Esercizi sulla Dinamica dei Corpi Rigidi
A cura del Prof. T.Papa

1. Una palla da biliardo di raggio R è in quiete sul piano del tavolo da giuoco. Ad essa viene impresso un impulso centrale che la fa muovere con velocità iniziale v_0. Si calcoli la velocità angolare della palla nell'istante in cui il suo moto diventa di puro rotolamento. ($v_0 = 0,5\,m/s$, $R = 5\,cm$, $I = 2mR^2/5$).

Il piano del tavolo presenta attrito, quindi la velocità decresce secondo la legge:

$$v = v_0 - \mu g t. \tag{1}$$

Dalla seconda equazione cardinale della dinamica si ha

$$M = \mu g R = I\frac{d\omega}{dt}, \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu g R}{I} = \frac{5\mu g}{2R}.$$

Integrando:

$$\omega = \frac{5\mu g}{2R}t. \tag{2}$$

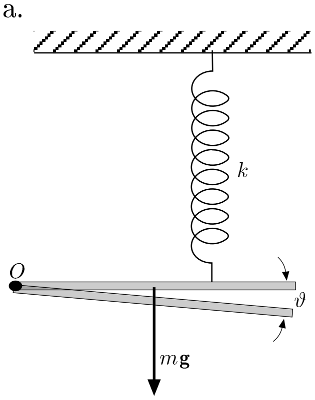
Nell'istante t^* in cui si ha puro rotolamento:

$$v(t^*) = R\omega(t^*).$$

Dunque, combinando le (1) e (2):

$$t^* = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu g}, \qquad \omega(t^*) = \frac{5}{7}\frac{v_0}{R} = 7,14\,rad/s.$$

2. Una sbarretta omogenea di massa $m = 300\,gm$ e lunghezza l è incernierata, senza attrito, ad un estremo O ed è mantenuta in posizione di equilibrio orizzontale da una molla ideale, ad asse verticale, di costante elastica $k = 10^3\,N/m$, agganciata alla sbarretta nel punto distante $2l/3$ dall'estremo O. Si determini il periodo delle piccole oscillazioni verticali della sbarretta.



Supponendo che la molla all'equilibrio sia allungata di Δy, per l'uguaglianza dei momenti delle forze rispetto ad O, si ha

$$mg\frac{l}{2} = \frac{2}{3}lk\Delta y, \quad \Rightarrow \quad k\Delta y = \frac{3}{4}mg. \tag{1}$$

Impartendo un piccolo spostamento verticale y, il sistema inizia ad oscillare. Dalla seconda equazione cardinale dei sistemi rigidi si ha:

$$mg\frac{l}{2} - \frac{2}{3}l\,k(\Delta y + y) = I\frac{d\omega}{dt}.$$

Tenuto conto della (1), si ha

$$-\frac{2}{3}l\,k\,y = I\frac{d\omega}{dt}. \tag{2}$$

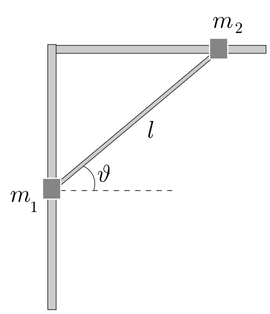
Ma detto θ l'angolo formato dalla sbarretta con l'orizzontale, per piccoli spostamenti verticali si può scrivere $y \approx 2l\theta/3$ ed $\omega = d\theta/dt$. Ricordando inoltre che il momento d'inerzia della sbarretta rispetto all'estremo è $I = ml^2/3$, la (2) diventa,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{4}{3}\frac{k}{m}\theta = 0.$$

Il periodo risulta

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4}\frac{m}{k}} \approx 0,09\,s.$$

3. Un sistema articolato è costituito da due masse m_1 ed m_2 uguali che possono scorrere senza attrito su due guide disposte ad angolo retto, una verticale e l'altra orizzontale. Le due masse sono incernierate ad un'asta di lunghezza l, anch'essa di massa uguale alle altre, in modo che possano scorrere liberamente sulle guide. Inizialmente il sistema è in quiete con l'asta inclinata di un angolo θ_0 rispetto all'orizzontale. Lasciato il sistema libero di muoversi, determinare la velocità delle due masse quando l'asta raggiunge la posizione verticale.



Le reazioni vincolari, ortogonali alle guide non compiono lavoro quindi va applicato il teorema di conservazione dell'energia. La massa m_2, scorrendo sulla guida orizzontale ha energia potenziale costante. Posta uguale a zero l'energia potenziale nella configurazione verticale e detto θ l'angolo che durante il moto l'asta forma con l'orizzontale, l'energia potenziale del sistema è somma dell'energia potenziale di m_1 e dell'asta. La prima è

$$U_1 = mgl(1 - \sin\theta),$$

la seconda,

$$U_a = mg\frac{l}{2}(1 - \sin\theta).$$

Sommando si ha:

$$U = U_1 + U_a = \frac{3}{2}mgl(1 - \sin\theta).$$

Durante il moto, l'energia cinetica del sistema è data dalla somma dell'energia cinetica dell'asta, che ruota attorno al centro istantaneo di rotazione, e dell'energia cinetica delle masse m_1 ed m_2.

Il centro istantaneo di rotazione Q si trova all'intersezione delle normali alle guide condotte dagli estremi dell'asta, alla distanza $l/2$ dal suo baricentro. Dunque l'energia cinetica dell'asta risulta

$$T_a = \frac{1}{2}I_Q\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\omega^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2.$$

Le masse m_1 ed m_2 hanno rispettivamente velocità:

$$v_1 = \omega l\cos\theta, \qquad v_2 = \omega l\sin\theta; \tag{1}$$

quindi energie cinetiche:

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \cos^2\theta; \qquad T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2\theta.$$

Per la conservazione dell'energia si ha:

$$T_a + T_1 + T_2 + \frac{3}{2}mgl(1-\sin\theta) = \frac{3}{2}mgl(1-\sin\theta_0),$$

ossia:

$$\frac{1}{6}m\omega^2 l^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 l^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2\theta = \frac{3}{2}mgl(\sin\theta - \sin\theta_0),$$

da cui si ricava:

$$\omega^2 = \frac{9}{4}\frac{g}{l}(\sin\theta - \sin\theta_0). \tag{2}$$

Ma la velocità del baricentro dell'asta è

$$v_C = \omega l/2, \qquad \omega = \frac{2}{l}v_C, \tag{3}$$

quindi sostituendo nella (2):

$$v_C^2 = \frac{9}{16}gl(\sin\theta - \sin\theta_0), \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{\frac{9}{16}gl(\sin\theta - \sin\theta_0)}.$$

quando l'asta è verticale $\sin\theta = 1$, si ha

$$v_C = \sqrt{\frac{9}{16}gl(1 - \sin\theta_0)}.$$

Infine, tenuto conto delle (1) e (3), le velocità delle masse risultano:

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = 2v_C = \sqrt{\frac{9}{4}gl(1-\sin\theta_0)}.$$

Va osservato che il sistema oscilla: m_1 ed asta sulla guida verticale, m_2 su quella orizzzontale. Dalla (2), essendo $\omega = \dot{\theta}$, si ha

$$\dot{\theta}^2 = \frac{9}{4}\frac{g}{l}(\sin\theta - \sin\theta_0), \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{9}{4}\frac{g}{l}(\sin\theta - \sin\theta_0)}.$$

Separando le variabili:

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta - \sin\theta_0}} = \sqrt{\frac{9}{4}\frac{g}{l}}\ dt.$$

Questa equazione è simile a quella delle grandi oscillazioni del pendolo semplice; essa va integrata col metodo indicato in T. Papa; Lezioni di Fisica, Meccanica, pagina 241.

4. Un'asta omogenea di massa $m = 0,5\,kg$ e lunghezza $l = 1\,m$ reca agli estremi due masse puntiformi $m_1 = 0,2\,kg$ ed $m_2 = 0,3\,kg$. L'asta è posta in rotazione con velocità angolare ω_0 costante, attorno ad un asse ad essa ortogonale, passante per un punto a distanza x da m_1. L'unica sollecitazione alla quale è soggetta l'asta consiste in una coppia frenante di momento costante. Determinare il valore di x affinché si fermi nel minor tempo possibile.

Detto $-M$ il momento della coppia frenante, dalla seconda equazione della dinamica dei corpi rigidi si ha,

$$-M = I\frac{d\omega}{dt},$$

dove I è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse x. Integrando:

$$\omega = \omega_0 - \frac{M}{I}t.$$

Il tempo di arresto t_A si ottiene per $\omega = 0$, quindi,

$$t_A = \frac{I\omega_0}{M}.$$

Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse x è dato da:

$$I = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 + m_1 x^2 + m_2(l-x)^2.$$

Perché l'asta si fermi nel minor tempo possibile, tale momento d'inerzia dev'essere minimo:

$$\frac{dI}{dx} = 0, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{l(2m_2 + m)}{2(m + m_1 + m_2)} = 0,55\,m.$$

Infatti,

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2(m + m_1 + m_2) > 0.$$

5. Una sbarretta omogenea di lunghezza $l = 60\,cm$, soggetta alla gravità, può oscillare attorno ad un asse orizzontale passante per un punto P, posto tra il centro O della sbarretta ed il suo estremo superiore. Determinare la distanza $x = OP$ per la quale il periodo delle piccole oscillazioni è minimo.

Come noto, il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo composto è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_P}{mgx}},$$

dove

$$I_P = I_O + mx^2 = \frac{1}{12}ml^2 + mx^2.$$

Pertanto,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2}{12gx} + \frac{x}{g}}. \tag{1}$$

Il valore minimo del periodo si ha annullando la derivata prima della (1) rispetto ad x;

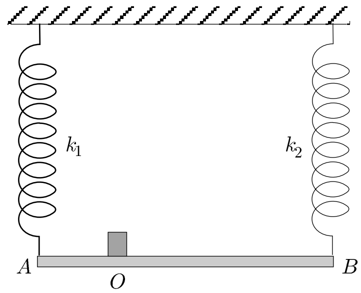
$$\frac{dT}{dx} = 0, \quad \Rightarrow \quad x_{min} = \sqrt{\frac{l^2}{12}} = 17,3\,cm,$$

cui corrisponde:

$$T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\frac{\sqrt{3}}{3}} = 1,18\,s.$$

6. Una sbarra omogenea AB di sezione costante, lunghezza $l = 34\,cm$ e massa $m = 250\,gm$ è sospesa ad un soffitto per mezzo di due molle ideali verticali, di uguale lunghezza a riposo e costanti elastiche $k_1 = 50\,N/m$ e $k_2 = 13\,N/m$, poste agli estremi A e B. Allo scopo di disporre la sbarra in equilibrio orizzontale, viene fissato ad essa un corpo puntiforme di massa $m_1 = 750\,gm$ in un punto O compreso tra gli estremi. Determinare:
a) la distanza di tale punto dall'estremo A;

b) la frequenza delle piccole oscillazioni quando il sistema viene spostato verticalmente dalla posizione di equilibrio.



A causa delle masse sospese, le molle vengono allungate di una quantità y_0 rispetto alla loro lunghezza a riposo; si ha:

$$(k_1 + k_2)y_0 = (m + m_1)g, \qquad \Rightarrow \qquad y_0 = \frac{m + m_1}{k_1 + k_2} g = 0,15\, m. \tag{1}$$

Detta x la distanza OA, l'equilibrio dei momenti delle forze applicate rispetto ad A, fornisce:

$$m_1 g x + mg\frac{l}{2} - k_2 y_0 l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{m_1 g}\left(k_2 y_0 l - mg\frac{l}{2}\right) = 3,3\, cm.$$

La frequenza delle piccole oscillazioni va ricavata considerando l'equazione della dinamica del sistema. Detto y lo spostamento rispetto ad y_0, si ha:

$$(m + m_1)\ddot{y} = (m + m_1)g - (k_1 + k_2)(y_0 + y),$$

e sostituendo a y_0 la (1),

$$(m + m_1)\ddot{y} + (k_1 + k_2)y = 0.$$

Si ricava.

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m + m_1}} = 1,26\, s^{-1}.$$

7. Un'asta omogenea di sezione costante, lunghezza l e massa m, oscilla attorno ad un asse orizzontale fisso, passante per un suo estremo. Determinare l'espressione della reazione vincolare esercitata dall'asse.

Le forze applicate all'asta sono il peso e la reazione vincolare. Come sempre vanno considerate le equazioni cardinali della dinamica dei corpi rigidi:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}, \qquad \mathbf{M} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt},$$

dove $\mathbf{R}$ è la reazione vincolare, $\mathbf{M}$ il momento risultante delle forze ed I il momento d'inerzia della sbarra rispetto all'asse di rotazione.

Dalla prima, assumendo positive la rotazione antioraria e la direzione centripeta, si ha:

$$ma_t = -mg\sin\theta + R_t, \qquad ma_n = -mg\cos\theta + R_n.$$

Dalla seconda:

$$-mg\frac{l}{2}\sin\theta = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{a_t}{l/2}.$$

Poiché il momento d'inerzia rispetto all'asse di oscillazione è $I = ml^2/3$, si ha

$$a_t = -\frac{3}{4}g\sin\theta.$$

Pertanto:
$$R_t = \frac{1}{4} mg\sin\theta, \qquad R_n = mg\cos\theta + \frac{1}{2} ml\omega^2.$$

8. Una sbarretta omogenea di massa m, sezione costante e lunghezza $l = 1,2\,m$ può ruotare in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale, privo d'attrito, passante ad una distanza $l/4$ da un suo estremo. Assegnata la velocità angolare massima $\omega_{max} = 8\,rad/s$, si determini il valore minimo della velocità del centro di massa durante il moto.

La velocità angolare massima si ha nel punto più basso della traiettoria, dove l'energia potenziale si assume nulla, mentre la velocità angolare minima si ha nel punto più alto dove l'energia potenziale è massima, pertanto
$$\frac{1}{2} I\omega_{max}^2 = mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2} I\omega_{min}^2.$$
Essendo
$$I = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{16} ml^2 = \frac{7}{48} ml^2\,,$$
si ottiene:
$$\omega_{min} = \sqrt{\omega_{max}^2 - \frac{48}{7}\frac{g}{l}} = 2,83\,rad/s; \qquad v_C = \omega_{min}\frac{l}{4} = 0,85\,m/s.$$

9. Un'asta omogenea di sezione costante, lunghezza l e massa M è adagiata, senza altri vincoli, su un piano orizzontale privo di attrito. Inizialmente l'asta è in quiete; quindi viene urtata elasticamente da una pallina di massa m, animata di velocità $\mathbf{v}_0$ ortogonale all'asta, in un punto distante d dal suo centro. Determinare l'espressione di m affinché dopo l'urto la pallina si arresti.

Si ha conservazione della quantità di moto, del momento angolare e dell'energia cinetica:
$$mv_0 = Mv_C, \qquad mv_0 d = I\omega, \qquad \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2} I\omega^2, \tag{1}$$
essendo v_C ed I rispettivamente la velocità del centro di massa e il momento d'inerzia dell'asta rispetto a quest'ultimo, avendo tenuto conto che l'asta, dopo l'urto, assume un movimento rototraslatorio.

Tenendo presente la prima e la seconda delle (1), la terza diventa:
$$mv_0^2 = \frac{m^2v_0^2}{M} + \frac{m^2v_0^2d^2}{I}, \quad \Rightarrow \quad m\left(\frac{1}{M} + \frac{d^2}{I}\right) = 1,$$
ed, introducendo il momento d'inerzia della asta $I = Ml^2/12$, si ottiene:
$$m = \frac{Ml^2}{l^2 + 12d^2}.$$

10. Un disco omogeneo di masssa $M = 4\,kg$ e raggio R è libero di ruotare senza attrito attorno al suo asse, disposto orizzontalmente. Lungo il suo bordo è avvolto, in modo che non possa slittare, un filo ideale alla cui estremità è fissata una massa $m = 2\,kg$. All'istante iniziale il disco è fermo; quindi viene lasciato libero e la massa m comincia scendere mettendo in moto il disco. Determinare l'energia cinetica del disco all'istante $t = 2\,s$.

Detta T l'energia cinetica del disco, per la conservazione dell'energia, si ha
$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + T = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2. \tag{1}$$

Dalle equazioni cardinali della dinamica,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C, \qquad \mathbf{M} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt},$$

detta τ la tensione del filo e proiettando su un asse verticale volto in basso, si ha

$$mg - \tau = ma_C, \qquad \tau R = I\frac{d\omega}{dt}. \tag{2}$$

Poiché il filo non slitta $a_C\dot{\omega}R$; quindi la seconda delle (2) fornisce:

$$\tau = I\frac{a_C}{R^2}.$$

Sostituendo nella prima:

$$mg - I\frac{a_C}{R^2} = ma_C, \quad \Rightarrow \quad a_C = \frac{mg}{m + I/R^2} = \frac{mg}{m + M/2}. \tag{3}$$

Il moto della massa è uniformemente accelerato, dunque la quota h di cui scende e la velocità acquistata sono

$$h = \frac{1}{2}a_C t^2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{m + M/2}t^2, \qquad v = a_C t, \tag{4}$$

pertanto, tenuto conto delle (3) e (4), dalla (1) si ottiene:

$$\begin{aligned} T &= mgh - \frac{1}{2}mv^2 = mg\frac{1}{2}\frac{mg}{m + M/2}t^2 - \frac{1}{2}m\left(\frac{mg}{m + M/2}\right)^2 t^2 \\ &= \frac{M}{4}\left(\frac{mg}{m + M/2}\right)^2 t^2 = 96\,J \end{aligned}$$

In alternativa, la prima delle (3) si può scrivere

$$mg - I\frac{\dot{\omega}R}{R^2} = m\dot{\omega}R, \quad \Rightarrow \quad mgR = \dot{\omega}(mR^2 + I),$$

da cui:

$$\dot{\omega} = \frac{mgR}{mR^2 + I}.$$

Integrando,

$$\omega = \frac{mgR}{mR^2 + I}\,t = \frac{mg}{mR + MR/2}\,t.$$

Pertanto l'energia cinetica del disco risulta:

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{M}{4}\frac{m^2g^2}{(m + M/2)^2}\,t^2 = 96\,J.$$

11. Una matita di lunghezza $l = 15\,cm$, viene appoggiata in posizione verticale su un piano con attrito. Essa, inizialmente ferma, cade ruotando attorno al punto di contatto col piano. Ricavare velocità ed accelerazione angolare nell'istante dell'impatto col piano.

Per la conservazione dell'energia, detta m la massa della matita, si ha:

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2, \tag{1}$$

dove I è il momento d'inerzia della matita rispetto all'estremo poggiato sul piano, pari a $ml^2/3$.

Dalla (1) si ottiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 14\, rad/s.$$

Per la seconda equazione della dinamica dei sistemi rigidi,

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt},$$

al momento dell'impatto, si ha:

$$-mg\frac{l}{2} = I\dot{\omega}, \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = -\frac{3}{2}\frac{g}{l} = -98\, rad/s^2.$$

12. Sul bordo di una piattaforma circolare di raggio r che può ruotare senza attrito attorno al suo asse verticale, è fissato un dispositivo di massa M, munito di una molla ideale di costante k, atto a lanciare un corpo di massa m lungo una traiettoria tangente alla piattaforma. Determinare la velocità angolare della piattaforma dopo il lancio del corpo, supponendo che inizialmente il sistema sia in quiete e che la molla sia stata compressa di un tratto Δl. ($r = 50\, cm$; $M = 1\, kg$; $m = 200\, gm$; $k = 100\, N/m$; $\Delta l = 20\, cm$; momento d'inerzia della piattaforma $I = 0,75\, kg \cdot m^2$)

Per la conservazione dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(I + Mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2; \tag{1}$$

per la conservazione del momento angolare, detta v la velocità del corpo, si ha:

$$mvr - (I + Mr^2)\omega = 0,$$

da cui si ricava:

$$v = \frac{(I + Mr^2)\,\omega}{mr}.$$

Sostituendo nella (1) si ottiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{kmr^2(\Delta l)^2}{(I + Mr^2)^2 + mr^2(I + Mr^2)}} = 0,44\, rad/s.$$

13. Un disco omogeneo di massa m e raggio R viene fatto rotolare lungo un piano inclinato. Determinare l'angolo massimo θ di inclinazione, oltre il quale il moto non è più di puro rotolamento sapendo che $\mu_s = 0,5$.

Come sempre, il problema va risolto mediante le equazioni cardinali della dinamica dei corpi rigidi,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C; \qquad \mathbf{M} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \tag{1}$$

dove $\mathbf{F}$ è la somma delle forze agenti, peso, forza d'attrito e reazione normale, $\mathbf{M}$ la somma dei momenti di tali forze, $I = mR^2/2$ il momento d'inerzia del disco rispetto al suo asse. Nel caso di puro rotolamento, detta $\mathbf{F}_A$ la forza d'attrito, proiettando la prima delle (1) lungo il piano inclinato, nel verso discendente, si ha:

$$mg\sin\theta - F_A = ma_C; \tag{2}$$

Inoltre, assunti i momenti delle forze rispetto all'asse del disco, la seconda delle (1) fornisce,

$$F_A\,R = I\dot{\omega}.$$

Poiché $a_C = \dot{\omega}R$, quest'ultima diventa:

$$F_A\,R = I\frac{a_C}{R}, \quad \Rightarrow \quad F_A = I\frac{a_C}{R^2},$$

e sostituendo nella (2) si trova:

$$a_C = \frac{mg\sin\theta}{m + I/R^2} = \frac{2}{3}g\sin\theta.$$

Quindi la forza d'attrito vale:

$$F_A = I\frac{a_C}{R^2} = \frac{1}{3}mg\sin\theta.$$

Ma per il puro rotolamento deve essere,

$$F_A \le \mu_s R_n, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}mg\sin\theta \le \mu_s mg\cos\theta.$$

Pertanto,

$$\tan\theta \le 3\mu_s \quad \Rightarrow \quad \theta = 56,3^\circ.$$

14. Un corpo puntiforme di massa m percorre, su un piano orizzontale scabro, una traiettoria circolare di raggio R con velocità angolare iniziale ω_0. Calcolare il numero di giri n che compie prima di arrestarsi, sapendo che una sbarra omogenea di sezione costante, lunghezza $2R$ e massa m uguale, animata della stessa velocità angolare iniziale, ruotando sullo stesso piano intorno al proprio asse baricentrale, si arresta dopo un giro. Assumere che il coefficienete d'attrito dinamico per il corpo e la sbarra sia lo stesso.

Supponendo che sulla sbarra agisca un momento frenate M costante, dovuto alla forza d'attrito μmg, il lavoro dissipato è dato da

$$\mathcal{L}_s = M\theta_1 = \mu\, m\, g\frac{R}{2}\theta_1.$$

Tale lavoro è pari all'energia cinetica iniziale:

$$\mu\, m\, g\frac{R}{2}\theta_1 = \frac{1}{2}I\omega_0^2, \tag{1}$$

dove $I = m(2R)^2/12$ è il momento d'inerzia della sbarra rispetto all'asse di rotazione.

Dalla (1) si trae:

$$\mu\, g\,\theta_1 = \frac{1}{3}R\omega_0^2. \tag{2}$$

Il lavoro dissipato dal corpo risulta

$$\mathcal{L}_c = \mu\, m\, g\, R\,\theta_2,$$

uguale all'energia cinetica iniziale del corpo;

$$\mu\, m\, g\, R\theta_2 = \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2, \quad \Rightarrow \quad \mu\, g\,\theta_2 = \frac{1}{2}R\omega_0^2. \tag{3}$$

Dalle (2) e (3) si ricava:

$$\theta_1 = \frac{1}{3}\frac{R}{\mu g}\omega_0^2, \qquad \theta_2 = \frac{1}{2}\frac{R}{\mu g}\omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{3}{2},$$

ed essendo $\theta_1 = 2\pi$,

$$\theta_2 = 3\pi, \quad \Rightarrow \quad n = 1,5\, giri.$$

15. Una sbarra omogenea di sezione costante ed un corpo puntiforme, di masse $m_1 = m_2 = 1\,kg$, sono adagiati senza altri vincoli, su un piano orizzontale liscio. Una molla di costante elastica $k = 5 \cdot 10^4\, N/m$, compressa di $\Delta x = 7\,cm$, è disposta ortogonalmente tra un estremo della sbarra ed il corpo. Trovare la velocità v del corpo dopo che la molla viene sbloccata.

Dopo il rilascio della molla, il moto della sbarra è rototraslatorio mentre il moto del corpo è rettilineo. Detta v_C la velocità del centro di massa della sbarra, si ha conservazione dell'energia,

$$\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_1 v_C^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2, \tag{1}$$

della quantità di moto,

$$m_1 v_C = m_2 v, \tag{2}$$

e del momento angolare:

$$I\omega = \frac{l}{2}m_2 v, \tag{3}$$

dove l è la lunghezza della sbarra.

Tenuto conto che $m_1 = m_2$, dalle (2) e (3) si ha:

$$v = v_C, \qquad \omega = \frac{1}{2}\frac{l}{I}mv.$$

Ricordando che il momento d'inerzia della sbarra rispetto al baricentro è $I = ml^2/12$ e sostituendo nella (1) si ricava:

$$k(\Delta x)^2 = 3mv^2 + 2mv^2 = 5mv^2, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{k(\Delta x)^2}{5m}} = 7\,m/s.$$

16. Un carrello, costituito da un telaio di massa M, e da quattro ruote, assimilabili a dischi di raggio R e massa $m = M/16$ ognuno, viene lanciato con velocità iniziale $v_0 = 7\,m/s$ lungo una rotaia che ha la pendenza del 15%. Determinare il tratto percorso dal carrello fino al suo arresto. Trascurare ogni altro attrito oltre a quello che determina il puro rotolamento.

In condizioni di puro rotolamento si ha conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}(M + 4m)v_0^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = (M + 4m)gh. \tag{1}$$

Il primo termine rappresenta l'energia cinetica iniziale, comprendente quella del carrello e delle ruote, il secondo l'energia potenziale assunta nel punto di arresto. Calcolando il momento d'inerzia delle quattro ruote rispetto al loro asse e ricordando la condizione di rotolamento:

$$I = 4\frac{1}{2}\frac{M}{16}R^2 \qquad \omega = v_0 R,$$

la (1) diventa,

$$\frac{11}{16}Mv_0^2 = \frac{20}{16}Mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{11}{20}\frac{v_0^2}{g}.$$

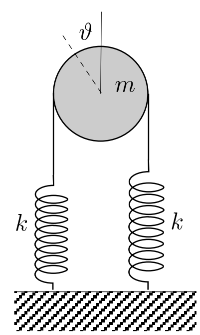
D'altra parte, detta d la proiezione orizzontale del percorso l, si ha

$$\tan\theta = \frac{h}{d} = 0,15, \quad \Rightarrow \quad \theta = 8,53^\circ.$$

Pertanto:

$$h = l \sin\theta, \quad \Rightarrow \quad l = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{11}{20}\frac{v_0^2}{g\sin\theta} = 18,54\,m$$

17. Nella gola di una carrucola di massa m e raggio r ad asse orizzontale, intorno al quale può ruotare senza attrito, è diposto un filo ideale che non slitta. Gli estremi di quest'ultimo sono collegati a due molle ideali di costante elastica k, fissate a loro volta ad un supporto rigido, come in figura. Determinare il periodo delle oscillazioni e la velocità angolare massima della carrucola, quando il sistema viene spostato dalla sua posizione di equilibrio.



Il sistema ha un solo grado di libertà: l'angolo di rotazione. Per la seconda equazione cardinale della dinamica dei corpi rigidi,

$$M = I\frac{d\omega}{dt},$$

indicando con θ l'angolo di rotazione, si ha:

$$-2k(r\theta)r = \frac{1}{2}mr^2\frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\ddot{\theta} + 2k\theta = 0.$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{4k}{m}}, \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}}.$$

Il moto oscillatorio e la velocità angolare possono essere espressi dalle equazioni

$$\theta = \theta_0 \sin\omega t, \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \theta_0\omega\sin\omega t,$$

dove θ_0 è l'angolo massimo di rotazione della carrucola. Quindi, tenendo conto della (1), la velocità angolare massima risulta:

$$\omega_{max} = \theta_0\omega = \theta_0\sqrt{\frac{4k}{m}}.$$

Da notare che inevitabilmente, velocità angolare e pulsazione sono espresse con lo stesso simbolo.

Si lascia al lettore risolvere il problema mediante la conservazione dell'energia: cinetica ed elastica.

18. Una sbarretta omogenea di sezione costante, lunghezza l e massa m, è adagiata senza altri vincoli, su un piano orizzontale liscio. Sullo stesso piano una particella, anch'essa di massa m, animata di velocità $\mathbf{v}$ che forma un angolo θ con la sbarretta, colpisce un estremo di questa aderendovi all'istante. Determinare l'espressione dell'energia cinetica del sistema dopo l'urto.

Il sistema dopo l'urto anelastico, assume un movimento rototraslatorio piano. Non agendo forze esterne, tranne la reazione del vincolo, che non compie lavoro perché ortogonale al piano, l'energia cinetica finale risulta somma di due termini: uno di traslazione del centro di massa, l'altro di rotazione intorno ad esso. Il centro di massa del sistema, dopo l'urto si trova alla distanza $l/4$ dall'estremo della sbarretta. Si ha conservazione della quantità di moto e del momento angolare, prima e dopo l'urto:

$$m\mathbf{v} = 2m\mathbf{v}_C, \qquad mv\frac{l}{4}\sin\theta = I_C\omega, \tag{1}$$

dove I_C è il momento d'inerzia del sistema rispetto al centro di massa. Dalle (1) si trae:

$$\mathbf{v}_C = \frac{\mathbf{v}}{2}, \qquad I_C = m\frac{l^2}{12} + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{5}{24}ml^2.$$

Quindi, dalla seconda delle (1),

$$\omega = \frac{6}{5}\frac{v}{l}\sin\theta.$$

L'energia cinetica risulta:

$$T = \frac{1}{2}(2m)v_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 = \frac{1}{4}mv^2\left(1 + \frac{3}{5}\sin^2\theta\right).$$

19. Una ruota, assimilabile ad un disco di massa $m = 10\,kg$ e raggio r, rotola senza strisciare su una rotaia orizzontale, trainata da una forza, parallela alla rotaia e applicata al centro di massa, di intensità che varia nel tempo con la legge $F = kt$, con $k = 1\,N/s$. Determinare l'istante in cui cessa il rotolamento puro, sapendo che il coefficiente d'attrito statico è $\mu_s = 0,2$.

Come in tutti i problemi che riguardano il movimento di un corpo rigido, vanno applicate le equazioni:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C, \qquad \mathbf{M} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt},$$

in cui $\mathbf{F}$ è la somma delle forze agenti ed $\mathbf{M}$ la somma dei momenti di dette forze. Nel caso del problema le forze agenti sono la forza d'attrito $\mathbf{F}_A$, opposta alla direzione del moto, e la forza di traino. Proiettando sull'asse orizzontale e assumendo i momenti delle forze ed il momento d'inerzia rispetto al centro di massa della ruota, si ha:

$$kt - F_A = ma_C \qquad F_A r = I\frac{d\omega}{dt}.$$

Dalla seconda si trae

$$F_A = \frac{I}{r}\ddot{\theta}, \tag{1}$$

che sostituita nella prima fornisce:

$$kt - \frac{I}{r}\ddot{\theta} = mr\ddot{\theta}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{k\,t}{mr + I/r}.$$

perciò la (1) diventa,

$$F_A = \frac{I}{r}\frac{k\,t}{mr + I/r} = \frac{1}{3}k\,t.$$

Ma perché il moto sia di puro rotolamento dev'essere

$$F_A \le \mu_s mg, \qquad \frac{1}{3}k\,t \le \mu_s mg, \quad \Rightarrow \quad t \le 3\frac{\mu_s mg}{k} = 58,8\,s.$$

20. Un'asta omogenea di sezione costante e massa $M = 9m$ può ruotare su un piano orizzontale privo di attrito, attorno ad un asse fisso verticale, passante per un suo estremo. Essa si trova in quiete finché un corpo puntiforme di massa m animato di velocità $\mathbf{v}$ ortogonale all'asta e parallela al piano, la colpisce nel punto di mezzo, rimbalzando con velocità $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}/3$. Stabilire se l'urto è elastico o meno.

Per stabilire il tipo d'urto occorre valutare l'energia cinetica del sistema prima e dopo l'urto. In ogni caso si ha conservazione del momento angolare. Detta l la lunghezza dell'asta si ha

$$mv\frac{l}{2} = -mv'\frac{l}{2} + I\omega = -\frac{1}{3}mv\frac{l}{2} + I\omega, \tag{1}$$

in cui $I = Ml^2/3$ è il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'estremo. Dalla (1) si ricava:

$$\frac{2}{3}mvl = I\omega, \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2}{9}\frac{v}{l}. \tag{2}$$

L'energia cinetica dopo l'urto è:

$$T' = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\frac{v^2}{9} + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Sostituendo l'espressione di ω data dalla (2), si ottiene:

$$T' = \frac{7}{54}mv^2,$$

e, confrontando con l'energia cinetica del corpo prima dell'urto, $T = mv^2/2$,

$$\frac{T'}{T} = \frac{7}{27} = 0,26.$$

L'urto non è elastico.

21. Una sbarra di sezione costante, lunghezza l e massa M in quiete, può ruotare su un piano orizzontale liscio, attorno ad un perno fissato ad un estremo. Una massa m animata di velocità $\mathbf{v}_0$, perpendicolare alla sbarra e parallela al piano, vi si conficca ad una distanza x dal perno. Ricavare la distanza x per la quale la velocità angolare, dopo l'urto, è massima e l'espressione di quest'ultima.

L'urto è anelastico. Si ha conservazione del momento angolare prima e dopo l'urto:

$$mv_0x = I\omega, \tag{1}$$

dove il momento d'inerzia del sistema è dato da

$$I = \frac{1}{3}Ml^2 + mx^2.$$

dalla (1) si ricava:

$$\omega = \frac{mv_0x}{mx^2 + Ml^2/3}.$$

Annullando la derivata rispetto ad x della relazione precedente, si ottiene la distanza x_0 per la quale la velocità angolare risulta massima:

$$x_0 = l\sqrt{\frac{M}{3m}}$$

e la velocità angolare massima:

$$\omega_{max} = \frac{v_0}{2l\sqrt{M/(3m)}}.$$

22. Una sbarretta omogenea di massa M, lunghezza l e sezione costante può ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro ed ortogonale ad essa. Un corpo puntiforme di massa m viene fatto cadere da un'altezza h aderendo ad una estremità della sbarretta, inizialmente in quiete ed in posizione orizzontale. Determinare l'altezza minima da cui deve cadere il corpo affinché il sistema compia un giro completo ($M = 3m$).

L'urto è anelastico; si conserva il momento angolare. Detta v la velocità del corpo al momento dell'impatto, si ha

$$mv\frac{l}{2} = I\omega, \tag{1}$$

dove il momento d'inerzia del sistema è

$$I = \frac{1}{12}Ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2.$$

dalla (1) si ha

$$\omega = \frac{mvl}{2I} = \frac{v}{l}.$$

Poiché,

$$v = \sqrt{2gh},$$

si ottiene

$$\omega = \frac{1}{l}\sqrt{2gh}.$$

Affinché il sistema compia un giro completo, la sua energia cinetica dopo l'urto, dev'essere almeno pari alla variazione di energia potenziale del corpo che, una volta colpita la sbarretta, raggiunge la massima altezza $l/2$:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 \geq mg\frac{l}{2}, \quad \Rightarrow \quad h \geq l.$$

23. Un disco e un anello rotolano senza strisciare lungo un piano inclinato, partendo rispettivamente dalle quote h_d ed h_a. Determinare il rapporto h_d/h_a perché alla fine del piano inclinato giungano con la stessa velocità.

Trascurando l'attrito di rotolamento, sempre molto piccolo se il piano d'appoggio è indeformabile, si ha conservazione dell'energia cinetica in quanto la forza di attrito statico non compie lavoro; essa infatti non sposta il suo punto di applicazione. Pertanto:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 = mgh, \tag{1}$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, che per il disco e l'anello sono

$$I_d = \frac{1}{2}m_dR_d^2, \qquad I_a = m_aR_a^2.$$

Inoltre trattandosi di puro rotolamento nei due casi si ha

$$\omega_d = \frac{v_{Cd}}{R_d}, \qquad \omega_a = \frac{v_{Ca}}{R_a},$$

con ovvio significato dei simboli. Sostituendo nella (1) le grandezze pertinenti al disco e all'anello, si ottiene

$$v_{Cd}^2 = \frac{4}{3}gh_d, \qquad v_{Ca}^2 = gh_a.$$

Ma, dovendo essere uguali le velocità alla fine del piano inclinato, confrontando si trae:

$$\frac{h_d}{h_a} = \frac{3}{4}.$$

24. Una semisfera omogenea di raggio R e massa m è trascinata, con velocità costante $\mathbf{v}_0$ da una forza orizzontale $\mathbf{F}_1$, applicata come in figura. Il baricentro della semisfera si trova ad una distanza $3R/8$ dalla superficie piana. determinare il coefficiente di attrito dinamico sapendo che, durante il moto, la normale alla superficie piana forma con la verticale un angolo $\alpha = 28°$.

Giacché la normale alla superficie piana forma un angolo α con la verticale, il punto di contatto O della semisfera col piano non si trova su detta normale, vedi figura. Inoltre la semisfera si muove con velocità costante, quindi la somma delle forze $\mathbf{F}$ e la somma dei momenti $\mathbf{M}$ devono essere nulle. Detta $\mathbf{R}_n$ la reazione normale al piano ed $\mathbf{F}_A$ la forza d'attrito, si ha,

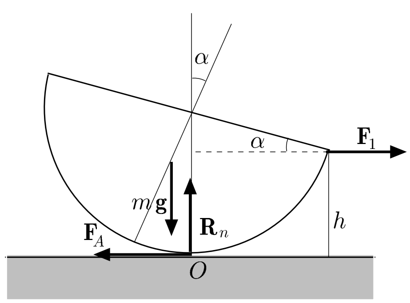
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_n + \mathbf{F}_A + m\mathbf{g} = 0.$$

Proiettando lungo l'asse x orizzontale:

$$F_x = F_1 - F_A = 0, \quad \Rightarrow \quad F_A = F_1. \tag{1}$$

Assumendo i momenti delle forze rispetto al punto di contatto O, sapendo che la forza peso è applicata al baricentro, distante $3R/8$ dalla superficie piana e tenuto conto che $F_1 = F_A$, la somma dei moduli dei momenti risulta:

$$M = mg\frac{3}{8}R\sin\alpha - \mu_d mgR(1 - \sin\alpha) = 0.$$



Si ottiene

$$\frac{3}{8}\sin\alpha = \mu_d(1 - \sin\alpha), \quad \Rightarrow \quad \mu_d = \frac{3}{8}\frac{\sin\alpha}{1 - \sin\alpha}.$$

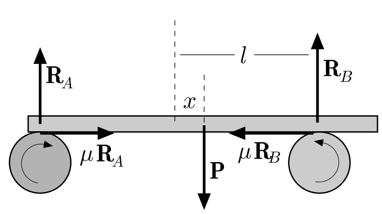
Per $\alpha = 28°$ risulta:

$$\mu_d = \frac{1}{3}.$$

Se α fosse uguale a zero non ci sarebbe attrito; la semisfera si muoverebbe di moto uniformemente accelerato.

25. Una sbarra omogenea di sezione costante e peso $P = 4\,kg_p$, è appoggiata orizzontalmente su due cilindri identici ad assi paralleli ed orizzontali, distanti $2l = 1,2\,m$. Calcolare le reazioni R_A ed R_B nei punti d'appoggio A e B, quando il baricentro della sbarra dista $x = 10\,cm$ dal piano verticale equidistante dai cilindri. Assumendo che il coefficiente d'attrito dinamico tra sbarra e cilindri sia $\mu = 0,2$ e posti in rotazione i cilindri attorno ai loro assi, con velocità angolari uguali e in verso opposto, dimostrare che il moto della sbarra è armonico. Supponendo che essa sia sufficientemente lunga da potere appoggiare sempre sui cilindri, calcolare il valore di μ nel caso in cui il periodo delle oscillazioni sia $T = 2,5\,s$.

Calcolo delle reazioni



Per l'equilibrio delle forze e dei momenti, rispetto al baricentro della sbarra, si ha

$$R_A + R_B - P = 0, \qquad M_B - M_A = 0. \tag{1}$$

Quest'ultima si scrive:

$$R_A(l + x) = R_B(l - x),$$

e, tenuto conto della prima delle (1),

$$(P - R_B)(l + x) = R_B(l - x).$$

Si trae:

$$R_B = \frac{P(l + x)}{2l} = 2,33\, kg_p, \qquad R_A = \frac{P(l - x)}{2l} = 1,67\, kg_p. \tag{2}$$

Calcolo del moto

Le forze orizzontali alle quali è soggetta la sbarra sono le forze d'attrito che si destano nei punti di contatto coi cilindri μR_A e μR_B. Supponendo che il primo cilindro ruoti in senso orario ed il secondo in senso antiorario, l'equazione di Newton si scrive:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mu\left(\frac{P(l - x)}{2l} - \frac{P(l + x)}{2l}\right) = -\mu\frac{P}{l}\, x.$$

ossia:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\frac{g}{l}\, x,$$

equazione dell'oscillatore armonico con

$$\omega^2 = \mu\frac{g}{l}, \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\mu g}}.$$

Il coefficiente d'attrito per un periodo $T = 2,5\, s$ dev'essere

$$\mu = 4\pi^2\frac{l}{gT^2} = 0,39.$$

26. Una sbarra omogenea di sezione costante, massa $m = 200\, gm$ e lunghezza l, è adagiata, in quiete, su un piano orizzontale liscio. La sbarra viene posta in moto da un impulso $J = 2\, N \cdot s$, ortogonale ad essa ed applicato ad un estremo. Calcolare il lavoro della forza impusiva.

Il lavoro della forza impulsiva è pari all'energia cinetica dalla sbarra che assume un moto rototrasaltorio:

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \tag{1}$$

Poiché l'impulso angolare è uguale alla variazione del momento angolare,

$$\mathbf{J}_\theta = \Delta\mathbf{L}, \quad \Rightarrow \quad J_\theta = I\omega,$$

si ha:

$$\omega = \frac{J_\theta}{I} = \frac{Jl}{2I} = \frac{6J}{ml},$$

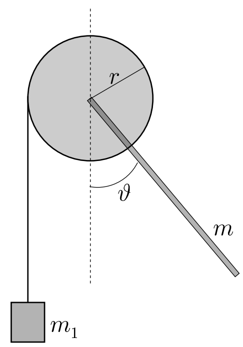
avendo tenuto conto che il momento d'inerzia della sbarra rispetto al suo centro di massa è $I = ml^2/12$. D'altra parte,

$$v_C = \omega\frac{l}{2} = 3\frac{J}{m}.$$

Sostituendo nella (1), si ottiene:

$$\mathcal{L} = \frac{9}{2}\frac{J^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\frac{36J^2}{m^2l^2} = 6\frac{J^2}{m} = 120\,J.$$

27. Un sistema rigido è costituito da una sbarra omogenea di sezione costante, massa m e lunghezza l, la cui estremità è saldata ortogonalmente all'asse di un disco di raggio r, di massa trascurabile rispetto a quella della sbarra. Il sistema può ruotare senza attrito attorno all'asse del disco, disposto orizzontalmente, ed è tenuto in equilibrio da un corpo di massa m_1 agganciato ad un estremo di un filo ideale, mentre l'altro estremo è fissato al bordo del disco. In tale posizione, individuata dall'angolo θ che l'asta forma con la verticale, viene agganciato al filo un altro corpo di massa $2m_1$. Determinare la velocità angolare del sistema quando la sbarra si dispone verticalmente ($r = 10\,cm$; $m = 800\,gm$; $m_1 = 1\,kg$; $l = 32\,cm$).



Dall'equilibrio dei momenti delle forze rispetto all'asse di rotazione, si ottiene l'angolo θ:

$$m_1gr - mg\frac{l}{2}\sin\theta = 0, \qquad \sin\theta = \frac{2mr}{m_1 l}, \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Quando al filo, oltre al corpo di massa m_1, viene agganciato il corpo di massa $2m_1$, il sistema inizia a ruotare. Tenuto conto che, raggiunta la posizione verticale della sbarra, il filo si svolge di una lunghezza pari a $r(\pi - \pi/6)$ ed i corpi scendono di tale quota mentre la sbarra raggiunge la verticale, la variazione di energia potenziale del sistema risulta:

$$\Delta U = -3mgr\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + mg\frac{l}{2}(1 + \cos\theta) = -5,35\,J.$$

La variazione di energia cinetica corrispondente è

$$\Delta T = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}(3m_1)v^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2 + \frac{3}{2}m_1r^2\omega^2.$$

Ma $\Delta T = -\Delta U$, quindi:

$$\left(\frac{1}{6}ml^2 + \frac{3}{2}mr^2\right)\omega^2 = 5,35, \quad \Rightarrow \quad \omega = 13,68\,rad/s.$$

28. Un cubo omogeneo di spigolo $l = 10\,cm$ e massa M è appoggiato su un piano orizzontale. Al centro della faccia opposta a quella su cui poggia è applicata una forza $\mathbf{F}$, parallela agli spigoli orizzontali. Fuori dal centro, in un punto P opposto alla direzione della forza, viene collocata una massa $m = \alpha M$, con $\alpha = 0,3$. Sapendo che il coefficiente d'attrito statico tra cubo e piano è $\mu_s = 0,5$ determinare la minima distanza x dalla faccia verticale, normale ad $\mathbf{F}$, del punto P affinché, nella condizione di moto incipiente, il cubo trasli senza subire rotazioni.

Nelle condizioni di moto incipiente il modulo della forza applicata dev'essere:

$$F = \mu_s Mg(1+\alpha).$$

La distanza minima x in cui va posta m va ricavata imponendo che la somma dei momenti delle forze dev'essere nulla. Assumendo i momenti rispetto allo spigolo anteriore che poggia sul piano, si ha

$$\mu_s Mg(1+\alpha)l - Mg\frac{l}{2} - \alpha Mgx = 0.$$

Si ricava:

$$x = \frac{\mu_s(1+0,3)l - l/2}{0,3} = 5\,cm.$$

29. Un'automobile viaggia su un rettilineo con velocità $v_0 = 216\,km/h$. Alla distanza $d = 150\,m$ dall'inizio di una curva comincia a frenare con accelerazione costante, in modo da affrontare la curva con la massima velocità, di modulo costante, senza slittare. Calcolare il valore dell'accelerazione sapendo che il raggio della curva è $r = 90\,m$ ed il coefficiente di attrito statico $\mu_s = 1$.

Perché la macchina non slitti la forza centripeta dev'essere:

$$m\frac{v^2}{r} \le \mu_s mg, \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\mu_s rg}. \tag{1}$$

L'accelerazione va determinata mediante la relazione:

$$v_{max}^2 - v_0^2 = 2ad.$$

Sostituendo la (1),

$$a = \frac{v_{max}^2 - v_0^2}{2d} = -9\,m/s^2.$$

30. Un'asta omogenea di sezione costante, massa $m = 0,9\,kg$ e lunghezza $l = 0,2\,m$, incernierata nel suo punto di mezzo ad un asse, è inizialmente in equilibrio in posizione orizzontale. Essa viene colpita verticalmente da un proiettile, di massa $m_1 = 100\,gm$ e velocità $v_0 = 100\,m/s$ che si conficca in un sua estremo. Determinare la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto e il numero di giri compiuto prima di arrestarsi, supponendo che la cerniera eserciti un momento costante, dovuto alla forza d'attrito pari a $M = 6\,N\cdot m$.

Nell'urto si conserva il momento angolare rispetto all'asse di rotazione:

$$m_1 v_0 \frac{l}{2} = I\omega, \tag{1}$$

dove I è il momento d'inerzia del sistema:

$$I = m\frac{l^2}{12} + m_1\frac{l^2}{4} = \frac{1}{12}(m+3m_1)l^2.$$

Dalla (1) si trae:

$$\omega = \frac{6m_1 v_0}{(m+3m_1)l}.$$

Il lavoro della forza d'attrito è

$$\mathcal{L}_A = -\int_0^\theta M d\theta = -M\theta.$$

Tale lavoro è pari alla variazione di energia cinetica $T_f - T_i$ dove $T_f = 0$. Pertanto:

$$M\theta = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Si deduce:

$$\theta = \frac{3}{2}\frac{(m_1 v_0)^2}{(m+3m_1)M} = 20,8\,rad, \qquad n = \frac{\theta}{2\pi} = 3,32\,giri.$$

31. Un disco ed una sfera omogenei, animati di velocità baricentrale v_d e v_s, affrontano in salita un piano inclinato, rotolando senza strisciare. Determinare quanto dev'essere il rapporto v_d/v_s affinché raggiungano la stessa quota h.

Per la conservazione dell'energia si ha

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 = mgh,$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione. Poiché il momento d'inerzia, nei due casi, ha l'espressione

$$I = kmr^2,$$

con $k_d = 1/2$ e $k_s = 2/5$, rispettivamente per il disco e la sfera, ed il moto è di puro rotolamento, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}k_d mr^2\frac{v_d^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv_d^2 &= \frac{1}{2}mv_d^2(k_d+1) = mgh\\
\frac{1}{2}k_s mr^2\frac{v_s^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv_s^2 &= \frac{1}{2}mv_s^2(k_s+1) = mgh.
\end{aligned}$$

Uguagliando le due espressioni, si ottiene:

$$\frac{v_d}{v_s} = \sqrt{\frac{1+k_s}{1+k_d}} = \sqrt{\frac{14}{15}}.$$