

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"  
Facoltà di Ingegneria  
Raccolta di esercizi di Fisica II  
CAMPO MAGNETOSTATICO NEL VUOTO

1. Una spira rettangolare rigida, di massa  $m$  e lati di lunghezza  $a$  e  $b$ , è vincolata a ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per uno dei due lati di lunghezza  $a$ . Essa è percorsa da una corrente  $I$  e si trova in una regione dello spazio in cui è presente un campo di induzione  $\vec{B}$ , uniforme, diretto lungo la direzione verticale. Determinare l'angolo  $\theta$  che il piano della spira forma, all'equilibrio, con la direzione verticale.

( $m=3\text{g}$ ,  $a=10\text{cm}$ ,  $I=3\text{A}$ ,  $B=49\text{mT}$ )

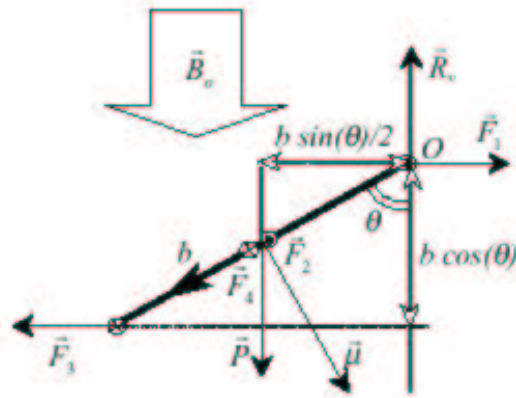
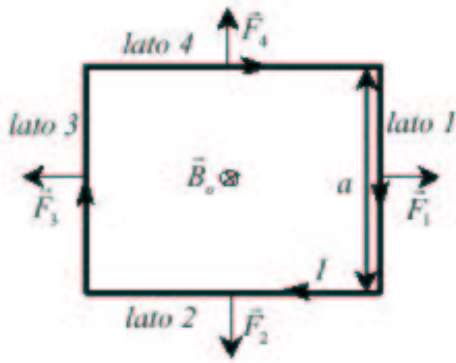
**Soluzione:**

ogni lato  $l$  della spira è sottoposto ad una forza che per la seconda formula di Laplace si scrive  $\vec{F} = \int_l I d\vec{l} \times \vec{B}_0 = I \vec{l} \times \vec{B}_0$  e che può pensarsi applicata al centro del lato. Le forze sui lati 2 e 4 sono eguali di modulo  $F_2 = F_4 = IB_0 b \cos(\theta)$ , opposte in verso, ma sulla stessa linea d'azione, così da non produrre effetti su una spira rigida. Le altre forze sui lati 1 e 3 sono eguali di modulo  $F_1 = F_3 = IB_0 a$ , opposte in verso ma su linee di azione parallele in modo da formare una coppia. Accanto a queste forze di natura magnetica vanno considerate la forza peso di modulo  $P = mg$  e applicata nel baricentro che coincide con il centro della spira, se considerata omogenea, e la reazione vincolare  $R_v$  applicata nel vincolo O che equilibra la forza peso. La spira è in equilibrio quando sono nulle allo stesso tempo la somma delle forze e la somma dei momenti delle forze. La prima condizione è facilmente verificata quando  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{P} + \vec{R}_v = 0$  il che implica che la reazione vincolare deve essere eguale e opposta alla forza peso  $\vec{R}_v = -\vec{P}$ . Più interessante è l'equazione dei momenti che consente di calcolare l'angolo  $\theta$  per cui si ha equilibrio. Proiettando i momenti sull'asse dell'unica rotazione consentita (asse per O) notiamo che le forze  $R_v$  e  $F_1$  non contribuiscono perché hanno punto di applicazione sull'asse stesso,  $F_2$  e  $F_4$  oltre ad essere sulla stessa linea d'azione non contribuiscono neanche singolarmente ad un momento sull'asse per O, mentre P ed  $F_3$  contribuiscono in modo opposto; in particolare P tenderebbe a fare ruotare la spira in verso antiorario (momento assiale positivo),  $F_3$  invece in verso orario. L'equilibrio si ha quando  $M_p + M_{F_3} = P \cdot b \sin(\theta) / 2 - F_3 b \cos(\theta) = 0$  da cui

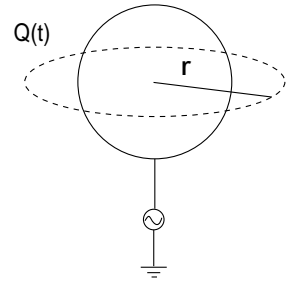
$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{2F_3}{P} = \frac{2IaB_0}{mg} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-1} \cdot 49 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} = 1$$

da cui  $\theta = 45^\circ$

**soluzione alternativa:** il momento magnetico della spira  $\mu = Iab$  crea un momento meccanico che all'equilibrio si oppone al momento della forza peso  $\vec{r} \times \vec{P} + \vec{\mu} \times \vec{B}_0 = 0$ . Proiettando sull'asse si ottiene  $-b \cdot mg \cos(\theta) + Iab \cdot B_0 \sin(\theta) = 0$  da cui si ricava  $\theta$ .



2. Una sfera conduttrice in aria è collegata a terra tramite un lungo filo conduttore rettilineo molto sottile, lungo il quale è inserito un generatore di tensione alternata. La carica della sfera è data dall'espressione  $Q(t) = Q_0 \sin \omega t$ . La variazione nel tempo è sufficientemente lenta da poter assumere l'approssimazione quasi stazionaria. Calcolare l'espressione del campo  $B$  presente in un punto sul piano equatoriale della sfera, all'esterno di quest'ultima e a distanza  $r$  dal centro.



**Soluzione:**

Il problema può essere risolto a partire dalla circuitazione di  $B$  lungo il percorso evidenziato in figura. Data la simmetria sferica del problema, il campo  $B$  assume infatti lungo il percorso di integrazione un valore costante e diretto lungo la circonferenza stessa. In accordo alla 4a eq. di Maxwell e al teorema di Stokes si ha:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_t \cdot 2\pi r = \mu_0 \int_S (\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

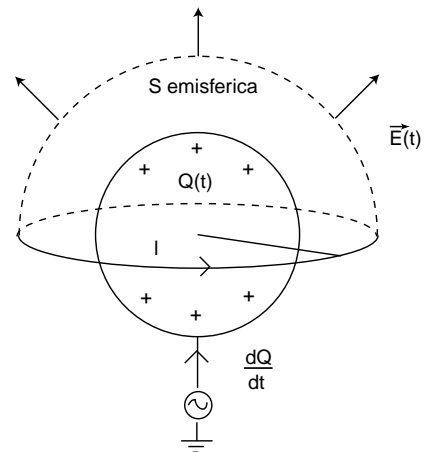
dove  $S$  è una qualsiasi superficie avente la linea di circuitazione come bordo e con la normale rivolta secondo la convenzione fissata dal teorema di Stokes. Assumiamo un verso di percorrenza antiorario tale da avere la normale diretta verso l'alto.

Risolviamo il problema prendendo inizialmente come superficie  $S$  l'emisfero superiore. In questo caso le correnti di conduzione rappresentate dal termine  $J$  sono nulle. Da ciò deriva che

$$B_t 2\pi r = \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{dE_n}{dt} \cdot \frac{4\pi r^2}{2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q(t)}{r^2} \right) \cdot \frac{4\pi r^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 \frac{dQ}{dt} \rightarrow B_t = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \omega Q_0}{2\pi r} \cos \omega t$$

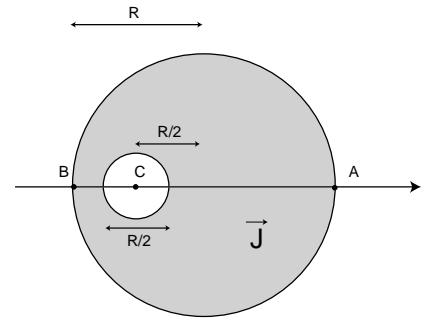
Si noti che il campo elettrico è stato calcolato in accordo alla ipotesi semplificativa riportata nel testo. Se viene scelto l'emisfero inferiore, allora, data la presenza del filo, le correnti di conduzione non sono identicamente nulle su tutta la superficie  $S$ . In particolare il flusso di  $J$  attraverso la superficie  $S$  fornisce la corrente totale sul filo data da:



$$\int \vec{J} d\vec{S} = I = \frac{dQ}{dt}$$

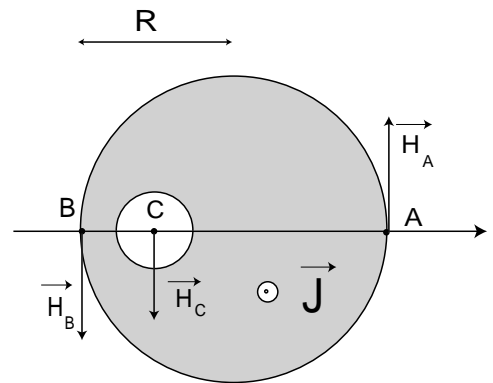
Tenendo conto di questa circostanza, si perviene alla soluzione che è ovviamente coincidente con il risultato trovato precedentemente.  $B_t 2\pi r = \mu_0 \frac{dQ}{dt} - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{dQ}{dt}$   
 Si badi bene al cambio del segno nel termine della corrente di spostamento dovuto all'opposto orientamento del campo elettrico e della normale alla superficie S.

3. Un conduttore cilindrico di raggio  $R$  indefinitamente lungo, avente una cavità cilindrica di raggio  $R/4$  a distanza  $R/2$  dal proprio asse, è percorso da una corrente elettrica con densità di corrente  $\vec{J}$  uniforme, diretta lungo l'asse. Si calcoli il valore del campo magnetico nei punti  $A$  e  $B$  e  $C$  indicati in figura. [Dati:  $J = 100 \text{ A/m}^2$ ,  $R = 10^{-2} \text{ m}$ ].

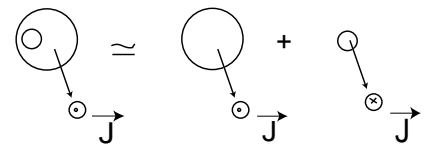


**Soluzione:**

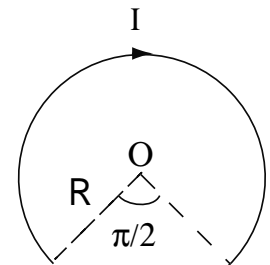
$$\left\{ \begin{aligned} H_A &= \frac{J \cdot \pi R^2}{2\pi R} - \frac{J\pi \cdot (R/4)^2}{2\pi(R + R/2)} = \frac{23}{24} \frac{J \cdot R}{2} \\ H_B &= \frac{J \cdot \pi R^2}{2\pi R} - \frac{J\pi \cdot (R/4)^2}{2\pi(R/2)} = \frac{7}{8} \frac{J \cdot R}{2} \\ H_C &= \frac{J \cdot \pi (R/2)^2}{2\pi R/2} = \frac{1}{2} \frac{J \cdot R}{2} \end{aligned} \right.$$



$$\left\{ \begin{aligned} H_A &= 0.48 \text{ Asp/m} \\ H_B &= 0.44 \text{ Asp/m} \\ H_C &= 0.25 \text{ Asp/m} \end{aligned} \right.$$



4. Un sottile filo conduttore è sagomato in modo da formare un arco di circonferenza di centro  $O$ , raggio  $R$  ed angolo al centro di  $(3\pi/2)$  rad, raccordato ad un tratto rettilineo che chiude il circuito. Nel circuito, posto nel vuoto scorre una corrente stazionaria  $I$ . Ricavare l'espressione del campo di induzione magnetica  $\vec{B}$  nel punto  $O$ .



**Soluzione:**

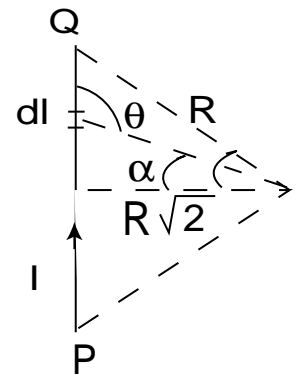
$$B = B_{arco} + B_{segmento}$$

$$B_{arco} = \int_{arco} \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} dl = \frac{3\mu_0 I}{8R}$$

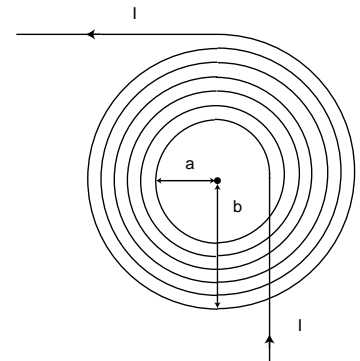
$$B_{segmento} = \int_P^Q \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \sin\vartheta = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{4\pi R} \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \cos\alpha d\alpha =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left( \frac{3\pi}{4} + 1 \right)$$



5. Una bobina piatta, in aria, è costituita da un numero  $N$  molto grande di spire di filo sottile avvolte in modo da riempire con una spirale piana e compatta la corona circolare di raggio interno  $a$  e raggio esterno  $b$  indicata in figura. Se la bobina è percorsa da una corrente  $I$ , ricavare l'espressione del vettore induzione magnetica  $B$  nel centro  $O$  della bobina stessa.



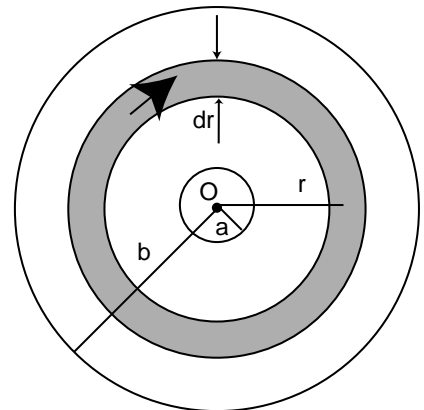
**Soluzione:**

Densità radiale di spire :  $\frac{N}{b-a}$

La corona elementare di raggio  $r$  contiene  $\left( \frac{N}{b-a} dr \right)$  spire percorse da corrente  $I$  che producono in  $O$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2r} \frac{N}{b-a} dr$$

$$\int_a^b \frac{\mu_0 I}{2r} \frac{N}{b-a} dr = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$



6. Si abbia della carica distribuita con densità superficiale uniforme  $\sigma$  sulla superficie laterale di un cilindro di materiale isolante e non magnetico, di raggio  $a$  e altezza  $b$ . Si calcoli l'induzione  $B$  sull'asse del cilindro, in corrispondenza delle superfici di base, se il cilindro stesso è posto in rotazione intorno all'asse con velocità angolare  $\omega$ .

**Soluzione:**

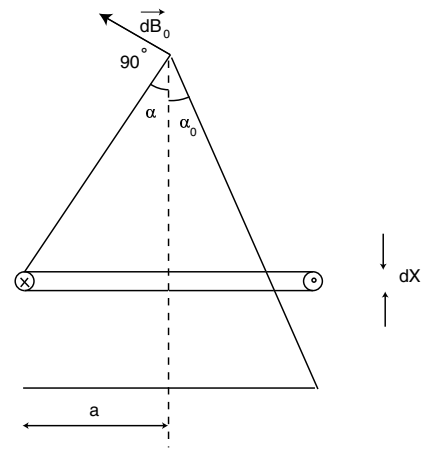
$$dB_{0x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{|d\vec{l} \times \vec{r}|}{r^3} \cdot \sin \alpha = \quad \text{Campo sulla faccia superiore}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sigma 2\pi a dx}{T} \cdot \oint \frac{dl r}{r^3} \sin \alpha =$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \frac{\sigma a^2 \omega \sin \alpha}{r^2} dx$$

$$B_{0x} = \int_{\alpha_0}^{\pi/2} \frac{\mu_0}{2} \sigma a^2 \omega \frac{\sin^3 \alpha}{a^2 \sin^3 \alpha} d\alpha = \frac{\mu_0}{2} \sigma a \omega \cos \alpha \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_0} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \sigma a \omega \cos \alpha_0 \quad \alpha_0 = \arctg \frac{a}{b}$$



7. Un elettrone ( $m = 9 \cdot 10^{-31} kg$ ) che si trova sull' asse di un cilindro di raggio  $r = 2cm$  viene emesso con velocità radiale  $v = 5 \cdot 10^7 m/s$  verso la parete del cilindro. Determinare il valore minimo di  $B_0$ , diretto con linee di forza parallele all' asse, che impedisce all' elettrone di arrivare sulla parete del cilindro.

**Soluzione:**

Traiettoria circolare : raggio della traiettoria  $R = \frac{mv}{qB} \leq \frac{r}{2}$

$$B_{min} = \frac{2mv}{qr} = 0.028 T$$