Problemi Di Cinematica del Punto Materiale
A cura del Prof. T.Papa

1. Un punto materiale si muove lungo la traiettoria di equazione $y = x^2$ e, lungo x, ha componente della velocità $\dot{x} = 2\,m/s$, costante. Determinare velocità ed accelerazione, in modulo e direzione, in corrispondenza alla posizione $x = 0,5\,m$.

Il modulo della velocità è

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(\dot{x}^2 + (2x\dot{x})^2} = \dot{x}\sqrt{1 + (2x)^2} = 2\sqrt{2}\,m/s.$$

La sua direzione risulta da:

$$\tan\theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x = 1, \qquad \theta = 45^\circ.$$

Modulo dell'accelerazione:

$$\ddot{x} = 0; \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dx}\dot{x}; \qquad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dx^2}\dot{x}^2 + \frac{dy}{dx}\ddot{x} = 8\,m/s^2.$$

La direzione è quella positiva dell'asse y.

2. Un punto materiale si muove di moto armonico. Alla distanza dalla posizione di equilibrio $x = 6\,cm$ la velocità del punto è $v = 40\,cm/s$, mentre alla distanza $x = 8\,cm$ la velocità risulta $v = 30\,cm/s$. Determinare ampiezza e velocità massima.

Dall'equazione del moto e dalla velocità

$$x = A\sin\omega t, \qquad \dot{x} = A\omega\cos\omega t,$$

quadrando e sostituendo i valori assegnati, si ha

$$\sin^2\omega t = \frac{36}{A^2}, \qquad \cos^2\omega t = \frac{1600}{A^2\omega^2}.$$

$$\sin^2\omega t = \frac{64}{A^2}, \qquad \cos^2\omega t = \frac{900}{A^2\omega^2}$$

Sommando:

$$\frac{36}{A^2} + \frac{1600}{A^2\omega^2} = 1, \qquad \frac{64}{A^2} + \frac{900}{A^2\omega^2} = 1.$$

Da cui

$$36\,\omega^2 + 1600 = A^2\omega^2, \qquad 64\,\omega^2 + 900 = A^2\omega^2.$$

Si ottiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{700}{28}} = 5\,s^{-1}, \qquad A = \sqrt{36 + \frac{1600}{\omega^2}} = 10\,cm$$

$$v_{max} = A\omega = 50\,cm/s.$$

3. Un'automobile lunga $l = 3\,m$ viaggia in un tratto rettilineo alla velocità $v = 130\,km/h$. Calcolare il tempo t necessario per il sorpasso di un autocarro, lungo $l_1 = 12\,m$, che viaggia alla velocità costante $v_1 = 90\,km/h$. Trovare quale accelerazione costante occorre imprimere all'automobile all'inizio del sorpasso, perché il tempo di sorpasso si riduca di $1/5$.

Quando i due veicoli viaggiano a velocità costante si ha

$$t = \frac{l + l_1}{v - v_1} = 1,35\,s \qquad (1)$$

Ma il tempo di sorpasso dev'essere ridotto di 1/5, $t' = 4t/5$, quindi l'automobile deve assumere una accelerazione a tale che la distanza $l + l_1$ (lunghezza dei due veicoli) venga percorsa nel tempo t', essendo la velocità iniziale quella relativa $v - v_1$. Quindi:

$$l + l_1 = \frac{1}{2}at'^2 + (v - v_1)t'.$$

Sostituendo nella precedente $t' = 4t/5$ e $v - v_1 = (l + l_1)/t$ ricavato dalla (1), si ottiene:

$$a = \frac{5}{8}\frac{1}{t^2}(l + l_1) = 5,14\, m/s^2.$$

4. Due tratti rettilinei a 90° di una pista automobilistica sono raccordati da una curva formata da un quarto di circonferenza di raggio R. Un pilota, proveniente da un tratto rettilineo, giunge in P_0 (inizio della curva) con accelerazione tangenziale a_t e percorre la curva mantenendo costante tale accelerazione. Sapendo che in P_0 l'accelerazione normale è $2a_t$, determinare l'accelerazione normale nel punto P in cui termina la curva e l'intervallo di tempo impiegato a percorrerla ($R = 100\, m$; $a_t = 5\, m/s^2$).

Detta v_0 la velocità in P_0, si ha

$$a_n(P_0) = 2a_t = \frac{v_0^2}{R}, \qquad a_n(P) = \frac{v^2}{R}. \tag{1}$$

Dalla legge cinematica,

$$\Delta s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_t},$$

dove $\Delta s = \pi R/2$ è la lunghezza dell'arco del quarto di circonferenza, si ricava:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_t\Delta s = v_0^2 + a_t\pi R.$$

Quindi,

$$\frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2}{R} + \pi a_t.$$

Si trae:

$$a_n(P) = a_n(P_0) + \pi a_t = a_t(2 + \pi) = 25,7\, m/s^2. \tag{2}$$

La relazione

$$\Delta t = \frac{v - v_0}{a_t},$$

fornisce l'intervallo di tempo impiegato per percorrere la curva, dove, per le (1) e (2),

$$v_0 = \sqrt{2a_tR} = 31,6\, m/s; \qquad v = \sqrt{a_t(2 + \pi)R} = 50,7\, m/s.$$

Pertanto:

$$\Delta t = 3,8\, s$$

5. Due imbarcazioni A e B procedono in direzioni opposte con velocità costanti, $v_A = 20\, km/h$ e $v_B = 30\, km/h$. Nell'istante in cui la distanza tra le imbarcazioni è d, da A viene sparato un proiettile con velocità, relativa all'imbarcazione, di modulo $v_P = 150\, m/s$ ed alzo $\theta = 30°$. Determinare la distanza d perché il proiettile colpisca B. Trascurare le dimensioni delle imbarcazioni e la resistenza dell'aria.

Il problema può essere risolto nel riferimento fisso o nel riferimento solidale con A.

Nel primo caso, tenuto conto che la componente orizzontale della velocità del proiettile è somma di $v_P \cos\theta$ e della velocità di A, le equazioni del moto sono,

$$x = (v_A + v_P \cos\theta)t; \qquad y = v_P \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{1}$$

Il tempo di gittata va ricavato dalla seconda per $y = 0$; si ha

$$t_G = \frac{2v_P \sin\theta}{g};$$

si noti che esso è indipendente da v_A. Sostituendo nella prima delle (1) e tenendo conto del moto dell'imbarcazione B, la gittata x_G risulta:

$$x_G = (v_A + v_P \cos\theta)\, t_G = d - v_B\, t_G,$$

dalla quale si ricava:

$$d = (v_A + v_B + v_P \cos\theta)\, t_G = 2,2\, km. \tag{2}$$

Nel riferimento solidale con A le equazioni del moto diventano:

$$x' = v_P \cos\theta\, t; \qquad y' = v_P \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Il tempo di gittata è lo stesso del primo caso. La gittata, tenuto conto che la velocità relativa delle imbarcazioni è $v_A + v_B$, risulta:

$$x'_G = v_P \cos\theta\, t_G = d - (v_A + v_B)\, t_G,$$

da cui si ottiene lo stesso valore della (2).

6. Un bersaglio B posto all'altezza $h = 5\,m$ da un piano orizzontale, dev'essere colpito da un proiettile sparato da un carrello che si muove sul piano con velocità costante $v_C = 4,95\,m/s$, verso la proiezione O del bersaglio sul piano stesso. Determinare l'alzo θ in modo che il bersaglio venga colpito nel punto più alto della traiettoria del proiettile, se questo viene sparato quando il carrello si trova da O alla distanza uguale all'altezza h. Trascurare il rinculo del carrello.

Detto v_0 il modulo della velocità del proiettile, come noto, le equazioni del moto nel riferimento fisso, sono:

$$x = (v_C + v_0 \cos\theta)t; \qquad y = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2, \tag{1}$$

che per $x = y = h$, diventano,

$$h = (v_C + v_0 \cos\theta)t; \qquad h = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{2}$$

Derivando rispetto al tempo si ottengono le componenti della velocità:

$$\dot{x} = v_C + v_0 \cos\theta; \qquad \dot{y} = v_0 \sin\theta - gt,$$

e dalla seconda, annullando la componente verticale della velocità, il tempo impiegato dal proiettile per raggiungere la massima quota:

$$t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}. \tag{3}$$

Sostituendo nella seconda delle (2), si ottiene,

$$h = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g}, \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}. \tag{4}$$

Tenuto conto delle (3) e (4), la prima delle (2) fornisce:

$$h = (v_C + v_0 \cos\theta)\frac{v_0 \sin\theta}{g} = (v_C + v_0 \cos\theta)\sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{gh}{2}} - \frac{v_C}{v_0}. \tag{5}$$

Dalle (4) e (5) si ottiene

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{gh/2} - v_C}, \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{gh/2} - v_C}\right). \tag{6}$$

Si deduce che l'alzo dipende dalla velocità di trascinamento v_C. Nel caso del problema risulta:

$$\tan\theta = \infty, \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

D'altra parte, la componente orizzontale della velocità è somma della velocità di trascinamento v_C e della velocità $v_0 \cos\theta$ relativa al carrello. Siccome, tenendo presente la (4), la (3) risulta

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

si ha:

$$v_0 \cos\theta = \frac{h}{t} = \sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

Si deduce, per la (6), che quando la velocità relativa è uguale alla velocità del carrello l'alzo dev'essere $\pi/2$.

7. Un tiratore posizionato sul bordo di una pedana circolare di raggio $R = 1\,m$, ruotante con velocità angolare costante $\omega = 5\,rad/s$ attorno al suo asse, deve colpire un bersaglio fisso B, posto all'esterno della pedana alla distanza $2R$ dal centro. Assumendo che velocità iniziale del proiettile abbia modulo $v_0 = 10\,m/s$, determinare la direzione θ da imporre al tiro se questo viene effettuato quando il tiratore si trova nella posizione A allineata col centro O della pedana e col bersaglio B.

Nel riferimento ortogonale fisso, con origine in O, asse x allineato col centro della pedana e col berasaglio, la velocità del proiettile $\mathbf{v}$, nell'istante in cui viene effettuato il tiro, deve risultare parallela a detto asse. Essa è somma della velocità $\mathbf{v}_0$, relativa alla pedana e della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_t$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_0. \tag{1}$$

La velocità di trascinamento è la velocità di rotazione della pedana,

$$\mathbf{v}_t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = \omega R\mathbf{j}.$$

Quindi la (1) diventa:

$$\mathbf{v} = \omega R\mathbf{j} + \mathbf{v}_0.$$

Si trae:

$$v_x = v_{0x}, \qquad v_y = \omega R + v_{0y}.$$

Poiché dev'essere $v_y = 0$, si deduce,

$$v_{0y} = -\omega R.$$

Ma,

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta, \qquad \sin\theta = \frac{v_{0y}}{v_0} = -\frac{\omega R}{v_0} \quad \Rightarrow \quad \theta = -30^\circ.$$

8. Un punto materiale si muove su un asse x di moto armonico con pulsazione $\omega = 2\pi\,s^{-1}$. Sapendo che all'istante $t_1 = 1\,s$ il punto occupa la posizione $x_1 = 3\,cm$ ed all'istante $t_2 = (1 + 3/4)\,s$ la posizione $x_2 = -4\,cm$, calcolare posizione, velocità ed accelerazione per $t = 0$.

Il moto può essere espresso dall'equazione

$$x = A\sin(\omega t + \varphi), \tag{1}$$

dove φ è la fase che determina le condizioni iniziali del moto. Dalla (1) si ha

$$x = A(\sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi).$$

Sostituendo i valori delle posizione e del tempo assegnati, si ha

$$x_1 = A\sin\varphi = 3\,cm \qquad x_2 = -A\cos\varphi = -4\,cm,$$

da cui si ricava l'ampiezza di oscillazione. Infatti:

$$\sin\varphi = \frac{3}{A}, \qquad \cos\varphi = \frac{4}{A}.$$

Quadrando e sommando:

$$\frac{9}{A^2} + \frac{16}{A^2} = 1, \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{25} = 5\,cm.$$

Quindi nelle due posizioni assegnate si ottengono le due relazioni,

$$3 = 5\sin\varphi, \qquad 4 = 5\cos\varphi, \qquad \sin\varphi = 0,6, \qquad \cos\varphi = 0,8; \tag{2}$$

oppure:

$$\tan\varphi = \frac{3}{4}, \quad \Rightarrow \quad \varphi = 36,87^\circ = 0,64\,rad.$$

Pertanto dalla (1) si ottiene:
posizione,

$$x = 5\sin\varphi = 3\,cm;$$

velocità,

$$\dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi) = 8\pi\;cm/s;$$

accelerazione,

$$\ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = -12\pi^2\;m/s^2.$$

9. Un punto materiale, inizialmente fermo, si muove su una traiettoria circolare di raggio $r = 30\,cm$. Sapendo che l'accelerazione angolare varia nel tempo secondo la relazione $\alpha(t) = kt$ con $k = 4\cdot 10^{-3}\,rad/s^2$, determinare il modulo dell'accelerazione nell'istante in cui l'arco percorso dal punto è $s = 20\,cm$.

Il modulo dell'accelerazione è dato da

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \tag{1}$$

dove i moduli delle accelerazioni tangenziale a_t e normale a_n sono:

$$a_t = r\alpha(t) = r\,k\,t, \qquad a_n = \frac{v^2}{r}. \tag{2}$$

La velocità del punto è data da

$$v = \int r\alpha(t)dt = r\,k\int t\,dt = \frac{1}{2}r\,k\,t^2 + C_1, \tag{3}$$

dove C_1 è una costante, pari a zero perché il punto è inizialmente in quiete. Quindi l'arco percorso è dato da

$$s(t) = \int v(t)dt = \frac{1}{6}rkt^3 + C_2,$$

dove C_2 può essere posta uguale a zero. Dalla precedente va ricavato il tempo impiegato dal punto per percorrere l'arco assegnato:

$$t = \sqrt[3]{\frac{6s}{rk}} = 10\,s.$$

Sostituendo nella (3) si ottiene il valore della velocità:

$$v = 6 \cdot 10^{-2}\,m/s$$

e dalle (2) i valori delle accelerazioni tangenziale e normale,

$$a_t = 1,2 \cdot 10^{-2}\,m/s^2, \qquad a_n = 1,2 \cdot 10^{-2}\,m/s^2.$$

La (1) fornisce il modulo dell'accelerazione:

$$a = 1,7 \cdot 10^{-2}\,m/s^2.$$

10. Un'automobile si pone in moto su una pista circolare di raggio $R = 225\,m$. Dall'istante $t = 0$ all'istante $t_1 = 10\,s$ la sua velocità cresce linearmente col tempo e percorre un arco di traiettoria $s = 150\,m$. Determinare il modulo dell'accelerazione all'istante t_1.

Detta a_t l'accelerazione tangenziale, si ha

$$\Delta s = s(t_1) - s(0) = \frac{1}{2} a_t t^2 \quad \Rightarrow \quad a_t = \frac{2\Delta s}{t_1^2} = 3\,m/s^2.$$

Inoltre,

$$v(t_1) = a_t\, t_1 = 30\,m/s;$$

quindi l'accelerazione normale risulta:

$$a_n = \frac{[v(t_1)]^2}{R} = 4\,m/s^2.$$

Si ottiene:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 5\,m/s^2.$$

11. Un corpo puntiforme si muove con velocità relativa $v_r = 0,5\,m/s$ in direzione radiale, verso il centro di una piattaforma orizzontale che ruota con velocità angolare $\omega = 2\pi\, rad/s$. Determinare velocità ed accelerazione quando il corpo si trova alla distanza $r = 12\,m$ dal centro.

Dette $\mathbf{v}_a$ e $\mathbf{v}_t$ le velocità assoluta e di trascinamento, si ha

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r,$$

il cui modulo è

$$\sqrt{(\omega r)^2 + v_r^2} = 75,4\,m/s.$$

Tenuto conto che $\mathbf{v}_t$ e $\mathbf{v}_r$ sono ortogonali, $\mathbf{v}_a$ forma un angolo con $\mathbf{v}_r$ dato da

$$\tan\alpha = \frac{v_t}{v_r} = \frac{\omega r}{v_r} = 150,8, \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{\omega r}{v_r} = 89,6°.$$

L'accelerazione assoluta è somma della accelerazione di trascinamento (centripeta) e della accelerazione di Coriolis,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c = -\omega^2 \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

il cui modulo è

$$a = \sqrt{(\omega^2 r)^2 + (2\omega v_r)^2} = 473,8\,m/s^2.$$

Tenendo presente che l'accelerazione di Coriolis è ortogonale alla velocità relativa e alla accelerazione centripeta, la accelerazione assoluta forma con quest'ultima un angolo:

$$\tan\beta = \frac{a_c}{a_t} = \frac{2v_r}{\omega r} = 0,013, \quad \Rightarrow \quad \beta = \tan^{-1}\frac{2v_r}{\omega r} = 0,76°.$$