorno al suo asse, disposto verticalmente, con velocità angolare ω costante. Detta r la distanza del corpo dall'asse e θ la semiapertura del cono, si determini il valore del coefficiente di attrito statico necessario perché il corpo sia in equilibrio.

Nel riferimento ruotante si ha equilibrio relativo delle forze reali e di trascinamento:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_t = 0. \tag{1}$$

Le forze reali comprendono la forza peso, la reazione normale $\mathbf{R}_n$, ortogonale alla falda del cono, e la forza d'attrito $\mathbf{F}_A$. Pertanto la (1) si scrive,

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_n + \mathbf{F}_A + m\omega^2\mathbf{r} = 0. \tag{2}$$

Proiettando la (2) su una generatrice del cono, assumendo positivo il verso ascendente, e sulla normale, assumendo positivo il verso di $\mathbf{R}_n$, si ha

$$\begin{aligned} &- mg\cos\theta + F_A + m\omega^2 r\sin\theta = 0\\ &- mg\sin\theta + R_n - m\omega^2 r\cos\theta = 0. \end{aligned}$$

Si ricava:

$$F_A = mg\cos\theta - m\omega^2 r\sin\theta$$
$$R_n = mg\sin\theta + m\omega^2 r\cos\theta. \tag{2}$$

Poiché per l'equilibrio,

$$F_A \le \mu_s R_n, \quad \Rightarrow \quad \mu_s \ge \frac{F_A}{R_n},$$

per le (2) si ottiene:

$$\mu_s \ge \frac{g\cos\theta - \omega^2 r\sin\theta}{g\sin\theta + \omega^2 r\cos\theta}. \tag{3}$$

Naturalmente questa relazione pone restrizioni sulla velocità angolare e sull'angolo di semiapertura del cono, in quanto il numeratore dev'essere positivo:

$$g\cos\theta - \omega^2 r\sin\theta > 0.$$

Se fosse $\mu_s = 0$,

$$g\cos\theta = \omega^2 r\sin\theta, \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{g}{r\tan\theta}.$$

Per l'equilibrio, assegnato l'angolo θ, si avrebbe un preciso valore di ω.

Lo stesso risultato si ottiene nel riferimento fisso. In tal caso si ha

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_n + \mathbf{F}_A,$$

dove $\mathbf{a}$ è l'accelerazione centripeta. Proiettando secondo una generatrice del cono e la sua normale, con la stessa convenzione per i segni, si ha

$$-m\omega^2 r\sin\theta = F_A - mg\cos\theta$$
$$m\omega^2 r\cos\theta = -mg\sin\theta + R_n.$$

Procedendo come prima, si ottiene la (3).

27. Un blocchetto di massa $1\,kg$ è appoggiato su un piano inclinato scabro, che forma un angolo $\theta = 60°$ con l'orizzontale. Il blocchetto è agganciato ad una molla di costante elastica $k = 20\,N/m$, fissata con un supporto alla sommità del piano. Sapendo che $\mu_d = 0,366$, calcolare il massimo allungamento della molla una volta lasciato libero il blocchetto con la molla non deformata.

Questo problema può essere risolto col teorema dell'energia cinetica. Negli stati iniziale e finale l'energia cinetica è nulla, pertanto la somma dei lavori delle forze agenti è pari a zero. Detto $(\Delta l)_m$ l'allungamento massimo della molla e assunto positivo il verso discendente del piano, si ha

$$-\frac{1}{2}k(\Delta l)_m^2 + mg\sin\theta(\Delta l)_m - \mu_d mg\cos\theta(\Delta l)_m = 0.$$

Si ricava:

$$(\Delta l)_m = \frac{2mg}{k}(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) = 0,67\,m.$$

28. Un corpo di massa m è agganciato all'estremità di una molla ideale di costante elastica k, fissata al soffitto di un ascensore. Quando l'ascensore è fermo, il corpo è in equilibrio con la molla allungata di x_0 rispetto alla sua lunghezza a riposo. Ad un certo istante l'ascensore si pone in moto con accelerazione a costante. Determinare modulo e verso di a, sapendo che un osservatore solidale con l'ascensore misura un allungamento massimo della molla $x_m = 2x_0$.

Fissato un asse di riferimento con origine nel punto in cui la molla è a riposo, se l'ascensore è fermo l'allungamento della molla x_0 è dato ponendo $\ddot{x} = 0$ nell'equazione

$$m\ddot{x} = -kx + mg, \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{mg}{k}.$$

Il corpo si trova in equilibrio ($v = 0$) in tale posizione. Quando l'ascensore accelera l'equazione della dinamica, nel riferimento dell'ascensore, si scrive:

$$m\ddot{x} = F + F_t,$$

dove F è la somma delle forze reali ed $F_t = \pm a_t$ la forza di trascinamento. Pertanto:

$$m\ddot{x} = -kx + m(g \pm a_t).$$

Le oscillazioni del corpo avvengono ($\ddot{x} = 0$) attorno al nuovo centro di oscillazione

$$x_1 = \frac{m(g \pm a_t)}{k}.$$

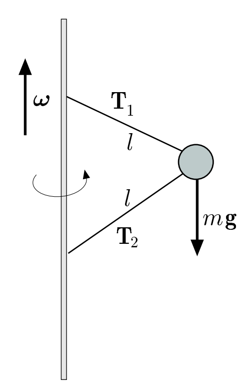
Ma l'osservatore registra un'ampiezza massima di oscillazione $2x_0$, quindi il corpo oscilla tra i punti di coordinate x_0 e $2x_0$ (in x_0 il corpo è inizialmente fermo). È chiaro inoltre che essendo $2x_0$ l'ampiezza massima, l'accelerazione di trascinamento è rivolta in alto. Quindi l'ampiezza dell'oscillazione risulta:

$$A = \frac{2x_0 - x_0}{2} = \frac{x_0}{2}.$$

Pertanto:

$$x_1 = x_0 + \frac{x_0}{2} = \frac{m(g + a_t)}{k}, \quad \Rightarrow \quad a_t = \frac{g}{2}.$$

29. Una sfera di massa $m = 1\,kg$ è collegata ad un'asta rigida verticale mediante due fili ideali, aventi la stessa lunghezza $l = 2\,m$. I fili sono fissati all'asta in due punti distanti l, in modo da formare un triangolo equilatero, vedi figura. Posta in rotazione l'asta con velocità angolare costante, determinare il minimo valore di ω per cui entrambi il fili risultano tesi e il valore delle tensioni che si sono destate.



Nel riferimento ruotante, si ha equilibrio delle forze reali e dalla forza di trascinamento,

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_t = 0.$$

La somma delle forze reali $\mathbf{F}$ comprende: le tensioni dei fili e la forza peso; $\mathbf{F}_t$ è la forza centrifuga, pertanto:

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + m\mathbf{g} + m\omega^2\mathbf{r} = 0. \tag{1}$$

Giacché i fili formano col segmento d'asta un triangolo equilatero, proiettando la (1) sugli assi x, orizzontale ed y verticale, si ha

$$\begin{aligned} -T_1\cos 30° - T_2\cos 30° + m\omega^2 r &= 0 \\ T_1\cos 60° - T_2\cos 60° - mg &= 0. \end{aligned}$$

Essendo:

$$r = l\cos 30° = l\frac{\sqrt{3}}{2},$$

dalla prima si trae,

$$m\omega^2 l = T_1 + T_2. \tag{2}$$

Dalla seconda:

$$T_1 - T_2 = 2mg. \tag{3}$$

Tenuto conto della (3), dalla (2) si deduce:

$$\omega^2 = \frac{2mg + 2T_2}{ml}.$$

Ma $T_2 \geq 0$, quindi il minimo valore di ω si ha per $T_2 = 0$;

$$\omega^2 = \frac{2g}{l}, \quad \Rightarrow \quad \omega = 3,1\, rad/s.$$

In tali condizioni la tensione T_1 risulta:

$$T_1 = 2mg = 19,6\, N.$$

30. Due masse $m_1 = 1,67\, kg$ e $m_2 = 3,33\, kg$, fissate agli estremi di un filo ideale, scivolano lungo un piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$. Sapendo che i coefficienti di attrito dinamico tra masse e piano sono rispettivamente $\mu_1 = 0,225$ e $\mu_2 = 0,113$, calcolare l'accelerazione del sistema e la tensione del filo.

Va osservato che, dai dati del problema, le forze d'attrito $\mu_1 m_1 g \cos\theta$ e $\mu_2 m_2 g \cos\theta$ sono uguali, pertanto durante il moto, il filo rimane teso e le masse si muovono con la stessa accelerazione. Inoltre il modulo della tensione T si trasmette inalterato lungo il filo.

Indicando con m_1 la massa più in alto e con m_2 quella in basso, l'equazione di Newton per dette masse si scrive:

$$\begin{aligned} m_1 g \sin\theta + T - \mu_1 m_1 g \cos\theta &= m_1 a \\ m_2 g \sin\theta - T - \mu_2 m_2 g \cos\theta &= m_2 a. \end{aligned} \tag{2}$$

Risolvendo rispetto a T, si ha

$$m_1 a - m_1 g \sin\theta + \mu_1 m_1 g \cos\theta = m_2 g \sin\theta - \mu_2 m_2 g \cos\theta - m_2 a,$$

da cui:

$$a = g \sin\theta - 2\frac{\mu_1 m_1 \cos\theta}{m_1 + m_2} g = 0,37\, g.$$

La tensione va ricavata da una delle (2); per esempio:

$$T = m_1 g(0,37 + \mu_1 \cos\theta - \sin\theta) = 1,06\, N.$$

31. Un corpo puntiforme di massa m è saldato ad una estremità di un'asta rigida di massa trascurabile, che ruota in un piano verticale attorno all'altro estremo con velocità angolare costante. Nel punto più basso della traiettoria l'asta esercita sul corpo una reazione $R_B = 12\, N$ mentre, se la velocità angolare raddoppia, la reazione diventa $R'_B = 21\, N$. Determinare le reazioni R_A ed R'_A nel punto più alto della traiettoria.

L'equazione della dinamica si scrive,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{R} + m\mathbf{g}.$$

Assumendo positivo il verso centripeto e detto r il raggio della traiettoria, nel punto più basso si ha:

$$\begin{aligned} m\omega^2 r &= R_B - mg \\ 4m\omega^2 r &= R'_B - mg \end{aligned} \tag{1}$$

Alla sommità,

$$\begin{aligned} m\omega^2 r &= R_A + mg \\ 4m\omega^2 r &= R'_A + mg. \end{aligned} \qquad (2)$$

Dalle (1) si ricavano le espressioni di mg e di $m\omega^2 r$; si ha:

$$mg = \frac{4R_B - R'_B}{3}, \qquad m\omega^2 r = \frac{R'_B - R_B}{3}.$$

Sostituendo nelle (2) si ottiene:

$$R_A = \frac{2R'_B - 5R_B}{3} = -6\,N, \qquad R'_A = \frac{5R'_B - 8R_B}{3} = 3\,N.$$

32. Un corpo puntiforme si muove lungo un asse orizzontale, con velocità costante $v_1 = 2\,m/s$. In seguito ad un impulso $J = 10\,N \cdot s$ esso assume la velocità $v_2 = 10\,m/s$, nella stessa direzione della velocità iniziale. Calcolare il lavoro della forza impulsiva.

Dal teorema dell'energia cinetica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Poiché,

$$J = m(v_2 - v_1) = \Delta p,$$

si ha:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}m(v_2 - v_1)(v_2 + v_1) = \frac{1}{2}J\,(v_1 + v_2) = 60\,J.$$