**Università degli Studi di Roma ”La Sapienza”**
**Facoltà di Ingegneria**
**Raccolta di esercizi di Fisica II**
**CAMPO ELETTROSTATICO NEL VUOTO**

1. Lungo l'asse di un sottile disco isolante di raggio R e ad una certa distanza d da esso è posta, nel vuoto, una particella di massa m e carica q. Sul disco è uniformemente distribuita una carica Q. Determinare la minima velocità che è necessario imprimere alla particella, nella direzione dell'asse, perchè questa possa raggiungere il disco.
   Si trascuri la forza peso. (R=3cm, d=4cm, q/m=$5 \cdot 10^7$C/Kg, Q=$10^{-9}C$)
   **Soluzione:**

   come ben noto in elettrostatica le forze elettriche hanno natura conservativa; è quindi possibile introdurre una funzione energia potenziale $U = qV$ ed imporre il principio di conservazione dell'energia nel passaggio dal punto iniziale A al punto finale B come segue

   $$[1] \qquad T_A + U_A = T_B + U_B$$

   La particella parte in A con la velocità minima $v_A$ , si muove di moto rettilineo lungo l'asse del disco per fermarsi in B ove si ha $v_B = 0$ e $T_B = 0$. L'Eq.(1) diventa conseguentemente

   $$\frac{mv_A^2}{2} + qV_A = qV_B$$

   da cui si ottiene

   $$[2] \qquad v_A = \sqrt{\frac{2q(V_B - V_A)}{m}}$$

   La difficoltà si sposta ora nel calcolo della differenza di potenziale $V_B - V_A$ tra i due punti B ed A entrambi sull'asse. In sostanza si tratta di calcolare il potenziale generato da un disco uniformemente carico in un generico punto P sul suo asse a distanza x dal disco (vedere fig.2). Tale potenziale V(x) si ottiene integrando tutti i contributi infinitesimi di potenziale dV prodotti dalle cariche dq presenti sul disco

   $$[3] \qquad V(x) = \int dV = \int_Q (\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 p}) = \int_S (\frac{\sigma\, dS}{4\pi\varepsilon_0 p})$$

   ove $dq = \sigma\ dS$ e $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$ rappresenta la densità di carica superficiale. Utilizzando sul disco le coordinate polari $r, \phi$, l'integrale di superficie in $dS = r\ dr\ d\phi$ si spezza in due integrali come segue dalla Eq.(3)

   $$[4] \qquad V(x) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^R \frac{r\ dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r\ dr}{\sqrt{r^2+x^2}} =$$
   $$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{r^2+x^2}\right)_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2+x^2} - |x|\right)$$

   da cui si ricava $V_A(d) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2+d^2} - d\right)$ e $V_B(0) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} R$ che unitamente alla Eq.(2) danno luogo a

   $$v_A = \sqrt{\frac{q\sigma}{m\epsilon_0} \left(R + d - \sqrt{R^2+d^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{q\,4\,Q}{m\,(4\pi\epsilon_0)\,R^2}\left(R + d - \sqrt{R^2+d^2}\right)}$$

$$v_A = \sqrt{5\cdot 10^7\cdot 4\cdot 10^{-9}\cdot 9\cdot 10^9 \frac{(3+4-\sqrt{9+16})\cdot 10^{-2}}{9\cdot 10^{-4}}} = \sqrt{4\cdot 10^{10}} = 2\cdot 10^5\ m/s$$

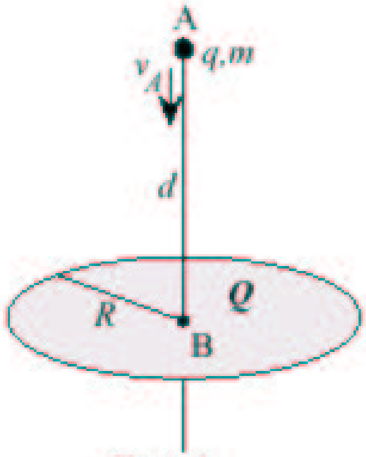


Figura 1

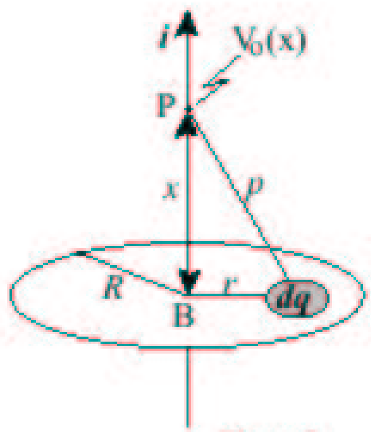
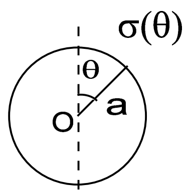


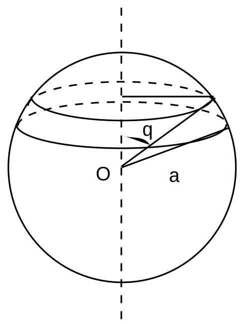
Figura 2

2. Su una superficie sferica di raggio $a$ una carica statica nel vuoto è distribuita con densità superficiale simmetrica rispetto alla rotazione intorno ad un asse, data dall' espressione $\sigma(\theta) = \sigma_0 cos^2(\theta)$. Calcolare l' espressione del potenziale $V(0)$ al centro della distribuzione, assumendo nullo il potenziale all' infinito.




**SOLUZIONE:**

In accordo alla figura riportata accanto, Il problema può essere risolto immaginando la distribuzione data dalla sovrapposizione di anelli coassiali di superficie infinitesima dS e dotati di carica:




$dq = \sigma dS = \sigma_0 cos^2\theta \cdot 2\pi a\ sen\theta \cdot a\ d\theta$
Si ricorda che, nell'ipotesi $V(\infty) = 0$, il potenziale prodotto sull'asse z di un sottile anello di raggio R è pari a:
$V(z) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$
dove Q è la carica complessivamente distribuita uniformemente sull'anello.
In base alla precedente formula possiamo ricavare il potenziale prodotto da ciascun anello infinitesimo:
$dV(0) = \dfrac{dq}{4\pi\epsilon_0 a} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{dq}{a} = \dfrac{\sigma_0 a}{2\epsilon_0} cos^2\theta sen\theta d\theta$
Applicando il principio di sovrapposizione si ottiene:
$V(0) = \dfrac{\sigma_0 a}{2\epsilon_0}\displaystyle\int_0^\pi d(-\frac{cos^3\theta}{3}) = \frac{\sigma_0 a}{3\epsilon_0}$

3. Nel vuoto una carica positiva $Q$ è distribuita all'interno di una sfera di raggio $R$. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni che una carica puntifurme negativa $q$, di massa $m$, compie se posta a distanza $r_c \ll R$ da centro della sfera.
**SOLUZIONE:**

Data la simmetria sferica della distribuzione di carica, il campo elettrico E può essere ricavato attraverso il teorema di Gauss mediante la seguente procedura.

$$4\pi r^2 E_0 = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\epsilon_0}$$

$$\text{Dove} \quad \rho = \text{ densità di carica } = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$$

Come si vede il campo E è linearmente dipendente dalla distanza r. Ne consegue che la forza agente sulla carica q è di tipo elastico

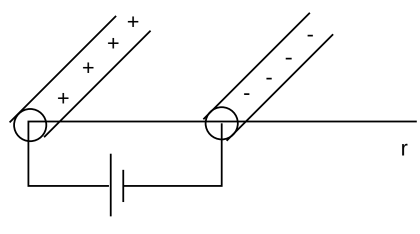
$$F = -kr = -|q|E_0 = -\frac{Q|q|}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$$

Ricordando che la pulsazione di oscillazione $\omega = 2\pi\nu$ è data da $\omega = \sqrt{k/m}$, dove m e la massa in oggetto e k il termine di richiamo, si perviene alla soluzione

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Q|q|}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$$

4. Si abbiano due conduttori cilindrici di raggio $a$, molto lunghi, paralleli tra di loro, i cui centri distano $d$ uno dall'altro. Tra i due conduttori, che sono in aria, viene applicata una differenza di potenziale $\Delta V$ mediante un generatore di forza elettromotrice. Calcolare il valore massimo di $\Delta V$ prima che si manifesti la scarice elettrica tra i due conduttori. Campo di rottura dell'aria $E_r = 30kv/cm$; $a = 5mm$; $d = 10cm$.
**SOLUZIONE:**

Il campo elettrico generato a distanza r da un conduttore cilindrico di lunghezza infinita su cui è distribuita un carica con densità lineare $\lambda$ è pari a:




$$\vec{E_0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} f \qquad r > a$$

Dove r è il versore dell'asse r disposto come in figura.
Applicando il principio di sovrapposizione, il campo elettrico generato complessivamente dai due cilindri è dato da:

$$\vec{E}_0 \ = \ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r})f.$$

Il campo elettrico assume il valore massimo $E_{MAX}$ in prossimità della superficie dei due cilindri $(r = a; r = d - a)$.

$$E_{MAX} = E(a) = E(d-a) = \frac{\lambda d}{2\pi\epsilon_0 a(d-a)}$$ , da cui si ricava $\lambda$

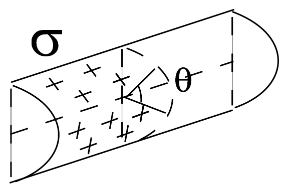
La differenza di potenziale tra i due cilindri è pari a:

$$\Delta V \ = \ \int_a^{d-a} \vec{E}_0 \cdot \vec{dt} \ = \ \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} ln\frac{d-a}{a}$$

Affinché non si verifichi la scarica elettrica tra i due conduttori, il campo elettrico massimo deve essere minore della rigidità dielettrica. Ciò corrisponde alla differenza di potenziale massima $\Delta V_{max}$ tra i due conduttori che risulta essere data da:

$$\Delta V_{max} = \frac{aE_r a(d-a)}{d} ln\frac{d-a}{a} \ = \ 84 \ kW$$

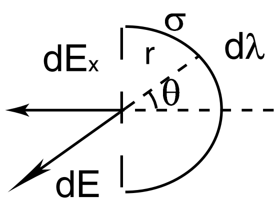
5. Una carica statica nel vuoto è distribuita su una superficie semi-cilindrica illimitata
con densità $\sigma = \sigma_0 sen^2\theta$.
Calcolare l'espressione di $E$ sull'asse.



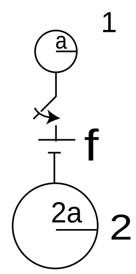

**SOLUZIONE:**

$$dE_x = dEcos\theta = \frac{\sigma r d\theta}{2\pi\epsilon_0 r}cos\theta = \frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0 sen^2\theta cos\theta d\theta}$$

$$E_x = \frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d(sen^3\theta) = \frac{\sigma_0}{3\pi\epsilon_0}$$




6. Due sfere conduttrici di raggi $a = 5cm$ e $2a$, distanti qualche metro tra loro, inizialmente scariche, sono collegate tramite un sottile filo conduttore, lungo il quale sono inseriti una batteria di $f = 9V$ e un interruttore inizialmente aperto, come mostrato in figura. Il sistema è in aria, lontano da altri corpi. Calcolare il lavoro che compie la batteria per raggiungere la nuova situazione statica dopo la chiusura dell'interruttore.



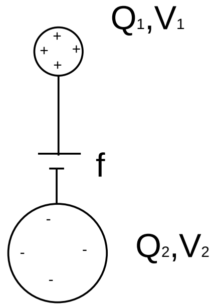

**SOLUZIONE:**

$Prima\ della\ chiusura: Q_1 = 0 \quad , \quad Q_2 \simeq 0$

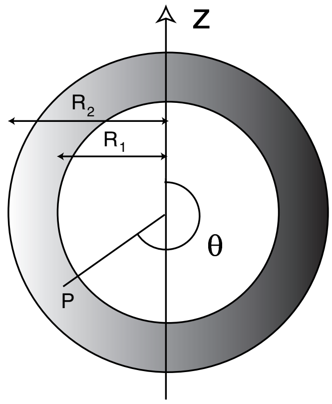
$Dopo: \quad V_1 - V_2 = f \quad V_1 = \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} \quad V_2 = \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 2a} \quad Q_2 = -Q_1 \implies$

$\dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \dfrac{1}{2}\dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 2a} = f \quad L = Q_1 f = \dfrac{2}{3} 4\pi\epsilon_0 a f^2 = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{9\cdot 10^9} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot$
$81 =$

$= 3.0 \cdot 10^{-10} J$




7. Nei punti $P$ all' interno di un guscio sferico di raggio interno $R_1$ ed esterno $R_2$ (sezione in figura) vi sia carica elettrica distribuita con densità di carica $\rho = \rho_0 cos\theta$. Si calcoli il momento di dipolo della distribuzione, in modulo direzione e verso, e si dia l' espressione del potenziale elettrico in un punto generico a distanza $R >> R_2$ dal centro geometrico della distribuzione di carica. [Dati $R_1 = 0.1m, R_2 = 0.2m, \rho_0 = 10^{-6}/m^3$].




**SOLUZIONE:**

$\vec{P} = \int \rho \vec{r} d\tau \longrightarrow$ diretto lungo $\hat{z}$ con verso positivo

$\mid \vec{P} \mid = P_z = \displaystyle\int_\tau \rho r cos\vartheta \cdot r^2 sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr =$

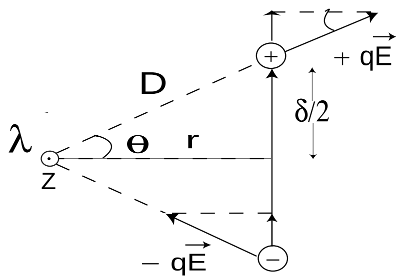
$2\pi\rho \displaystyle\int_0^\pi cos^2\vartheta sin\vartheta d\vartheta \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{\pi\rho_0}{3}(R_2^4 - R_1^4)$

$P_z = 1,57 \cdot 10^{-9} \quad Cm \qquad V_0(P) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{P\cdot z}{r^3}$

8. Dato un filo rettilineo molto lungo, disposto nel vuoto lungo l'asse $z$ di un riferimento cartesiano, uniformemente carico con densità lineare di carica $\lambda$, ricavare l'espressione della forza risultante su un piccolo dipolo elettrico di momento di dipolo $\vec{p}$ con il suo centro posto a una distanza $r$ dal filo carico e diretto perpendicolarmente al piano individuato dal filo stesso e dal punto A considerato.

**SOLUZIONE:**

$$\vec{F} \parallel \vec{p} \qquad E = \lambda/2\pi\epsilon_0 D$$




$$F = 2(qE)sen\vartheta \qquad sen\vartheta = \delta/2D$$

$$F = \frac{2q\lambda\delta}{2\pi\epsilon_0 D 2D} = p\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 D^2}$$

$$D^2 = r^2 + \delta^2/4 \simeq r^2 \qquad \vec{F} \cong \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2}\vec{p}$$