Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Raccolta di esercizi di Fisica II
CAMPO ELETTROSTATICO NEi DIELETTRICI

1. Un condensatore, costituito da due superfici sferiche di raggi R_1 ed R_2, è riempito con un materiale elettrico la cui costante varia in funzione della distaza r dal centro comune delle due sfere secondo la legge $\epsilon = \epsilon_0 \frac{R_2^2}{r^2}$. Tra le due armature esiste una differenza di potenziale V. Calcolare la carica Q distribuita sulle armature del condensatore e le cariche di polarizzazione Q_{P1} e Q_{P2} distribuite sulle superfici del dielettrico di raggio R_1 e R_2. (R_2=3cm, R_2-R_1=1mm, V=300volt).
Soluzione:

il problema del calcolo della carica Q in un condensatore a partire dalla differenza di potenziale fra le sue armature richiede un approccio inverso a quello comunemente usato nella teoria sui condensatori, dove nota la carica sulle armature Q si procede prima al calcolo del campo elettrico interno $\vec{E}$ e quindi, per integrazione, si ricava la differenza di potenziale ΔV. Seguiamo l'approccio diretto. Sia data una carica Q sull'armatura interna A alla quale va a contrapporsi per induzione una carica -Q sull'armatura esterna B (figura 3). Data la simmetria radiale del condensatore sferico i vettori $\vec{E}, \vec{D}$ devono conservare tale simmetria radiale e si possono calcolare applicando la legge di Gauss. Tuttavia la presenza di cariche di polarizzazione nel dielettrico suggerisce di applicare la legge di Gauss per il vettore spostamento elettrico $\vec{D}$ che dipende dalle sole cariche libere. In generale applicando la legge di Gauss su una qualsiasi superficie chiusa Σ si deve avere per il flusso uscente

$$[5] \qquad \Phi_\Sigma(\vec{D}) = \int_\Sigma \vec{D} \cdot \hat{n}\, dS = Q_{lib,int}$$

ove $Q_{lib,int}$ rappresenta tutta e sola la carica libera interna a Σ. L'integrale di superficie descritto risulta particolarmente complicato a meno che non venga scelta come Σ una sfera concentrica di raggio r. In questo caso il calcolo del flusso uscente si semplifica notevolmente essendo il versore normale uscente $\hat{n}$ parallelo ed equiverso a $\vec{D}$, ed essendo il modulo D(r) costante su tutta Σ vale la relazione

$$[6] \qquad \Phi_\Sigma(\vec{D}) = \int_\Sigma \vec{D} \cdot \hat{n}\, dS = \int_\Sigma D(r)\, dS = D(r) \int_\Sigma dS = D(r)\, \Sigma = 4\pi r^2\, D(r) = Q_{lib,int}$$

Essendo la Σ interna al condensatore ($R_1 < r < R_2$), la carica interna libera è tutta e sola la carica sul conduttore A; cioè vale $Q_{lib,int} = +Q$ che sostituita nella Eq.(6) permette di ottenere $D(r) = Q/4\pi r^2$. Nelle altre 2 regioni "esterne" ($r < R_1$) e ($r > R_2$) invece deve valere D(r)=0 come si dimostra ripercorrendo lo stesso ragionamento 2 volte ora con una superficie sferica Σ interna al conduttore A, ora con una esterna a B; in tutti e due i casi la carica netta è nulla $Q_{lib,int} = 0$ e conseguentemente D=0. Un grafico qualitativo di D(r) è riportato in figura 4a. Il vettore campo elettrico si ottiene invece dalla relazione $\vec{E}(r) = \vec{D}(r)/\epsilon(r)$. Il campo elettrico è quindi nullo nelle regioni "esterne" mentre in quella interna ($R_1 < r < R_2$) vale $E(r) = \frac{D(r)}{\epsilon(r)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2}$ che è fortuitamente indipendente da r . Un grafico qualitativo di E(r) è riportato in figura 4b. La differenza di potenziale fra le armature A e B si ottiene integrando il campo elettrico lungo un percorso per facilità radiale come segue

$$\Delta V = \int_A^B \vec{E}(r) \cdot d\vec{s} = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\ dr = E(R_2 - R_1) = \frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_2^2}$$

da cui si può ricavare la carica del condensatore Q che vale

$$Q = \frac{(4\pi\epsilon_0)R_2^2 \Delta V}{R_2 - R_1} = \frac{(3 \cdot 10^{-2}) \cdot 300}{(9 \cdot 10^9) \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-8}\ C$$

Accanto alla carica libera sulle armature bisogna considerare però anche la carica di polarizzazione nel dielettrico. In generale la carica di polarizzazione potrà essere distribuita sulle superfici del dielettrico A' e B' affacciate rispettivamente ad A e B ed eventualmente nel volume del dielettrico (fig.5). Il calcolo della densità di carica superficiale σ_{pol} si ottiene dal prodotto scalare $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \hat{n}$ dove $\vec{P}$ è il vettore intensità di polarizzazione ed $\hat{n}$ il versore normale esterno alla superficie del dielettrico. L'intensità di polarizzazione dipende dal vettore spostamento elettrico come segue

$$P = \epsilon_0 \chi E = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E\ = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_0 \epsilon_r} D = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} D\ = \frac{(R_2^2 - r^2)Q}{R_2^2\ 4\pi r^2}$$

La densità superficiale σ_{pol} va calcolate su A' e B' tenuto conto che $\vec{P}$ ed $\hat{n}$ sono controversi su A', ma equiversi su B' si ottiene

$$\sigma_{pol-A'} = \vec{P}(R_1) \cdot \hat{n}_{A'} = -\frac{R_2^2 - R_1^2}{4\pi R_1^2 R_2^2} Q \quad e \quad \sigma_{pol-B'} = \vec{P}(R_2) \cdot \hat{n}_{B'} = \frac{R_2^2 - R_2^2}{4\pi R_2^4} Q = 0$$

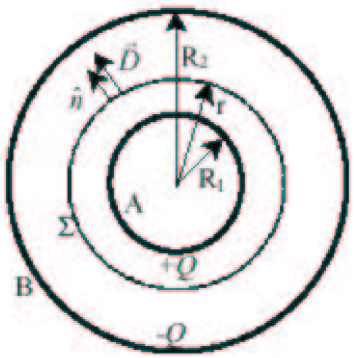


Figura 3

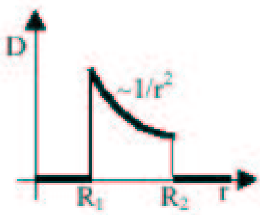


Figura 4a

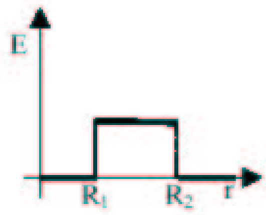


Figura 4b

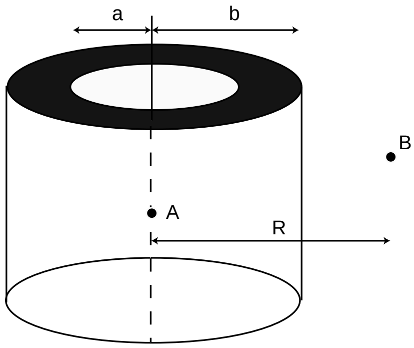
Figura 5

Infine la carica di polarizzazione Q_{pol} si ottiene integrando la densità σ_{pol} su tutta la superficie sferica. Ripetendo il procedimento per le due superfici A' e B' si ottiene

$$Q_{pol-A'} = \int_{A'} \sigma_{pol-A'} dS = \sigma_{pol-A'} 4\pi R_1^2 = -\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2} Q =$$

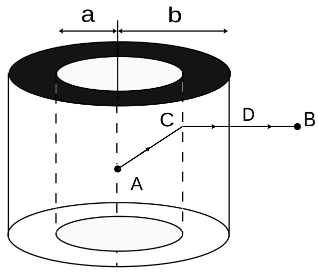
$$= -\frac{3^2 - 2.9^2}{3^2} 3 \cdot 10^{-8} C \simeq -2 \cdot 10^{-9} C \quad e \quad Q_{pol-B'} = 0$$

2. Sia data una distribuzione di carica con densità uniforme ρ all' interno di un guscio cilindrico dielettrico di raggio interno a ed esterno b, e costante dielettrica relativa ϵ_r, come indicato in figura. La distribuzione sia indefinitamente estesa lungo la direzione dell' asse. Si calcoli la differenza di potenziale a cui si trovano due punti A e B disposti rispettivamente sull' asse di simmetria e ad una distanza R da esso. [Dati: $a = 0.1m$, $b = 0.2m$, $R = 0.4m$, $\varrho = 10^{-6}C/m^3$, $\epsilon_r = 5$].



SOLUZIONE:

Gauss $\Phi_s(\vec{D}) = Q^{int}$



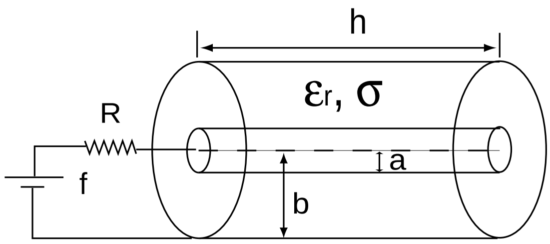
$$\vec{D} = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \dfrac{\rho}{2}\dfrac{r^2 - a^2}{r} & a \leq r \leq b \\ \dfrac{\rho}{2}\dfrac{b^2 - a^2}{r} & r \geq b \end{cases} \quad \vec{E} = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \dfrac{\rho}{2\epsilon_0\epsilon_r}\dfrac{r^2 - a^2}{r} & a \leq r \leq b \\ \dfrac{\rho}{2\epsilon_0}\dfrac{b^2 - a^2}{r} & r \geq b \end{cases}$$

$$V_A - V_B = \overbrace{\int_A^C \vec{E}\vec{dl}}^{\vec{E}=0} + \int_C^D \vec{E}\vec{dl} + \int_D^B \vec{E}\vec{dl} =$$

$$\int_a^b \frac{\rho}{2\epsilon_0\epsilon_r}\frac{r^2 - a^2}{r}dr + \int_b^R \frac{\rho}{2\epsilon_0}\frac{b^2 - a^2}{r}dr$$

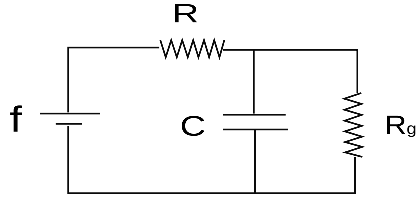
$$V_A - V_B = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\epsilon_r}\left(\frac{b^2 - a^2}{2} - a^2 ln\frac{b}{a}\right) + \left(b^2 - a^2\right) ln\frac{R}{b}\right] = 1435 \quad volt$$

3. Un tratto di cavo coassiale ha lunghezza h, raggio del conduttore cilindrico interno pari ad a, raggio del sottile guscio cilindrico conduttore esterno pari a b (con h $\gg$ a,b).
Il dielettrico che riempie lo spazio tra tali conduttori ha costante dielettrica relativa ϵ_r, ma non è perfettamente isolante e presenta una conducibilità σ.
Un'estremità del cavo è connessa ad un generatore di fem f costante tramite una resistenza r, mentre l'altra estremità del cavo è aperta come mostrato in figura. Ricavare l'espressione della carica che, a regime si trova sull'armatura del condensatore.



SOLUZIONE:

$$R_g = \int_a^b \frac{1}{\sigma}\frac{dr}{2\pi r h} = \frac{1}{2\pi\sigma h} ln(b/a)$$

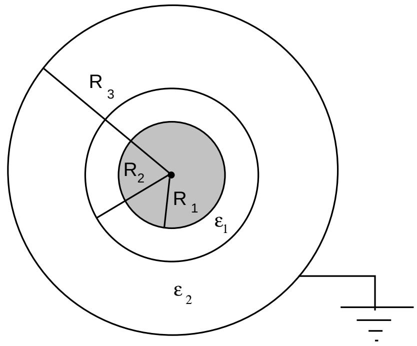


$$\triangle V = IR_g = fR_g/(R+R_g)$$

$$Q = C\triangle V \qquad con \quad C = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r h/ln(b/a)$$

$$Q = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r hf/(2\pi\sigma h R + ln(b/a))$$

4. Il condensatore cilindrico, rappresentato in sezione nella figura, ha lo spazio tra le armature riempito da due gusci cilindrici adiacenti, di cui il primo di raggio interno R_1, raggio esterno R_2, costante dielettrica ϵ_1 e rigidità dielettrica E_{R_1} (massimo campo elettrico sopportabile dal dielettrico); ed il secondo raggio interno R_2, raggio esterno R_3, costante dielettrica ϵ_2 e rigidità dielettrica E_{R_2}. Assumendo che valga la diseguaglianza: $\epsilon_1 \cdot E_{R_1} \cdot R_1 < \epsilon_2 \cdot E_{R_2} \cdot R_2$, ricavare l' espressione della massima differenza di potenziale V_{max} che si può applicare al condensatore senza comprometterne le qualità di isolamento.



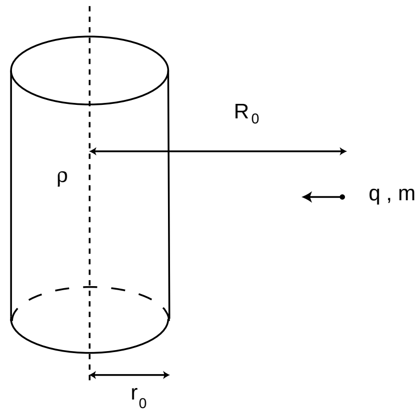
SOLUZIONE:

$$E = \lambda/2\pi\epsilon r \qquad (\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r)$$
$$E_{1MAX} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1 R_1} \le E_{R_1} \longrightarrow \lambda \le 2\pi\epsilon_1 R_1 E_{R_1}$$
$$E_{2MAX} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2 R_2} \le E_{R_2} \longrightarrow \lambda \le 2\pi\epsilon_2 R_2 E_{R_2}$$

$$\epsilon_1 R_1 E_{R_1} < \epsilon_2 R_2 E_{R_2} \longrightarrow \lambda_{MAX} = 2\pi\epsilon_1 R_1 E_{R_1}$$

$$V_{MAX} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda_{MAX}}{2\pi\epsilon_1 r}dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{\lambda_{MAX}}{2\pi\epsilon_2 r}dr = R_1 E_{R_1}\left[ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)\right]$$

5. Si abbia una distribuzione di carica elettrica con densità uniforme ρ all'interno di un cilindro dielettrico ($\varepsilon_r = 5$) indefinitamente lungo di raggio r_0. Una particella di carica q e massa m viene lanciata con velocità v_0 in direzione dell'asse del cilindro e perpendicolarmente ad esso, come indicato in figura, da una distanza R_0. Si determini il valore di v_0 per il quale la particella arriva con velocità nulla sull'asse del cilindro. Si consideri che la particella possa attraversare il dielettrico senza urti. [$m = 9.1 \cdot 10^{-31} Kg$, $q = -1.610^{-19} C$, $\rho = -10^{-6} C/m^3$, $R_0 = 1m$, $r_0 = 0.1m$]



SOLUZIONE:

Campo del cilindro : infinito

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\epsilon_0 \epsilon_r}\hat{r} & r \leq r_0 \\ \dfrac{r_0^2 \rho}{2\epsilon_0 r}\hat{r} & r > r_0 \end{cases}$$

$$T_{fin} - T_{in} = U_{in}^{el} - U_{fin}^{el} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_o^2 = -\int_{R_0}^{0} q\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^{r_0} \frac{q\rho r}{2\epsilon_0 \epsilon_r} dr + \int_{r_0}^{R_0} \frac{q r_0^2 \rho}{2\epsilon_0 r} dr =$$

$$\frac{1}{2}\frac{q\rho r_0^2}{\epsilon_0}\{\frac{1}{2\epsilon_r} + ln\frac{R_0}{r_0}\} \quad \Rightarrow v_0 = \left[\frac{q\rho r_0^2}{m\epsilon_0}(\frac{1}{2\epsilon_r} + ln\frac{R_0}{r_0})\right]^{\frac{1}{2}} = 2.2 * 10^7 m/s$$

6. Un condensatore piano, a facce parallele quadrate di lato a e spessore b è completamente riempito da un dielettrico ($\varepsilon_r = 5$). Esso è isolato e carico con una carica Q. Si immagini di estrarre il dielettrico dal condensatore. Si determini di quanto si può estrarre il dielettrico prima che si generi una scarica elettrica tra le armature, sapendo i valori della rigidita dielettrica dell'aria $E_{R(aria)}$ e del dielettrico $E_{R(diel)}$. Si trascurino gli effetti di bordo. [$Q = 5 \cdot 10^{-9} C$, $a = 0.1m$, $E_{R(diel.)} = 4 \cdot 10^5 \frac{V}{m}$, $E_{R(aria)} = 3 \cdot 10^4 V/m$].

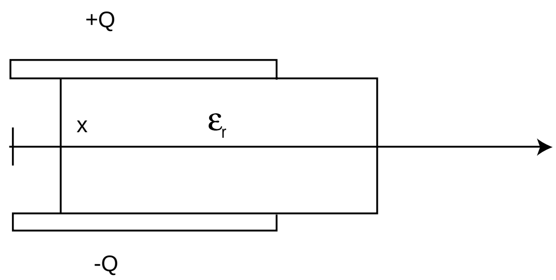
SOLUZIONE:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 a}{b}\left[x(1-\epsilon_r) + a\epsilon_r\right]$$

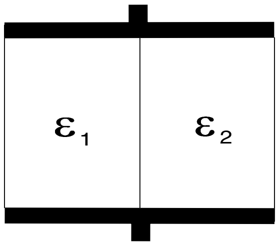
$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{Qb}{\epsilon_0 a}\frac{1}{x(1-\epsilon_r) + a\epsilon_r}$$

$$E = \frac{\Delta V}{b} = \frac{Q}{\epsilon_0 a}\frac{1}{x(1-\epsilon_r) + a\epsilon_r} < E_{R(aria)}$$

$$\Rightarrow x < \frac{\epsilon_r a}{\epsilon_r - 1} - \frac{Q}{\epsilon_0 a E_{R(aria)}(\epsilon_r - 1)} = 7.8cm$$



7. Un condensatore a facce piane e parallele ha nel vuoto una capacità $C_0 = 10\mu F$.
Successivamente viene riempito per metà superficie con un dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_{r1} = 1.4$ e per l' altra metà con un altro dielettrico di costante $\epsilon_{r2} = 1.6$, secondo lo schema in figura. Calcolare la nuova capacità ed il rapporto fra le cariche di polarizzazione sui due dielettrici.



SOLUZIONE:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r_1} \frac{S}{2}}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r_2} \frac{S}{2}}{d} = \frac{\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2}}{2} C_0 = 1,5 \quad C_0 = 15\mu F$$

$$\sigma_1^p = \vec{P_1} \cdot \hat{r} = \epsilon_0(\epsilon_{r_1} - 1)|\vec{E_1}| \quad ; \sigma_2^p = \vec{P_2} \cdot \hat{r} = \epsilon_0(\epsilon_{r_2} - 1)|\vec{E_2}| \quad ; \vec{E_1} = \vec{E_2}$$

$$\frac{\sigma_1^p}{\sigma_2^p} = \frac{\epsilon_{r_1} - 1}{\epsilon_{r_2} - 1} = 0.67$$