Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Raccolta di esercizi di Fisica II
CIRCUITI

1. Un solenoide cilindrico, di raggio r e lunghezza h, è costituito da N spire ottenuto avvolgendo in modo compatto un filo di rame a sezione circolare di diametro d. Esso è riempito per metà della sua lunghezza con un materiale di permeabilità magnetica relativa μ_r costante. Calcolare la costante di tempo τ del circuito ottenuto collegando, tramite fili conduttori di resistenza trascurabile, il solenoide ad un generatore di forza elettromotrice costante e resistenza interna R_i.
(r=1cm, h=55cm, N=550, $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}\Omega$ m, d=1mm, μ_r=900, $R_i = 1.25\ \Omega$)
Soluzione:

Il circuito elettrico descritto è un circuito RL; esso è costituito da una forza elettromotrice f, da una resistenza totale R_{tot} che è la serie della resistenza interna del generatore R_i e di quella di tutto il solenoide R_s, ed infine dalla serie di due induttori di coefficiente di autoinduzione L_0 ed L_1, uno immerso nel vuoto e l'altro immerso in un materiale ferromagnetico. Applicando le leggi di Ohm possiamo calcolare la resistenza totale del circuito come

$$R_{tot} = R_i + R_s = R_i + \rho\frac{l_{filo}}{S_{filo}} = R_i + \rho\frac{2\pi r \cdot N}{\pi\ (d/2)^2} =$$

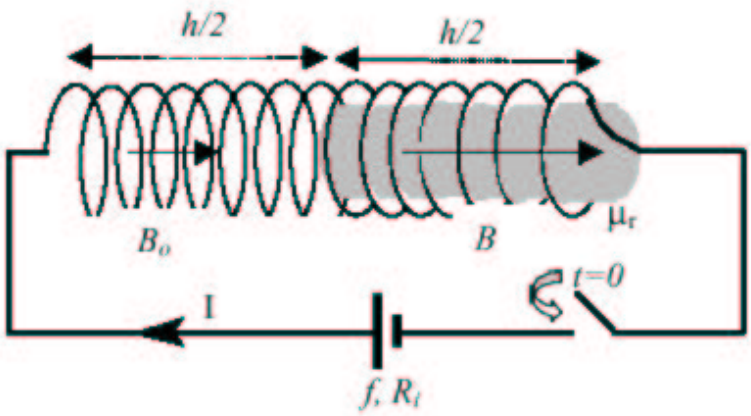
$$R_i + \rho\frac{8Nr}{d^2} = 1.25 + \frac{1.7 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 550 \cdot 10^{-2}}{10^{-6}} = 2\ \Omega$$

Per il calcolo del coefficiente di autoinduzione serie possiamo pensare di spezzare l'induttore in due induttori di lunghezza h/2 e di numero di spire N/2, calcolare i rispettivi coefficienti L_0 ed L_1 e sommarli

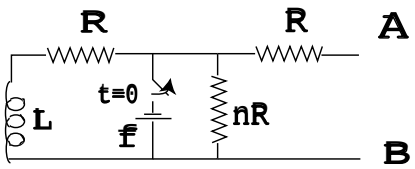
$$L_0 = \mu_0\frac{(N/2)^2 \cdot (\pi r^2)}{h/2} \quad ; \quad L_1 = \mu_r L_0$$

$$L_{tot} = L_0 + L_1 = \mu_0\frac{(1+\mu_r)N^2\pi r^2}{2h} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 450.5\frac{550^2\ \pi\ 10^{-4}}{55 \cdot 10^{-2}} = 0.0978\ Henry$$

Nel circuito RL ora descritto, chiuso il circuito a t=0, la corrente I(t) cresce nel tempo con legge
$i(t) = \dfrac{f}{R_{tot}}(1 - e^{-t/\tau})$ ove la costante di tempo di carica è
$\tau = \dfrac{L_tot}{R_tot} = \dfrac{0.0978}{2} = 48.9\ ms$

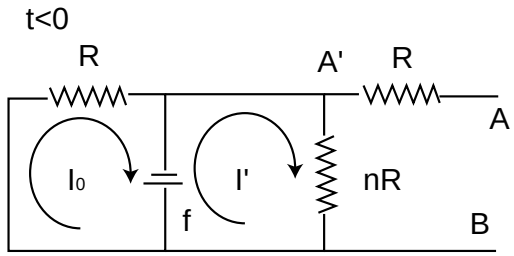


2. Il circuito in figura è a regime quando l' interruttore si apre a $t = 0$. La resistenza interna del generatore è trascurabile (generatore ideale). Calcolare l' espressione della differenza di potenziale $\Delta V(t)$ tra i punti A e B prima e dopo l' apertura dell' interruttore.



Soluzione:

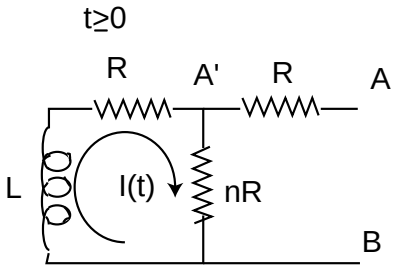
In condizioni di regime ($t < 0$), l'induttore è attraversato da un corrente costante I_0 e, di conseguenza, la differenza di potenziale ai suoi capi è nulla. La differenza di potenziale ΔVab coincide con la fem del generatore a meno di un cambio di segno dovuto alla diversa orientazione del generatore in confronto alla posizione dei nodi A e B. In base a queste considerazioni si ottiene:



$$\text{A } t < 0 \begin{cases} f = RI_0 \quad \Rightarrow I_0 = \dfrac{f}{R} \\ -f = nRI' \quad ininfluente \end{cases}$$

$\Delta V_{AB} = \Delta V_{AA'} + \Delta V_{A'B} = \Delta V_{A'B} = -f$

Una volta aperto l'interruttore, l'induttore si scarica sulla serie delle due resistenze R e nR. Per ricavare la differenza di potenziale ΔVab, è necessario integrare l'equazione:



$$-L\frac{dI}{dt} = (n+1)RI \quad \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{dt}{\tau}$$

$$con \;\; \tau = \frac{L}{(n+1)R}$$

Tenendo conto della condizione al contorno fornita dalla corrente iniziale $I(0) = I_0$, si ottiene:

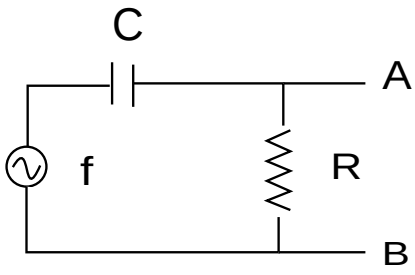
$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

Una volta ricavata la corrente, è facile ricavare la differenza di potenziale ΔVab tramite la legge di Ohm...

$$\Delta V_{AB} = \Delta V_{A'B} = nRI(t) = nR\frac{f}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = nfe^{-\frac{t}{\tau}}$$

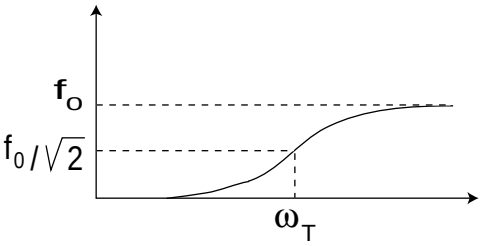
E' utile notare che la resistenza R interposta tra i nodi A e A' non ha alcun ruolo in quanto non attraversata da corrente.

3. Nel circuito indicato in figura f è un generatore di forza elettromotrice alternata sinusoidale $f = f_c \cdot sen(\omega t)$, di impedenza interna tracurabile. Calcolare e rappresentare con un grafico l'andamento dell'ampiezza V_{AB} della differenza di potenziale tra i punti A e B in funzione di ω, supponendo noti e costanti i valori di f_0, R e C. Calcolare anche il valore di ω_T in corrispondenza del quale $\frac{V_{AB}}{f_0} = \frac{1}{\sqrt[2]{(2)}}$.



Soluzione:

Il problema può essere agevolmente risolto applicando il metodo complesso. Se con I veiene indicato il fasore associato alla corrente di maglia, allora si ha che $\tilde{I} = \frac{f_0}{\tilde{Z}} = \frac{f_0}{R - \frac{j}{\omega C}}$ dove Z è l'impedenza data dalla serie del condensatore con la resistenza. In accordo alla legge di Ohm, l'ampiezza massima V_AB è data dal modulo del seguente prodotto



$V_{AB} = |\tilde{I} \cdot R| = |\frac{f_0 R}{R - \frac{j}{\omega C}}| == \frac{f_0 R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{f_0 \omega R C}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}}$ da cui si può ricavare la pulsazione tale che

$\omega_T = \frac{1}{RC}$

4. La resistenza di una stufa elettrica da $600W$, alimentata a $220V$, è costituita da un lungo filo di tungsteno dle diametro di $0.5mm$. Sapendo che la resistenza del filo alla temperatura ambiente di $15°C$ è 22Ω, calcolare: a) la temperatura del filo, trascurandone la dilatazione termica, quando la stufa è accesa; b) la potenza assorbita all'istante di accensione della stufa; c) la lunghezza del filo a $15°C$. Per il tungsteno: resistività $\rho_1 5°C = 5.6 \cdot 10{-}8\Omega \cdot m$; coefficiente termico $\alpha = 4.5 \cdot 10^{-3°}C^{-1}$.

Soluzione:

Per risolvere l'esercizio, è opportuno ricordare che l'andamento della resistenza elettrica R con la temperatura centigrada è descritto, nell'intorno della temperatura ambiente, da un andamento del tipo

$R_T = R_0(1 + \alpha T)$

La costante R_0 può essere determinata a partire dal valore di resistenza a 15°C secondo quanto segue:
$R_{15} \;=\; R_0(1+\alpha T_{15}) \;\;\Rightarrow\;\; R_0 \;=\; 20.6\ \Omega$
La temperatura del filo viene ricavata a partire dalla potenza ovvero dalla corrente erogata dal generatore. Ciò consente di determinare la resistenza del filamento e quindi la sua temperatura:

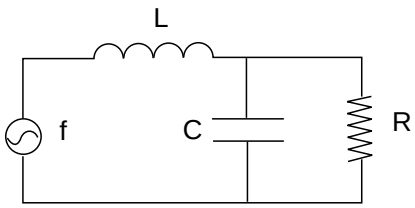
$$R_T \;=\; \frac{f^2}{W} \;=\; 80.7\ \Omega$$

$$R_T \;=\; R_0(1+\alpha T) \;\Rightarrow\; T \;=\; 648°C$$

La lunghezza del filo può essere determinata ricordano l'espressione del resistenza $R = \rho * l/S$ offerta da un conduttore di resistività ρ sezione S e lunghezza l.

$$R_{15} \;=\; \frac{\rho_{15°} l}{\pi r^2} \;\;\Rightarrow\;\; l \;=\; 77.1\ m$$

La potenza assorbita a temperatura ambiente è quindi data da
$W_{iniz} \;=\; \frac{f^2}{R_{15}} \;=\; 2.2\ kW$



5. Nel circuito disegnato in figura, f è un generatore ideale di forza elettromotrice sinusoidale di valore efficace f_eff. In condizioni di risonanza il valore efficace della differenza di potenziale misurata ai capi della resistenza è $V_eff = (f_eff/2)$. Determinare il valore della capacità Csapendo che $L = 0.1H$ ed $R = 100\Omega$.

Soluzione:

Se si utilizza il metodo simbolico, l'impedenza complessiva vista dal generatore Z_tot è data dalla serie dell'impedenza associata all'induttore e al parallelo RC pari a

$$\widetilde{Z_{eq}} \;=\; \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}} \;=\; \frac{R}{j\omega CR+1}$$

Il fasore associato alla corrente erogata dal generatore è quindi data da

$$\widetilde{i} \;=\; \frac{f_m}{\widetilde{Z_{tot}}} \;=\; \frac{f_m}{j\omega L+\frac{R}{j\omega CR+1}} \;=\; f_m\frac{j\omega CR+1}{j\omega L+R(1-\omega^2 LC)} \qquad f_m \;=\sqrt{2}f_{eff}$$

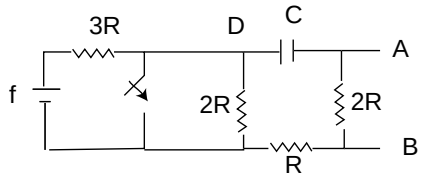
da cui si ottiene il fasore V_R corrispondente alla caduta di potenziale sulla resistenza R

$$\widetilde{V_R} \;=\; \widetilde{i}\,\widetilde{Z_{eq}} \;=\; \frac{f_m R}{j\omega L+R(1-\omega^2 LC)}$$

In condizioni di massima risonanza $1-\omega^2 LC \;=\; 0, \Rightarrow$

$$|\widetilde{V_R}| \;=\; \sqrt{2}V_{eff} \;=\; \frac{\sqrt{2}f_{eff}R}{\omega L} \;\Rightarrow\; \omega = \frac{2R}{L} \;\Rightarrow\; C = \frac{1}{L\omega^2} = 2.5\ \mu F$$

6. Il circuito in figura è a regime quando si chiude l'interruttore a $t = 0$. Calcolare l'espressione della differenza di potenziale $\Delta V = V_A - V_B$ per $t > 0$.



Soluzione:

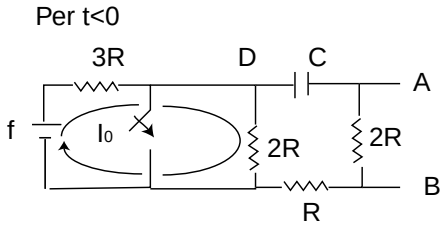
$Per \quad t < 0$

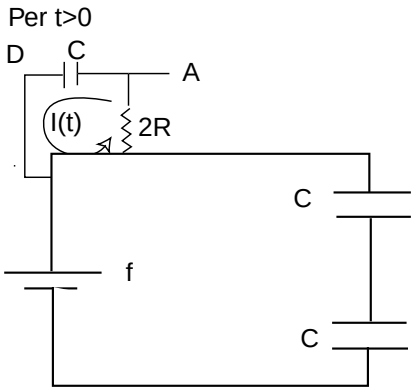
$\Delta V_{DA} = V_D - V_A = 2RI_0 = \dfrac{2R}{2R+3R} f = \dfrac{2}{5} f$

$Per \quad t > 0$

$V_A - V_B = \Delta V(t) = -2RI(t) = -2R\Delta \dfrac{V(t)}{} =$

$= -\dfrac{2}{3}\Delta V_{DA}(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \dfrac{4}{15} f e^{-\frac{t}{\tau}} \quad con \tau = 3RC$

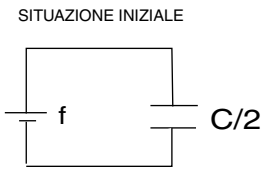




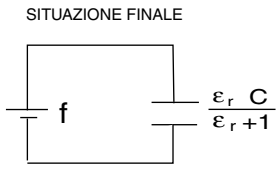
7. Nel circuito mostrato in figura, inizialmente i due condensatori piani hanno il vuoto tra le armature e la stssa capacità C. A partire da questa situazione di equilibrio iniziale uno dei due condensatori viene riempito di materiale omogeneo ed isotropo di costante dielettrica relativa ϵ_r. Si raggiunge così una nuova situazione di equilibrio. Ricavare l'espressione del lavoro elettrico erogato dal generatore nel passaggio dallo stato iniziale a quello finale.

Soluzione:

SITUAZIONE INIZIALE $\quad q_{in} = \dfrac{C}{2} f$

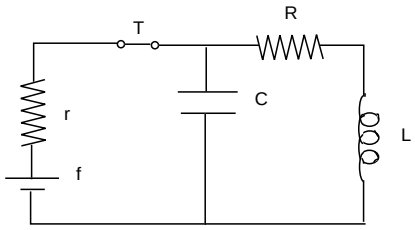


SITUAZIONE FINALE $\quad q_{fin} = \dfrac{\epsilon_r C}{\epsilon_r + 1} f$



$\triangle q = q_{fin} - q_{in} = \dfrac{\epsilon_r - 1}{2(\epsilon_r + 1)} f C \longrightarrow L_g = f \triangle q$

8. Il circuito mostrato nel disegno, in cui sono da considerarsi noti f, r, R, C, L e trascurabile la resistenza elettrica dell' induttanza L, é inizialmente a regime con l' interrutore T chiuso come in figura. All' istante $t = 0$ l'interruttore viene aperto. Ricavare l' espressione dell' energia totale (elettrica e magnetica) U_0 presente nel circuito RLC all' istante $t = 0$. Nell' ipotesi che valga la diseguaglianza $4L > CR^2$, ricavare anche l' andamento temporale della carica elettrica $Q(t)$ presente sul condensatore per $t > 0$.



Soluzione:

$$f = i_0(r+R) \quad i_0 = f/(r+R) \quad \triangle V = i_0 R = \frac{fR}{r+R}$$

$$U_o = \frac{1}{2}C \triangle V^2 + \frac{1}{2}Li_0^2 = \frac{1}{2}\frac{f^2}{(r+R)^2}(CR^2 + L)$$

$$\frac{Q(t)}{C} - L\frac{di}{dt} = iR \longrightarrow \frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} = 0$$

$$Q(t) = Ae^{-\gamma t} sen(\omega t + \varphi) \qquad \gamma = R/2L$$

$$\left(\triangle = \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0\right) \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

9. Un circuito RLC serie è collegato ad un generatore di $f.e.m.$ alternata $f_{eff} = 10V$. Si sa che alla pulsazione di risonanza $\varpi_0 = 5000s^{-1}$ nel circuito si dissipa una potenza media di $2W$. Se si elimina la capacità alla stessa pulsazione la potenza media dissipata diventa $1W$. Determinare i valori di R, L e C.

Soluzione:

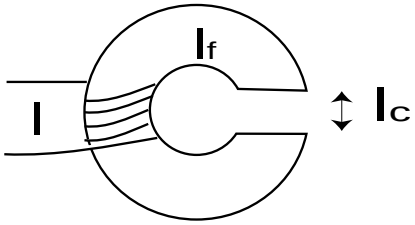
R: in risonanza $\quad < P >= I_{eff}^2 \; R = \frac{f_{eff}^2}{R} \quad R = \frac{f_{eff}^2}{< P >} = 50\Omega$

$L : circuito RL \quad < P >= I_{eff} f_{eff} cos\varphi \; = \frac{f_{eff}^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad da\ cui \quad L = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{f_{eff}^2 R}{< P >} - R^2}$

$L = 10mH$

$C : \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad C = \frac{1}{L\omega_0^2} = 4\mu F$

10. Un elettromagnete è costituito da un toro sottile circolare di materiale ferromagnetico di lunghezza media $l_f = 1m$, sezione uniforme $S = 400cm^2$, permeabilità magnetica relativa $\mu_r = 700$, dotato di un traferro in aria di spessore $l_0 = 1cm$ ($l_0 \ll l_f$). Sul toro sono avvolte 200 spire percorse da una corrente costante $I = 10A$. Trascurando il flusso disperso, calcolare la forza che si esercita tra le due facce del traferro.



Soluzione:

L'espressione della forza tra le facce del traferro può essere ricavata a partire dal gradiente spaziale dell'energia magnetica U_M complessivamente immagazzinata nel circuito magnetico. L'energia U_M è data dal prodotto della densità di energia magnetica w per il volume occupato dal circuito magnetico

$$U_M = \frac{1}{2}\frac{{B_0}^2 S l_0}{\mu_0} + \frac{1}{2}\frac{{B_f}^2 S l_f}{\mu_0 \mu_r} = \frac{1}{2}\frac{{B_0}^2 S}{\mu_0 \mu_r}(l_f + \mu_r l_0) \qquad (B_0 = B_f)$$

dove B_0 e B_f sono rispettivamente il campo di induzione magnetica presente nel traferro e all'interno del mezzo ferromagnetico. E' opportuno notare che $B_0 = B_f$ essendo diretti normalmente alla superficie di separazione tra i due mezzi. Il campo B può essere calcolato mediante la legge di Hopkinson

$$H_f l_f + H_0 l_0 = NI \qquad \frac{B_0 l_f}{\mu_0 \mu_r} + \frac{B_0 l_0}{\mu_0} = NI \Rightarrow B_0 = \frac{NI\mu_0\mu_r}{l_f + \mu_r l_0}$$

L'energia U_M risulta quindi pari a

$$U_M = \frac{1}{2}\frac{N^2 I^2 \mu_0 \mu_r S}{l_f + \mu_r l_0}$$

mentre la forza F è data da

$$F = +\frac{\partial U_M}{\partial l_0} = -\frac{1}{2}\frac{S N^2 I^2 \mu_0 {\mu_r}^2}{(l_f + \mu_r l_0)^2} = -770\ N$$

Si noti che il segno positivo davanti all'operatore di derivazione è dovuto al fatto che bisogna tenere in conto anche il lavoro fatto dal generatore per mantenere costante la corrente sull'avvolgimento.